MATEMATICAS PARA EL ANALISIS ECONOMICO



Knut Sydsaeter

Peter J. Hammond

PEARSON

Prentice Hall





MATEMÁTICAS

PARA EL

ANÁLISIS ECONÓMICO

Knut Sydsaeter
University of Oslo

Peter Hammond
Stanford University

Traducción:
Manuel Jesús Soto Prieto
José Luis Vicente Córdoba
Universidad de Sevilla

Revisión técnica:
Emilio Cerdá Tena
Universidad Complutense de Madrid

Xavier Martínez Guiralt
Universidad Autónoma de Barcelona







PRENTICE HALL
Madrid • Upper Saddle River • Londres • México • Nueva Delhi
Río de Janeiro • Singapur • Sydney • Tokio • Toronto

datos de catalogación bibliográfica

SYDSAETER, K. y HAMMOND, P.
Matemáticas para el análisis económico
PRENTICE HALL, Madrid, 1996

ISBN: 0-13-240615-2
MATERIA:

Matemáticas	51
Economía en general	33
CDU	51.7

Formato: 200 x 250mm Páginas 796

KNUT SYDSAETER & PETER HAMMOND
Matemáticas para el análisis económico

PRENTICE HALL International (UK) Ltd.
Campus 400, Maylands Avenue
Hemel Hempstead
Hertfordshire, HP2 7EZ
Simon & Schuster International
A Viacom Company

ISBN: 0-13-240615-2
Depósito legal: M. 9.651-1998
1.ª reimpresión, 1998

Traducido de:
MATHEMATICS FOR ECONOMIC ANALYSIS.
PRENTICE HALL, INC.- Simon & Schuster International
A Viacom Company
Copyright © MCMXCV
ISBN: 0-13-583600-X

Edición en español:
Editor: Andrés Otero
Diseño de cubierta: Diseño y Comunicación Visual
Composición: Manuel Jesús Soto
Impreso por: Fareso S.A.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

A nuestras esposas internacionales, Gull-Maj y Mrudula, cuyas prontas sonrisas nos ayudan tanto.

Contenidos



7

8

9

10

11

Otros temas de integración 279

12

Álgebra lineal: vectores y matrices 300

13

Determinantes y matrices inversas 336

14

Otros temas de álgebra lineal 367

Prólogo

Propósito del libro

Los estudiantes de economía de hoy necesitan diversas herramientas matemáticas importantes. Entre otras, son necesarias el cálculo para funciones de una y varias variables, así como unos conocimientos básicos de los problemas de optimización en varias variables, con restricciones o sin ellas. El Álgebra lineal se usa en teoría económica y más extensamente en econometría. Todas estas técnicas son útiles, y hasta esenciales, para los cursos superiores de economía, como economía del trabajo, organización industrial y finanzas públicas. Los estudiantes de otras ramas, como la economía del desarrollo y del medio ambiente, en las cuales hay que considerar la evolución de un sistema económico a lo largo del tiempo, pueden sacar un enorme partido de la teoría de ecuaciones diferenciales y en diferencias.

La experiencia indica que bastantes profesores de estas áreas de la economía suelen asignar como trabajo a los estudiantes la lectura de artículos recientemente publicados. Así ven que, en general, la base matemática de los estudiantes no es adecuada para entender incluso los trabajos menos técnicos de este tipo. Incluso estudiantes que hayan realizado con aprovechamiento cursos intermedios en micro y macro–economía han utilizado poco cálculo, si es que lo han utilizado. En general, los conocimientos de cálculo que tienen los estudiantes de economía provienen, bien de la enseñanza media, bien de cursos impartidos por los departamentos de matemáticas de sus propias Facultades durante los primeros años. Estos conocimientos no suelen sobrepasar la barrera de las funciones de una variable y, en general, se han adquirido *per se*, sin ver aplicaciones al campo de la economía.

El propósito de este libro es ayudar a los estudiantes a adquirir las habilidades matemáticas que necesitan para leer los artículos de economía menos técnicos, al menos, y así ser capaces de desempeñar una labor de economistas o de analistas financieros en el mundo contemporáneo. Como el título del libro indica, se trata de un libro de matemáticas, en el cual el material está ordenado de tal manera que los conocimientos se van adquiriendo progresivamente. Si, al mismo tiempo, el estudiante adquiere algunas intuiciones o técnicas económicas muy elementales, tanto mejor. A veces damos importancia a lo económico no solamente para motivar un tema matemático, sino para ayudar a tener una intuición matemática. Obviamente, para entender los ejemplos económicos que aquí se exponen, será bueno que el estudiante tenga un cierto conocimiento rudimentario de economía y de lo que ésta trata. Sin embargo, es posible estudiar este libro antes de embarcarse en estudios de economía propiamente dichos.

Éste no es un libro sobre economía ni sobre economía matemática. Esperamos que los estudiantes aprendan teoría económica, de forma sistemática, en otros cursos. Consideraremos que habremos

tenido éxito cuando estos estudiantes se puedan concentrar en la parte puramente económica de dichos cursos, sin preocuparse de las matemáticas subyacentes, que ya hayan aprendido aquí.

Características especiales

Desde luego que éste no es el primer texto del mundo escrito con el propósito que acabamos de indicar. Pero creemos que una parte de su originalidad radica en cómo se ha organizado el material que contiene. Uno de los autores (Sydsæter) es profesor de matemáticas en un departamento de economía. Tiene muchos años de experiencia enseñando a estudiantes materias de este tipo en Noruega, y gran parte del contenido de este libro está basado y traducido de sus libros de texto, escritos en noruego, que han sido utilizados ampliamente en Escandinavia. El otro autor (Hammond) ha investigado y enseñado teoría económica a ambos lados del Atlántico, y tiene una larga experiencia en la utilización de variadas técnicas matemáticas en el análisis económico. También ha explicado cursos de matemáticas para economistas, durante varios años, en el departamento de economía de la Universidad de Stanford.

A lo largo de todos estos años hemos reunido un cierto número de ejemplos resueltos, así como problemas para proponer a los estudiantes. Incluimos en el libro una amplia selección de ellos. Somos conscientes de que nosotros mismos aprendimos bastante del material que incluimos a base de ejemplos y problemas. El hecho de que los libros de texto contengan un gran número de problemas es clásico para libros de matemáticas, pero quizás no tanto en los de matemáticas para economistas. Este libro contiene las soluciones de los problemas con números impares. Las otras se pueden encontrar en otro libro, *Instructor's Manual*.[1]

Hay otro aspecto de los problemas que merece la pena destacar. Aparentemente algunos de ellos contienen un exceso de notación. Por ejemplo, una expresión del tipo $An_0^\alpha a^b$ se podría sustituir simplemente por una constante c. Pero el punto importante de estos problemas es el enseñar al estudiante a ver cuándo se pueden hacer esas sustituciones y para qué sirven. Además, en muchos de los casos, la notación de esos problemas está tomada de artículos publicados de economía.

Temas estudiados

Hemos incluido una gran parte de material elemental en los primeros capítulos del libro, así como en los apéndices. La experiencia indica que es muy difícil empezar un libro como éste a un nivel que sea realmente demasiado elemental. Hoy día, los estudiantes que ingresan en nuestras Facultades de Económicas tienen una amplia cantidad de conocimientos básicos y técnicas matemáticas, desde unas reglas algebraicas elementales hasta una cierta facilidad para el cálculo con funciones de una variable. Sin embargo, hemos creído necesario incluir estos temas introductorios para que sirvan para refrescar conocimientos a aquellos estudiantes que los tengan más flojos, de tal manera que todos pueden incorporarse al estudio del núcleo del libro. De nuevo esto viene motivado por la necesidad creciente de técnicas matemáticas en cursos avanzados de economía.

Hemos incluido en el *Instructor's Manual* algún material para tests, con la finalidad de que estudiantes y profesores puedan comprobar la marcha del curso. El profesor ajustará el punto de partida y el ritmo a la situación particular de sus estudiantes. Pero es más importante que quien estudia pueda ver por sí mismo sus particulares puntos fuertes y débiles, sobre todo para pedir ayuda para salvar éstos. Así es probable que los primeros capítulos sean de más utilidad a los estudiantes menos aventajados. Además, la gran cantidad de ejemplos económicos, como los problemas de optimización cuadrática del Capítulo 3, se ponen para motivar a los estudiantes que hayan podido encontrar tedioso estas materias en el pasado.

[1] N. del T. No traducido al español en el momento de la publicación de este libro

Después del material introductorio en los Capítulos 1 a 3 viene un tratamiento sencillo del cálculo en una variable, contenido en los Capítulos 4 a 11. Creemos que este es la materia que debe contener un curso elemental de este tipo. Luego viene el Álgebra lineal (Capítulos 12 a 14), cálculo en varias variables (Capítulos 15 y 16), teoría de la optimización (Capítulos 17 a 19) y ecuaciones en diferencias y diferenciales (Capítulos 20 y 21), como materias importantes en economía. En un cierto sentido los capítulos 12 a 21 son el núcleo del libro, la primera parte del cual es el Álgebra lineal. Las personas que tengan una buena base de cálculo en una variable casi pueden empezar aquí. De los primeros once capítulos necesitarán solamente revisar rápidamente algunos temas especiales no tratados en los cursos estándar de cálculo.

La ordenación de los capítulos tiene su lógica, aunque hay algunas otras posibilidades. Por ejemplo, se podría haber puesto el Capítulo 19 (sobre programación lineal) antes del 14, o incluso del 13 (sobre álgebra lineal). En este caso las referencias al teorema de Kuhn-Tucker tendrían que ser pospuestas hasta después del Capítulo 18. También es posible que algunos profesores no quieran detenerse mucho en la integración, especialmente en el Capítulo 11, y que la falta de tiempo impida estudiar los últimos capítulos.

Conceptos y técnicas clave

Las personas menos ambiciosas pueden querer concentrarse en aprender justo lo esencial de cada capítulo. Por eso se han enmarcado estos puntos en el texto, para resaltar su importancia. Los problemas son esenciales para la comprensión de los conceptos, y se deben hacer los más elementales. Las personas con más ambiciones, o las dirigidas por profesores más exigentes, deben intentar los problemas más avanzados. También pueden estudiar las secciones opcionales o el material en letra pequeña. Este último proporciona explicaciones de por qué ciertas técnicas son adecuadas, o es una demostración de un resultado. Siempre que sea posible, el estudiante debe saber por qué son ciertos los resultados y por qué hay que intentar resolver los problemas de una cierta forma; por eso hemos incluido explicaciones a nivel adecuado. Somos conscientes de que, aunque sólo una minoría de estudiantes comprenderá el libro en su totalidad, los otros pueden estar interesados en adquirir una cierta intuición de las matemáticas que estudian.

Otra razón para incluir en el libro este tipo de material es que este texto puede servir de base para que profesores de departamentos de matemáticas que quieran dar cursos, o partes de cursos, especializados en aplicaciones a la economía. Además, si comparamos este libro con lo estándar para cálculo en algunos departamentos de matemáticas aplicadas, vemos que nosotros damos más explicaciones y demostraciones.

Agradecimientos

Nancy Halbin leyó cuidadosamente la versión preliminar e hizo una buena cantidad de observaciones valiosas. Ella también nos ha ayudado a corregir algunos errores embarazosos.

Arne Strøm nos ha ayudado de muchas formas con los macros de TEX, con las figuras, y con sus comentarios sustanciosos sobre el material.

Anders Høyer Berg ha comprobado las soluciones a la mayoría de los problemas y ha sugerido varias correcciones al texto.

Anders Fyhn ha hecho la mayoría de las figuras usando MG (Mathematical Graphics System, de Israel y Adams).

Agradecemos a Thorsten Hens, Uday Rajan, Mario Epelbaum, Susan Snyder y Reinhart John sus valiosas sugerencias que provienen de su experiencia de impartir cursos en Stanford y en Alemania usando versiones preliminares de este libro.

El Instituto de Economía de la Universidad de Oslo y los Departamentos de Economía del Instituto Universitario de Florencia y de la Universidad de Stanford han acogido a los autores. Nuestro trabajo ha sido más fácil gracias a la ayuda económica prestada por el Instituto de Economía de la Universidad de Oslo, el Instituto Universitario de Florencia y la Fundación Alexander von Humboldt.

Vaya nuestro agradecimiento a estas personas e instituciones así como a todas las que nos han ayudado a que este libro sea una realidad.

Peter Hammond y Knut Sydsæter

Kiel y Oslo, Febrero de 1994

N. del T. La traducción al español ha sido realizada en la Universidad de Sevilla, en la primavera de 1996

1

Introducción

El mundo económico es una región nebulosa.
Los primeros exploradores usaron visión no asistida.
La Matemática es el faro mediante el cual lo que antes
se veía tenue ahora surge con trazos firmes y marcados.
La vieja fantasmagoría[1] *desaparece.*
Vemos mejor. También es mayor el alcance de nuestra visión.
—*Irving Fisher* (1892)

1.1 POR QUÉ LOS ECONOMISTAS USAN LAS MATEMÁTICAS

La actividad económica ha sido parte integrante de la vida humana durante miles de años. La misma palabra "economía" viene del griego clásico y significa "gestión doméstica". Incluso antes de los griegos, había vendedores y mercaderes que mostraban comprensión de ciertos fenómenos económicos. Por ejemplo, sabían que una cosecha pobre implicaba un aumento de precio del maíz, pero que una escasez de oro provocaba una disminución de este precio. Durante muchos siglos los conceptos económicos más básicos se expresaban en términos sencillos, que requerían solamente una matemática rudimentaria. A los vendedores, mercaderes, agricultores y otros agentes económicos les bastaban conceptos como enteros y fracciones, junto con las cuatro reglas de la aritmética, para discutir y debatir las actividades y sucesos económicos que afectaban a sus vidas diarias. Con esas herramientas los mercaderes tenían suficiente para su contabilidad y para calcular los precios. Incluso los cálculos de intereses de los préstamos no revestían complicación. La aritmética bastaba para cumplir estas tareas, aun sin los conceptos de cero y de sistema de numeración decimal. Cuando se necesitaba un aparato para calcular, el ábaco tenía suficiente potencia.

La ciencia de la economía dio un giro en redondo en el siglo XVIII con la publicación de trabajos como el de David Hume, *Political Discourses* (1752), el *Tableau Economique* de François Quesnay (1758–1759), o *The Wealth of Nations* de Adam Smith (1776). Se empezaron a formalizar

[1]"Fantasmagoría" es un término inventado en 1802 para describir una exhibición de ilusiones ópticas producidas por una linterna mágica.

los razonamientos económicos y a desarrollarlos en teorías. Esto creó la necesidad de expresar interrelaciones e ideas, de complejidad creciente, de una manera automática. Hacia mitad del siglo XIX algunos autores comenzaron a usar las matemáticas para elaborar sus teorías. Entre los pioneros estaban economistas como Agustín Cournot (que fue el primero en definir y dibujar una curva de demanda y en usar el cálculo diferencial para resolver problemas de maximización en economía) y Léon Walras (que se distinguió por redactar y resolver el primer modelo multiecuacional para el equilibrio general de oferta y demanda en todos los mercados simultáneamente). Descubrieron que muchas de sus ideas se podían formular de forma más efectiva usando lenguaje matemático, que incluía símbolos algebraicos, diagramas y gráficos sencillos. En verdad, el uso del lenguaje matemático ha hecho posible la introducción de conceptos económicos mucho más sofisticados y de teorías económicas cada vez más complejas.

Hoy día es esencial para un estudiante de economía una comprensión sólida de las matemáticas. Aunque se pueden dar de forma clara, sin usar matemáticas, razonamientos convincentes de problemas económicos sencillos que impliquen dos o tres variables, si queremos considerar muchas variables y la forma como interaccionan, es necesario recurrir a un modelo matemático.

Por ejemplo, supongamos que un organismo gubernamental planea dar una gran cantidad de nuevos permisos de construcción en un terreno que controla. ¿Qué consecuencias tendrá esto para el empleo? En principio, la incidencia mayor estará en el sector de la construcción, debido a la creación de nuevos puestos de trabajo. Sin embargo, la construcción de casas nuevas requiere ladrillos, cemento, acero para refuerzos, madera, cristal y otros muchos materiales. Así debe crecer el empleo en las empresas de suministro de estos productos. Pero estas empresas necesitan, a su vez, materiales que fabrican otras, y así sucesivamente. Además de todos estos efectos de producción, el crecimiento del empleo conlleva el de los ingresos. Si éstos no son completamente absorbidos por los impuestos, se producirá una mayor demanda de bienes de consumo. Esto, a su vez, implicará una mayor necesidad de nuevos empleos entre los productores de bienes de consumo y, de nuevo, el flujo de datos de entrada crece. Al mismo tiempo hay respuestas del sistema. Por ejemplo, más ingresos generan más demanda de vivienda. De esta forma, tanto los cambios positivos como los negativos en un sector de la economía de transmiten a los otros.

La enseñanza de este ejemplo es que el sistema económico es tan complejo que los efectos finales son muy difíciles de calcular sin recurrir a dispositivos matemáticos formales tales como el "modelo de flujo circular de la renta". Un ejemplo es el modelo input-output que presentamos en la Sección 12.1.

Análisis matemático

El tema principal de este libro es una rama importante de las matemáticas que se llama **Análisis Matemático**. Incluye el cálculo diferencial e integral y sus extensiones. El cálculo se desarrolló al final del siglo XVII de la mano de Newton y Leibniz. Sus hallazgos transformaron completamente las matemáticas, la física y las ingenierías, inyectándoles una nueva vida. De forma análoga, la introducción del cálculo en economía ha cambiado radicalmente la forma en que los economistas analizan el mundo que les rodea. Ahora se usa el cálculo en muchas áreas diferentes de la economía. Por ejemplo, se usa para estudiar los efectos de las variaciones de precios relativos sobre la demanda, los efectos de la variación del precio o disponibilidad de una materia prima esencial como el petróleo en el proceso de producción, las consecuencias económicas del crecimiento de la población, y hasta qué punto se pueden reducir las emisiones de dióxido de carbono por la creación de un impuesto sobre el uso de la energía.

El siguiente episodio ilustra cómo los economistas usan el análisis matemático para resolver problemas prácticos. En febrero de 1953 se produjo en Holanda la inundación más importante de su historia. Los diques que protegían el país fueron arrasados y murieron más de 1.800 personas. Los

daños se cifraron en el 7% del producto nacional bruto de aquel año. Se creó una comisión de investigación sobre los hechos y sobre cómo prevenir desastres semejantes en el futuro. La reconstrucción de los diques de tal forma que la seguridad fuese total requería desembolsos astronómicos, y podía no ser factible. El problema real era, entonces, lograr una especie de compromiso, o equilibrio, entre costes y seguridad: diques más altos eran más costosos, pero reducían las posibilidades de futuras inundaciones. Por tanto, la comisión se enfrentó al problema de seleccionar la altura óptima de los diques. Algunos economistas aplicaron el *análisis coste-beneficio*, que es una rama de la economía que usa el análisis aatemático, para sopesar los costes y beneficios de las diferentes alternativas de reconstrucción de los diques. Se discutirá este problema con mayor detalle en el Problema 7 de la Sección 8.4.

Estos tipos de compromisos son centrales en economía. Conducen a problemas de optimización de un tipo que el análisis matemático maneja de forma natural.

1.2 EL MÉTODO CIENTÍFICO EN LAS CIENCIAS EMPÍRICAS

La economía se considera hoy día como una *ciencia empírica*. Estas ciencias participan de una metodología común, que incluye los siguientes como sus elementos más importantes:

1. Observaciones cualitativas y cuantitativas de los fenómenos, bien directamente o por experimentos cuidadosamente diseñados.
2. Procesamiento numérico y estadístico de los datos observados.
3. Construcción de modelos teóricos que describan los fenómenos observados y expliquen las relaciones entre ellos.
4. Uso de esos modelos teóricos para deducir predicciones.
5. Corrección y mejora de los modelos para que permitan mejores predicciones

Así las ciencias empíricas se asientan sobre procesos de *observación*, *modelización* y *verificación*. Si una actividad pretende ser considerada como una ciencia empírica, cada uno de los puntos anteriores es importante. Observaciones sin teoría producen un dibujo puramente descriptivo de la realidad, que carece de poder explicativo. Pero la teoría sin observación tiene el riesgo de perder el contacto con esa realidad que trata de explicar.

Muchos episodios de la historia de la ciencia demuestran el peligro de que la "pura teoría" carezca de fundamentos reales. Por ejemplo, hacia el año 350 A.C. Aristóteles desarrolló la teoría de que los objetos en caída libre tienen velocidad constante y que un objeto cae más rápidamente cuanto más pesado es. Esto fue refutado por Galileo Galilei de forma convincente en el siglo XVI cuando demostró (en parte dejando caer objetos desde la Torre Inclinada de Pisa) que, despreciando los efectos del rozamiento con el aire, la velocidad de caída de un objeto es proporcional al tiempo que lleva cayendo, y que la constante de proporcionalidad es la misma para todos los objetos, independientemente de su peso. Así la teoría aristotélica quedó desacreditada mediante observaciones empíricas.

Hay un segundo ejemplo, que procede de la astronomía. En el año 1800, Hegel dio un razonamiento filosófico para demostrar que sólo puede haber siete planetas en el sistema solar. No obstante Hegel, el asteroide Ceres (que es un octavo cuerpo planetario) fue descubierto en enero de 1801. Se descubrió Neptuno, el octavo planeta, en 1846 y en 1930, el noveno, Plutón. [2]

Vista a posteriori, parece elemental la falsedad de las afirmaciones de Aristóteles y Hegel. Sin embargo, en todas las ciencias hay aseveraciones falsas que se repiten una y otra vez y solamente

[2] El proceso del descubrimiento se basó en el estudio de cómo el movimiento de los planetas conocidos se desviaba de las órbitas previstas por la teoría de la gravitación de Newton. Estas perturbaciones permitían, incluso, predecir dónde se encontraba el planeta adicional que las producía. Hasta tiempos recientes los científicos estaban usando aún la teoría de Newton para buscar un décimo planeta cuya existencia sospechaban. Sin embargo, cálculos más exactos de las masas de los planetas exteriores parecen sugerir que no hay más planetas por descubrir, después de todo.

son refutadas más tarde. La corrección de teorías inexactas es una parte importante de la actividad científica, y los ejemplos anteriores prueban la necesidad de asegurarse de que los modelos teóricos estén apoyados por evidencia empírica.

En economía, las hipótesis son normalmente menos precisas que en las ciencias físicas y, por tanto, su eventual falsedad es menos evidente que las afirmaciones de Aristóteles y Hegel que acabamos de ver. Sin embargo, hay unas pocas viejas teorías que se han desacreditado tanto que pocos economistas las toman ahora en serio. Un ejemplo de ellas es la "curva de Phillips" que pretendía demostrar cómo una economía podía establecer un compromiso entre desempleo e inflación. La idea se basaba en que se podía crear empleo con recortes en los impuestos y/o aumento del gasto público, pero a costa de aumentar la inflación. Recíprocamente, se podía reducir la inflación aumentando los impuestos o reduciendo el gasto público, pero a costa de mayor desempleo.

A diferencia de Hegel, que no podía esperar contar todos los planetas, o de Aristóteles, que presumiblemente no observó jamás con atención la caída de un cuerpo, la curva de Phillips se basaba en una observación empírica. En un artículo publicado en 1958, A.W. Phillips estudió las medias de aumentos anuales de sueldos y el desempleo en la economía del Reino Unido en un largo periodo: 1861–1957. El dibujo de esas observaciones dio lugar a la curva de Phillips y el binomio inflación–desempleo formó parte de la economía convencional hasta la década de los setenta. Sin embargo, la década de elevada inflación y desempleo que experimentaron muchas economías occidentales en el periodo 1973–1982 produjo observaciones que estaban claramente fuera de la curva de Phillips. El pretendido compromiso inflación–desempleo fue muy difícil de mantener.

De la misma forma que las afirmaciones de Aristóteles y Hegel se revisaron a la luz de nuevas evidencias, el episodio anterior produjo una profunda revisión de la teoría en la que se basaba la curva de Phillips. Se sugirió que, conforme la población aprendía a vivir con la inflación, se ajustaban salarios y contratos de préstamos a las tasas de inflación previstas. Entonces, el compromiso entre paro e inflación que la curva de Phillips pretendía describir se sustituyó por uno nuevo, esta vez entre desempleo y desviación de la inflación de su tasa esperada. Pero la tasa esperada crece según sube la inflación actual. Por tanto, se pensó que la disminución del paro conduciría, no sólo a un aumento de la inflación, sino a acelerar la inflación que crecía en cada periodo en más de lo esperado. Por otra parte, cuando se podía esperar una inflación alta, el combatirla con políticas conducentes a aumentar el paro llevaría solamente a disminuciones graduales de la inflación, ya que las expectativas que la gente tiene sobre la inflación decaen lentamente. Así hubo que revisar y extender la teoría original de la curva de Phillips, a la luz de evidencias más recientes.

Modelos y realidad

En el siglo XVIII el filósofo Emmanuel Kant consideró la geometría euclídea como una descripción absolutamente cierta del espacio físico que observamos a través de nuestros sentidos. Esta concepción parecía evidente por sí misma y la compartían todos los que habían reflexionado sobre ello. La razón de este acuerdo radicaba en el hecho de que todos los resultados de esta geometría se podían deducir, mediante una lógica irrefutable, de unos pocos axiomas que eran considerados como verdades evidentes sobre el espacio físico. La primera persona que cuestionó este punto de vista fue el matemático alemán Gauss hacia principios del siglo XIX. Insistió en que la relación entre el espacio físico y el modelo de Euclides podía clarificarse solamente por métodos empíricos. Durante la década de 1820 se desarrolló la primera geometría no euclídea, esto es, una geometría basada en unos axiomas distintos de los de Euclides. Desde entonces se acepta que sólo las observaciones pueden decidir qué modelo geométrico suministra la mejor descripción del espacio físico.

Esto prueba que puede haber una diferencia importante entre un modelo matemático y sus posibles interpretaciones en la realidad. Más aún, puede ocurrir que haya más de un modelo capaz de describir un cierto fenómeno, como la relación entre la oferta monetaria y la inflación en EE.UU. o Alemania. Ciertamente, éste parece ser a menudo el caso en economía. En tanto que los modelos

a considerar son consistentes internamente, la mejor manera de seleccionar entre explicaciones que compiten entre sí consiste normalmente en ver cuál de ellas suministra la mejor descripción de la realidad. Pero esto es, a menudo, muy difícil, especialmente en economía.

Además, debemos reconocer que un modelo cuyo objetivo sea explicar un fenómeno como la inflación, no puede ser considerado nunca como una verdad absoluta; en el mejor de los casos es solamente una representación aproximada de la realidad. No podemos jamás considerar todos los factores que influyen en un fenómeno tan complejo. Si tratáramos de hacerlo, obtendríamos una teoría descorazonadoramente complicada. Esto es cierto no sólo para los modelos de los fenómenos físicos, sino para todos los modelos en las ciencias empíricas.

Estos comentarios son particularmente relevantes en la investigación económica. Consideremos, una vez más, los efectos de permitir la construcción de nuevas viviendas. Para entender todas las implicaciones de esto, un economista requeriría una cantidad increíble de datos sobre millones de consumidores, negocios, bienes y servicios, etcétera. Aún si se pudiera disponer de ellos con este nivel de detalle, su cantidad sobrepasaría las capacidades de los computadores más modernos. En sus intentos de entender las relaciones subyacentes al entramado económico, los economistas se ven forzados a usar varios tipos de datos agrupados, entre otras simplificaciones. Así debemos recordar siempre que un modelo es capaz solamente de dar una descripción aproximada de la realidad. El objetivo de los investigadores empíricos debería pasar por hacer que sus modelos reflejasen la realidad de la manera más fiel y exacta posible.

1.3 EL USO DE LOS SÍMBOLOS EN MATEMÁTICAS

Antes de comenzar a estudiar cualquier tema, es importante que todo el mundo se ponga de acuerdo en un "lenguaje" común con el que hablar de él. Análogamente, en el estudio de las matemáticas (que es un lenguaje en sí mismo en cierto sentido) es importante asegurarse de que todos entendemos lo mismo cuando vemos el mismo símbolo. Algunos símbolos en matemáticas representan casi siempre un objeto matemático definido. Unos ejemplos de esto son 3, $\sqrt{2}$, π, y $[0,1]$, que significan, respectivamente, tres números especiales y un intervalo cerrado. Los símbolos de este tipo se llaman *constantes lógicas*. Frecuentemente necesitamos también símbolos que representen **variables.** Los objetos que se supone que una variable representa se dice que forman su **dominio de variación**. Por ejemplo, usamos la letra x como un símbolo que representa a un número cuando escribimos

$$x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$$

Expresado en palabras esto dice lo siguiente:

> La diferencia entre el cuadrado del número que aquí se llama x y 16 es siempre igual al producto de los dos números que se obtienen sumando 4 al número y restando 4 de él.

La igualdad $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$ se llama una *identidad* porque es válida para todo x. En tales casos escribimos a veces $x^2 - 16 \equiv (x+4)(x-4)$, donde $\equiv$ es el símbolo de identidad.

El signo de igualdad $(=)$ se usa también de otras formas. Por ejemplo, escribimos que $A = \pi r^2$ es la fórmula del área A de un círculo de radio r. Además, el signo $=$ se usa en ecuaciones como

$$x^2 + x - 12 = 0$$

donde x es ahora el símbolo de un número desconocido. Si sustituimos x por varios números descubrimos que la igualdad no se verifica casi nunca. De hecho, la ecuación es cierta solamente para $x = 3$ y para $x = -4$, por consiguiente esos números se llaman sus *soluciones*.

Ejemplo 1.1

Un granjero tiene 1.000 metros de malla para cercar un terreno rectangular. Si un lado del rectángulo es x (medido en metros), hallar el área cercada cuando se hace x igual 150, 250, 350, y para un x general. ¿Qué valor de x cree el lector que encierra la mayor área posible?

Solución: Si el otro lado del rectángulo es y, entonces $2x+2y = 1.000$. Por tanto, $x+y = 500$, luego $y = 500-x$ (véase Figura 1.1) El área A de este rectángulo (en m^2) es, por consiguiente,

$$A = x(500 - x) = 500x - x^2$$

Puesto que ambos lados deben ser positivos, x debe ser positivo y $500 - x$ debe ser positivo. Esto significa que x debe estar entre 0 y 500 m. Las áreas, cuando $x = 150$, 250 y 350 valen $150 \cdot 350 = 52.500$, $250 \cdot 250 = 62.500$, y $350 \cdot 150 = 52.500$, respectivamente. De ellos, $x = 250$ da el mayor valor. En el Problema 7 de la Sección 3.1 pediremos demostrar que $x = 250$ da realmente la mayor área posible.

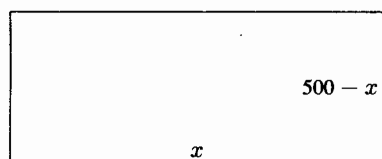


FIGURA 1.1

Cuando se estudian problemas que requieren varias variables (pero no demasiadas), designamos a éstas frecuentemente por letras distintas, como a, b, c, x, y, z, A, B, y así sucesivamente. A menudo se suplementan las letras del alfabeto latino con letras griegas mayúsculas y minúsculas, como α, β, γ, Γ, y Ω. Si crece el número de variables, usamos subíndices o superíndices para distinguir unas de otras. Por ejemplo, supongamos que estamos estudiando el empleo de un país que está dividido en 100 regiones, numeradas del 1 al 100. Así designamos por N_1 al número de personas con empleo en la región 1, por N_2 al de la región 2 y así sucesivamente. En general definimos

$$N_i = \text{número total de personas con empleo en la región } i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 100$$

La expresión $i = 1, 2, \ldots, 100$ significa que el índice i puede ser un número arbitrario entre 1 y 100. Si $N_{59} = 2.690$, esto significa que 2.690 personas tienen empleo en la región 59. Si queremos ir más lejos y dividir a los trabajadores en hombres y mujeres, podemos designar por $N_i^{(M)}$ ($N_i^{(H)}$) al número de mujeres (hombres) con empleo en la región i. Así debe ser $N_i^{(M)} + N_i^{(H)} = N_i$, para $i = 1, 2, \ldots, 100$. Obsérvese que esta notación es mucho más clara que si tuviéramos que usar 100 letras diferentes para representar a las variables N_i —¡incluso si pudiéramos encontrar 100 letras distintas en una combinación de los alfabetos latino, griego, cirílico y sánscrito!

Muchos estudiantes que están acostumbrados a manejar expresiones algebraicas en *una sola* variable (usualmente x) tienen dificultades al principio manejando expresiones en varias variables. Sin embargo, para los economistas, el ejemplo anterior demuestra lo importante que es tratar con expresiones y ecuaciones algebraicas en muchas variables distintas. Damos otro ejemplo.

Ejemplo 1.2

Consideramos el modelo macroeconómico sencillo

$$Y = C + \bar{I}, \quad C = a + bY \tag{1}$$

donde Y es el producto nacional neto, C es el consumo e $\bar{I}$ la inversión total, que se considera fija.[3] La tres letras $\bar{I}$, a y b, designan constantes numéricas positivas —por ejemplo, $\bar{I} = 100$, $a = 500$ y $b = 0{,}8$ son valores posibles de esas constantes. Más bien que pensar en dos modelos distintos, uno con $\bar{I} = 100$, $C = 500 + 0{,}8Y$ y otro con $\bar{I} = 150$, $C = 600 + 0{,}9Y$ es preferible considerarlos como un caso particular del modelo general (1), donde $\bar{I}$, a y b son desconocidos y pueden variar; usualmente se les llama **parámetros**. Sin embargo, debe diferenciárselos de las **variables** C e Y del modelo.

Después de estas consideraciones sobre constantes como parámetros del modelo, resolver (1) en Y.

Solución: Sustituyendo el valor $C = a + bY$ dado por la segunda ecuación de (1) en la primera, se obtiene

$$Y = a + bY + \bar{I}$$

Ahora se reordena esta ecuación de tal forma que los términos que contienen Y pasan al lado izquierdo. Se puede hacer esto añadiendo $-bY$ a ambos miembros, cancelando así el término bY de la derecha, para obtener

$$Y - bY = a + \bar{I}$$

Nótese que el miembro de la izquierda es igual a $(1-b)Y$, luego $(1-b)Y = a + \bar{I}$. Dividiendo ambos miembros por $1 - b$, de tal manera que el coeficiente de Y sea 1, se obtiene la respuesta, que es

$$Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b}\bar{I}$$

Esta solución nos da una fórmula que expresa Y en términos de los tres parámetros $\bar{I}$, a y b. Se puede aplicar la fórmula para valores particulares de las constantes, como $\bar{I} = 100$, $a = 500$, $b = 0{,}8$, para obtener la respuesta correcta en todos los casos. Nótese la potencia de esta forma de operar: se resuelve el modelo una única vez y se hallan las respuestas numéricas simplemente sustituyendo valores apropiados para los parámetros del modelo.

Problemas

1 (a) Una persona compra x_1, x_2 y x_3 unidades de tres productos cuyos precios unitarios son, respectivamente, p_1, p_2 y p_3. ¿Cuál es el gasto total?

(b) Un automóvil de alquiler cuesta F dólares al día de cuota fija y b dólares por kilómetro. ¿Cuánto paga un cliente que conduce x kilómetros en 1 día?

(c) Una compañía tiene costes fijos de F dólares por año y costes variables de c dólares por unidad producida. Hallar la expresión del coste total por unidad (coste total medio) que tiene la compañía si produce x unidades en un año.

(d) Una persona tiene un salario anual de L dólares y recibe un aumento del $p\%$ seguido de un segundo aumento del $q\%$. ¿Cuál es el nuevo salario anual de esta persona?

(e) Se pretende hacer una caja sin tapa a partir de una plancha cuadrada de estaño de 18 cm de lado cortando cuadrados iguales de lado x de cada esquina y doblando sobre las aristas. Hallar el volumen de la caja. (Dibujar una figura.)

---

[3] En economía se usa frecuentemente una barra sobre un símbolo para indicar que es fijo.

2 (a) Demostrar que

$$a + \frac{a \cdot p}{100} - \frac{\left(a + \frac{a \cdot p}{100}\right) \cdot p}{100}$$

se puede escribir en la forma

$$a\left[1 - \left(\frac{p}{100}\right)^2\right]$$

(b) Un objeto cuesta inicialmente 2.000$ y luego su precio aumenta un 5%. Más adelante el objeto se rebaja un 5%. ¿Cuál es el precio final?

(c) Un objeto cuesta inicialmente a dólares y luego su precio aumenta un $p\%$. Más adelante el objeto se rebaja un $p\%$ (del nuevo precio). ¿Cuál es el precio final? (Después de resolver este problema, véase la expresión de la parte (a).)

(d) ¿Qué resulta si primero *se rebaja* el precio en un $p\%$ y luego *se aumenta* en un $p\%$?

3 Resolver las siguientes ecuaciones en las variables que se indican:

(a) $x = \frac{2}{3}(y - 3) + y$ en y

(b) $ax - b = cx + d$ en x

(c) $AK\sqrt{L} = Y_0$ en L

(d) $px + qy = m$ en y

(e) $\dfrac{\frac{1}{1+r} - a}{\frac{1}{1+r} + b} = c$ en r

(f) $Y = a(Y - tY - k) + b + I_p + G$ en Y

4 La relación entre la temperatura medida en grados Celsius (o centígrados) (C) y Fahrenheit (F) está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

(a) Calcular C cuando F es 32; calcular F cuando $C = 100$.

(b) Hallar la expresión de F en términos de C.

(c) Un cierto día la temperatura en Oslo era de $40°F$, mientras que en Los Ángeles era de $80°F$. ¿Qué respondería el lector a la afirmación de que en Los Ángeles hacía el doble de calor que en Oslo? (*Indicación:* Hallar las dos temperaturas en grados Celsius.)

5 Si se extendiese una cuerda a lo largo de la superficie de la Tierra por el Ecuador, sería aproximadamente circular de una longitud de 40 millones de metros. Supongamos que queremos alargar la cuerda de tal manera que se eleve sobre el Ecuador 1 metro en cada punto. ¿Cuántos metros de cuerda necesitaríamos? (Trate el lector primero de intuir y luego halle la respuesta mediante un cálculo preciso. Véase la fórmula de la longitud de la circunferencia en el Apéndice D.)

Problemas avanzados

6 Resuélvase el siguiente par de ecuaciones simultáneas en x e y:

$$px + (1 - q)y = R \quad \text{y} \quad qx + (1 - p)y = S$$

7 Considérese un triángulo equilátero y sea P un punto arbitrario del triángulo. Sean h_1, h_2 y h_3 las distancias más cortas desde P a cada uno de los tres lados. Probar que la suma $h_1 + h_2 + h_3$ es independiente de donde esté colocado P en el triángulo. (Indicación: Calcular el área del triángulo como la suma de la de los tres triángulos.)

1.4 EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

Dios creó los enteros;
el resto es obra del hombre.
—L. Kronecker

Originariamente se introdujeron los números reales para medir características físicas como longitud, temperatura y tiempo. Los economistas los usan también para medir precios, cantidades, ingresos, tipos impositivos, tipos de interés y costes medios, entre otras cosas. Supondremos aquí que el lector tiene un cierto conocimiento del sistema de los números reales pero, debido a su papel fundamental, estudiaremos de nuevo sus propiedades básicas.

Números naturales, enteros y racionales

Los números que usamos cada día para contar son 1, 2, 3, ... Éstos son los llamados **números naturales.** Aunque resulten familiares, estos números son, en realidad, conceptos más bien abstractos y avanzados. La civilización cruzó un umbral significativo cuando captó la idea de que un rebaño de cuatro ovejas y una colección de cuatro piedras tiene algo en común: el carácter de "cuatro". Esta idea se representó por símbolos, como el primitivo :: (usado aún en el dominó o las cartas), el moderno 4 y el número romano IV. Esta noción de cuatro se vuelve a inventar cuando cada niño pequeño comienza a desarrollar sus habilidades matemáticas.

Durante los estadios iniciales de muchas culturas, los problemas diarios motivaron las cuatro reglas de la aritmética: adición, sustracción, multiplicación y división. Si se suman o multiplican dos números naturales se obtiene un número natural. En cambio, las operaciones de sustracción y división sugieren que se debe tener un cero ($4 - 4 = 0$), números negativos ($3 - 5 = -2$), y fracciones ($3 \div 5 = 3/5$). Los números $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ se llaman **enteros**. Se les puede representar sobre una **recta numérica** como la de la Figura 1.2.

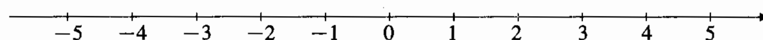


FIGURA 1.2 La recta numérica.

Los **números racionales** son aquellos que, como 3/5, se pueden escribir en la forma a/b, donde a y b son enteros. Un entero n es también un número racional, porque $n = n/1$. Son ejemplos de números racionales los siguientes:

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{11}{70}, \qquad \frac{125}{7}, \qquad -\frac{10}{11}, \qquad 0 = \frac{0}{1}, \qquad -19, \qquad -1{,}26 = -\frac{126}{100}$$

Se pueden representar también los números racionales sobre la recta numérica. Imaginemos que marcamos primero el número $1/2$ y todos sus múltiplos, luego $1/3$ y todos sus múltiplos y así sucesivamente. Se puede excusar al lector si piensa que, "al final" de todo este proceso, no quedará sitio en la recta para poner más puntos. Sin embargo, esto es completamente falso. Ya los antiguos griegos comprendieron que quedarían "agujeros" en la recta numérica después de representar sobre ella a todos los números racionales. Esto se demuestra en la construcción de la Figura 1.3.

El teorema de Pitágoras nos dice que $s^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, luego $s = \sqrt{2}$. Se puede probar que no hay dos enteros p y q tales que $\sqrt{2} = p/q$. Por tanto, $\sqrt{2}$ no es un número racional. (Euclides probó este resultado hacia el año 300 A.C., véase el Problema 3 en la Sección 1.6.)

Los números racionales son, por tanto, insuficientes para medir todas las longitudes posibles, más aún áreas y volúmenes. Podemos remediar esta deficiencia ampliando el concepto de número

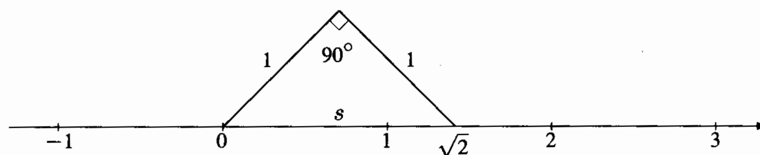


FIGURA 1.3

para incluir a los llamados **números irracionales**. Esta extensión se puede llevar a cabo de una forma natural usando la notación decimal para los números.

El sistema decimal

La manera en que la mayoría de la gente escribe hoy día los números se llama el **sistema decimal** o **sistema de base 10**. Se trata de un sistema de posición, con 10 como número base. Se puede escribir todo número natural usando sólo los símbolos 0, 1, 2, ..., 9, que se llaman **dígitos**. El lector notará que "dígito" proviene de la palabra latina "digitus", que significa "dedo", y que la mayoría de los humanos tienen 10 dedos. El sistema de posición define cada combinación de dígitos como una suma de dígitos por potencias de 10, por ejemplo,

$$1.996 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

Todo número natural se puede expresar en esa forma. Con el uso de los signos + y −, se pueden escribir todos los enteros, positivos o negativos, de la misma manera. La coma decimal nos permite expresar números racionales no enteros, como por ejemplo,

$$3{,}1415 = 3 + 1/10^1 + 4/10^2 + 1/10^3 + 5/10^4$$

Los números racionales que pueden escribirse usando sólo un número finito de cifras decimales se llaman **fracciones decimales finitas**.

Cada fracción decimal finita es un número racional, pero no todo número racional se puede expresar como una fracción decimal finita. Nos vemos obligados a considerar también **fracciones decimales infinitas** como

$$100/3 = 33{,}333\ldots$$

donde los puntos indican que el dígito 3 se repite indefinidamente.



Si la fracción decimal es un número racional, entonces será siempre **periódica** —esto es, hay un cierto lugar en la expresión decimal a partir del cual, o bien no hay más dígitos, o bien se repite indefinidamente una sucesión finita de ellos. Por ejemplo, $11/70 = 0{,}1\underbrace{571428}\underbrace{571428}5\ldots$.

Números reales

La definición de número real aparece como continuación de la discusión anterior. Definimos un **número real** como una fracción decimal arbitraria. Por tanto, un número real es de la forma $x = \pm m.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, donde m es un entero y α_n $(n = 1, 2\ldots)$ es una sucesión de dígitos cada uno en el valor 0 a 9. Acabamos de identificar las fracciones decimales periódicas con los números racionales. Aparte hay otros infinitos números representados por fracciones decimales no periódicas. A éstos se les llama los **números irracionales.** Como ejemplos están $\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, π, $2^{\sqrt{2}}$, y $0{,}12112111211112\ldots$.

En general ocurre que es muy difícil saber cuándo un número dado es racional o irracional. En el año 1776 se demostró que π es irracional y en 1927 que $2^{\sqrt{2}}$ lo es asimismo. Sin embargo quedaba aún por saber en 1993 si $2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{3}}$ era irracional o no. Se puede sacar la impresión de que hay relativamente pocos números irracionales. Pero esto es falso; en un cierto sentido, hay infinitamente más números irracionales que racionales.

Hemos dicho antes que cada número racional se puede representar como un punto de la recta numérica, pero no todos los puntos de ella representan números racionales. Los irracionales "rellenan" los huecos de la recta numérica, después de que se hayan marcado en ella los racionales. Así, un modelo satisfactorio de los números reales es una recta, sin extremos y sin agujeros, con un origen y una unidad de longitud. De esta forma decimos que hay una *correspondencia biunívoca* entre los números reales y los puntos de una recta numérica.

Se dice que los números racionales de un lado, y los irracionales de otro, son "densos" en la recta numérica. Esto significa que entre dos números reales distintos, por muy juntos que se encuentren, hay siempre un número racional y otro irracional —de hecho hay infinitos de cada clase.

Cuando las cuatro reglas de la aritmética se aplican a los números reales, el resultado es siempre un número real. La única excepción es que no se puede dividir por 0.

$$\frac{a}{0} \text{ no está definido para ningún número real } a$$

Esto es muy importante y no debe confundirse con $0/a = 0$, para todo $a \neq 0$. Nótese en particular que $0/0$ no está definido. Por ejemplo, si un automóvil necesita 60 litros de combustible para recorrer 600 kilómetros, entonces el consumo es de $60/6 = 10$ litros cada 100 kilómetros. Sin embargo, si nos dicen que un automóvil necesita 0 litros de gasolina para recorrer 0 kilómetros, no sabemos nada sobre el consumo; 0/0 no está definido.

Desigualdades

En matemáticas, y especialmente en economía, se encuentran desigualdades casi tan frecuentemente como igualdades. Por tanto, es importante saber y entender las reglas de cálculo con desigualdades. Se dan éstas en la Sección A.7 del Apéndice A. El ejemplo siguiente tiene interés en estadística.

Ejemplo 1.3

Probar que, si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \tag{1.1}$$

Solución: (Se aconseja al lector que ensaye unas pocas veces, para ver si esta desigualdad se verifica, eligiendo algunos números concretos y usando una calculadora.) Para demostrar la desigualdad basta comprobar que $ab \leq (a+b)^2/4$ porque la raíz cuadrada del miembro de la izquierda no puede exceder la del de la derecha —esto es, $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$. Para demostrar eso basta probar que la diferencia entre el miembro de la derecha y el de la izquierda es no negativa. Así,

$$\frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$$

Nótese que se puede usar la misma demostración para probar que $\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b)$ a menos que $a = b$.

El número $\frac{1}{2}(a+b)$ se llama la **media aritmética** de a y b, y $\sqrt{ab}$ se llama la **media geométrica**. ¿Qué dice de estas medias la igualdad (1.1)?

Intervalos

Si a y b son dos números de la recta numérica, el conjunto de los números que están entre a y b se llama un **intervalo**. En muchas situaciones es importante distinguir entre intervalos que incluyen sus extremos e intervalos que no los incluyen. Cuando $a < b$, hay cuatro intervalos distintos, todos con extremos a y b, como se ve en la Tabla 1.1. Nótese que los nombres de la tabla no distinguen $[a, b)$ de $(a, b]$. Si quisiéramos hacerlo deberíamos hablar de intervalos "cerrados a izquierda", "abiertos a derecha", y así sucesivamente. Nótese asimismo que un intervalo abierto no incluye ninguno de sus extremos; en cambio, uno cerrado incluye a los dos. Los cuatro intervalos tienen sin embargo la misma longitud, a saber $b - a$.

TABLA 1.1

Notación	*Nombre*	*El intervalo consta de todos los x que verifican:*
(a, b)	*Intervalo* **abierto**	$a < x < b$
$[a, b]$	*Intervalo* **cerrado**	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	*Intervalo* **semi-abierto**	$a < x \leq b$
$[a, b)$	*Intervalo* **semi-abierto**	$a \leq x < b$

Normalmente los intervalos se representan sobre la recta numérica como en la Figura 1.4, donde extremos incluidos están representados por puntos gruesos y extremos no incluidos, por puntas de flechas.

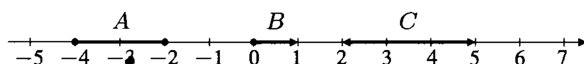


FIGURA 1.4 $A = [-4, -2]$, $B = [0, 1)$ y $C = (2, 5)$.

Los intervalos que hemos mencionado son todos *intervalos acotados*. Pero también usamos la palabra "intervalo" para designar a ciertos conjuntos no acotados de números. Por ejemplo, tenemos

$$[a, \infty) = \text{todos los números } x, \text{ tales que } x \geq a$$
$$(-\infty, b) = \text{todos los números } x, \text{ tales que } x < b$$

donde ∞ es el símbolo usual para el infinito. Nótese que el símbolo ∞ no es en absoluto un número y, por tanto, las cuatro reglas de la aritmética no valen para él. En $[a, \infty)$, el símbolo ∞ es solamente una notación útil, que significa que estamos considerando el conjunto de *todos* los números mayores o iguales que a, sin limitación del tamaño del número. Ya debe ser evidente de lo anterior lo que llamamos (a, ∞) y $(-\infty, b]$. A veces se denota al conjunto de todos los números reales por el símbolo $(-\infty, \infty)$.

Valor absoluto

Sea a un número real e imagínese su posición sobre la recta numérica. Se llama **valor absoluto** de a a la distancia de a a 0. Si a es positivo o 0, el valor absoluto es el mismo a; si a es negativo, el valor absoluto es el número positivo $-a$, puesto que la distancia debe ser positiva.

El **valor absoluto** de a se designa por $|a|$ y

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Por ejemplo, $|13| = 13$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|-1/2| = 1/2$, y $|0| = 0$.

Nota: Es un error muy común suponer que a debe designar a un número positivo, aun cuando no se haya dicho explícitamente. Análogamente, al ver $-a$, muchos estudiantes creen que esta expresión es siempre negativa. Obsérvese, sin embargo, que el número $-a$ es positivo cuando a es negativo. Por ejemplo, si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$. No obstante lo anterior, es un convenio útil en economía definir variables cuyos valores sean positivos más bien que negativos. Allí donde una variable tenga un signo definido, trataremos de seguir este convenio.

Ejemplo 1.4

(**a**) Calcular $|x - 2|$ para $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$.

(**b**) Escribir $|x - 2|$ de otra forma usando (1.2).

Solución:

(**a**) Para $x = -3$,

$$|x - 2| = |-3 - 2| = |-5| = 5$$

Para $x = 0$,

$$|x - 2| = |0 - 2| = |-2| = 2$$

Para $x = 4$,

$$|x - 2| = |4 - 2| = |2| = 2$$

(b) Según (1.2), $|x-2| = x-2$ si $x-2 \geq 0$, esto es si $x \geq 2$. Sin embargo, $|x-2| = -(x-2) = 2-x$ si $x-2 < 0$, esto es si $x < 2$. Por tanto,

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ 2-x, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

(Compruébese esta solución ensayando los valores de x que usamos en la parte (a).)

Sean x_1 y x_2 dos números arbitrarios. La **distancia** entre x_1 y x_2 en la recta numérica es igual a $x_1 - x_2$ si $x_1 \geq x_2$ y a $-(x_1 - x_2)$ si $x_1 < x_2$. Tenemos, por tanto,

$$|x_1 - x_2| = \text{distancia entre } x_1 \text{ y } x_2 \text{ en la recta numérica.} \tag{1.3}$$

En la Figura 1.5, hemos resaltado geométricamente que la distancia entre 7 y 2 es 5, mientras que la distancia entre -3 y -5 es igual a 2 porque $|-3-(-5)| = |-3+5| = |2| = 2$.

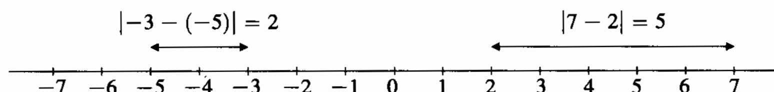


FIGURA 1.5 La distancia entre 7 y 2, y entre −3 y −5.

Supongamos que $|x| = 5$. ¿Qué valores puede tener x? Hay sólo dos posibilidades: $x = 5$ o $x = -5$, porque ningún otro número tiene valor absoluto igual a 5. Generalmente, si a es mayor o igual que 0, entonces $|x| = a$ equivale a que $x = a$ ó $x = -a$. La ecuación $|x| = a$ no tiene solución cuando $a < 0$ porque $|x| \geq 0$ para todo x.

Si a es positivo y $|x| < a$, la distancia de x a 0 es menor que a y así

$$|x| < a \text{ equivale a } -a < x < a \tag{1.4}$$

Más aún, si a es no negativo, está claro que

$$|x| \leq a \text{ equivale a } -a \leq x \leq a \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.5

Hallar todos los x tales que $|3x-2| \leq 5$. Compruébese primero si esta desigualdad se cumple para $x = -3$, $x = 0$, $x = 7/3$ y $x = 10$.

Solución: Para $x = -3$, $|3x-2| = |-9-2| = 11$; para $x = 0$, $|3x-2| = |-2| = 2$; para $x = 7/3$, $|3x-2| = |7-2| = 5$ y para $x = 10$, $|3x-2| = |30-2| = 28$. Vemos, por tanto, que la desigualdad dada se verifica para $x = 0$ y $x = 7/3$, pero no para $x = -3$ ó $x = 10$.

De (1.5) deducimos que $|3x-2| \leq 5$ equivale a $-5 \leq 3x-2 \leq 5$. Sumando 2 a los tres miembros obtenemos $-5+2 \leq 3x-2+2 \leq 5+2$, ó $-3 \leq 3x \leq 7$. Dividiendo por 3 se tiene $-1 \leq x \leq 7/3$.

Problemas

1 ¿Cuáles de los siguientes números son naturales, enteros, o racionales?

(a) 3,1415926 (b) $\sqrt{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}$ (c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ (d) $3\pi-\frac{1}{4}$

2 ¿Cuáles de los enunciados siguientes son correctos?

(a) 1.996 es un número natural. (b) -5 está a la derecha de -3 en la recta numérica.
(c) -13 es un número natural. (d) No hay ningún número natural que no sea racional.
(e) 3,1415 no es racional. (f) La suma de dos números irracionales es irracional.

3 ¿Para qué números reales x está definida cada una de las expresiones siguientes?

(a) $\dfrac{3}{x-4}$ (b) $\dfrac{x-1}{x(x+2)}$ (c) $\dfrac{3x}{x^2+4x-5}$ (d) $\dfrac{1/4}{x^2+4x+4}$

4 Resolver en y las desigualdades siguientes, en términos de la(s) otra(s) variable(s):

(a) $3x+4y\le 12$ (b) $-x+3y-z>y-(x-y)+\frac{1}{2}z$ (c) $px+qy\le m \quad (q>0)$

5 Considérese el Problema 1(c) de la Sección 1.3. Encontrar una desigualdad que determine cuántas unidades x debe producir la compañía antes de que el coste medio caiga por debajo de q dólares. Resuélvase la desigualdad en x. Tómese $F = 100.000$, $c = 120$, $q = 160$, y resuélvase el problema en este caso.

6 Calcular $|2x-3|$, para $x = 0$, $1/2$ y $7/2$.

7 (a) Calcular $|5-3x|$, para $x=-1$, 2 y 4.
(b) Resolver la ecuación $|5-3x|=0$.
(c) Escribir de otra forma $|5-3x|$ usando (1.2).

8 Determinar x de forma que

(a) $|3-2x|=5$ (b) $|x|\le 2$ (c) $|x-2|\le 1$
(d) $|3-8x|\le 5$ (e) $|x|>\sqrt{2}$ (f) $|x^2-2|\le 1$

9 Hay que cortar una varilla de hierro de 5 metros de longitud. Se necesita que la longitud no se desvíe más de 1 mm de lo planeado. Escribir una especificación para la longitud x de la varilla en metros: (a) usando una doble desigualdad y (b) usando el símbolo de valor absoluto.

1.5 ALGUNOS ASPECTOS DE LÓGICA

Un astrónomo, un físico y un matemático viajaban en un tren por Escocia. Vieron por la ventana un rebaño de ovejas que pastaban en un prado. El astrónomo observó: "En Escocia todas las ovejas son negras." El físico protestó: "Algunas ovejas de Escocia son negras." El matemático declaró: "En Escocia existe un rebaño de ovejas, todas las cuales son negras al menos de un lado."

Hemos puesto de relieve el papel de los modelos matemáticos en las ciencias empíricas, especialmente en economía. Cuanto más complicados son los fenómenos que hay que describir, más importante es ser exactos. Los errores en modelos aplicados a situaciones prácticas pueden tener consecuencias catastróficas. Por ejemplo, en los primeros estadios del programa espacial americano hubo

que destruir un misil valorado en varios millones de dólares, segundos después de su lanzamiento, solamente porque faltaba un punto y coma en el programa de computador diseñado para guiarlo.

Aunque las consecuencias pueden ser menos dramáticas, aparecen fácilmente errores en el razonamiento matemático. Vamos a dar un ejemplo de cómo un estudiante (o un profesor) puede usar un razonamiento incorrecto y así obtener una respuesta errónea a un problema.

Ejemplo 1.6

Hallar una solución de la ecuación $x + 2 = \sqrt{4 - x}$.

"Solución": Elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene $(x + 2)^2 = (\sqrt{4 - x}\,)^2$, y así $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$. Reordenando se tiene $x^2 + 5x = 0$. Simplificando por x queda $x + 5 = 0$, luego $x = -5$.

Según este razonamiento, la respuesta debe ser $x = -5$; comprobémoslo. Para $x = -5$ tenemos $x + 2 = -3$. Pero $\sqrt{4 - x} = \sqrt{9} = 3$, luego la respuesta es incorrecta. En el ejemplo 1.9 explicaremos dónde está el error. (Nótese que es prudente comprobar la respuesta al resolver una ecuación.)

Este ejemplo pone de relieve los peligros del cálculo rutinario sin una reflexión adecuada. Puede ser más fácil evitar errores semejantes después de estudiar la estructura del razonamiento lógico.

Proposiciones

Las afirmaciones que son ciertas o falsas se llaman enunciados o **proposiciones.** La mayor parte de las proposiciones de este libro son matemáticas, pero otras pueden provenir de la vida diaria. "Todos los individuos que respiran están vivos" es un ejemplo de una proposición cierta, mientras que "todos los individuos que respiran están sanos" es un ejemplo de una proposición falsa. Nótese que si las palabras que se usan para expresar estas afirmaciones carecen de sentido preciso, será a menudo difícil distinguir entre una proposición verdadera y una falsa.

Supongamos que una afirmación tal como "$x^2 - 1 = 0$" incluye una o más variables. Sustituyendo la variable x por varios números reales, podemos generar muchas proposiciones diferentes, algunas ciertas y otras falsas. Por esta razón decimos que la afirmación es una **proposición abierta.** De hecho, la proposición $x^2 - 1 = 0$ es cierta si $x = 1$ ó -1, pero es falsa en cualquier otro caso. Así, una proposición abierta no es simplemente verdadera o falsa. No es ni lo uno ni lo otro hasta que no elegimos un valor particular de la variable. En la práctica descuidamos un poco el distinguir una proposición de una proposición abierta: llamamos proposiciones a los dos tipos.

Implicaciones

Para llevar el control de cada paso de un razonamiento lógico es práctico usar las flechas de implicación.

Supongamos que P y Q son dos proposiciones tales que, cuando P es cierta, Q lo es necesariamente. En este caso escribimos

$$P \implies Q \qquad (*)$$

que se lee "P implica Q", o "si P, entonces Q", o "Q es consecuencia de P". El símbolo $\implies$ es una **flecha de implicación,** y apunta a la dirección de la implicación lógica. Damos algunos ejemplos de implicaciones verdaderas.

Ejemplo 1.7

(**a**) $x > 2 \implies x^2 > 4$.

(**b**) $xy = 0 \implies x = 0$ ó $y = 0$.

(**c**) x es un cuadrado $\implies$ x es un rectángulo.

(**d**) x es una persona sana $\implies$ x respira.

Nótese que la palabra "o" significa en matemáticas el "o inclusivo", lo que quiere decir que "P ó Q" significa "o P, o Q, o ambas".

Todas las proposiciones del ejemplo 1.7 son proposiciones abiertas, como la mayoría de las que encontramos en matemáticas. Una implicación $P \implies Q$ significa que, para cada valor de una variable para el que P es verdadera, Q lo es también.

En algunos casos en que la implicación $(*)$ es válida, puede deducirse la conclusión lógica en la otra dirección:

$$Q \implies P$$

En estos casos, podemos escribir ambas implicaciones juntas en una única **equivalencia lógica**:

$$P \iff Q$$

En este caso decimos que "P es equivalente a Q", o "P si y sólo si Q." Nótese que el enunciado "P sólo si Q" expresa la implicación $P \implies Q$, mientras que "P si Q" expresa $Q \implies P$.

El símbolo $\iff$ es una **flecha de equivalencia.** En el ejemplo 1.7 anterior vemos que se puede sustituir la implicación de (b) por una equivalencia, porque también es cierto que $x = 0$ ó $y = 0$ implica $xy = 0$. Nótese que no se puede sustituir ninguna otra implicación de ese ejemplo por una equivalencia. En efecto, de que x^2 sea mayor que 4 no se deduce que x sea mayor que 2 (por ejemplo $x = -3$). Asimismo, un rectángulo no tiene por qué ser un cuadrado. Finalmente, el hecho de que una persona x respire no significa que esté sana.

Condiciones necesarias y suficientes

Hay otras maneras que se usan frecuentemente para expresar que la proposición P implica la proposición Q, o que P es equivalente a Q. Así, si P implica Q, decimos que P es una "condición suficiente" para Q. Después de todo, para que Q sea verdadera, es suficiente que P lo sea. De manera análoga, sabemos que si P se verifica, entonces es cierto que Q también se verifica. En este caso decimos que Q es una "condición necesaria" para P. De hecho, Q debe ser necesariamente cierta si P lo es. Por tanto,

> P es una **condición suficiente** para Q significa: $P \implies Q$
> Q es una **condición necesaria** para P significa: $P \implies Q$

Por ejemplo, si formulamos la implicación del ejemplo 1.7 (c) en este lenguaje, se tendría:

Una condición necesaria para que x sea un cuadrado es que x sea un rectángulo.

o

Una condición suficiente para que x sea un rectángulo es que x sea un cuadrado.

La expresión verbal correspondiente a $P \iff Q$ es: P *es una condición necesaria y suficiente para* Q, o P *si y sólo si* Q. De lo anterior resulta evidente que es muy importante distinguir entre las pro-

posiciones "P es una condición necesaria para Q" (que significa $Q \Longrightarrow P$) y "P es una condición suficiente para Q" (que significa $P \Longrightarrow Q$). Para poner de relieve la cuestión, considérense las dos proposiciones siguientes:

1. Respirar es una condición necesaria para que una persona esté sana.
2. Respirar es una condición suficiente para que una persona esté sana.

Evidentemente la proposición 1 es cierta. En cambio, la 2 es falsa porque un enfermo (vivo) respira. En las páginas siguientes incluiremos una y otra vez condiciones necesarias y suficientes. El entenderlas y entender las diferencias entre ellas es una condición necesaria para comprender el análisis económico. Desgraciadamente no es una condición suficiente.

Resolución de ecuaciones

Damos ahora unos ejemplos de cómo el uso de flechas de implicación y equivalencia puede ayudar a evitar errores al resolver ecuaciones como la del ejemplo 1.6.

Ejemplo 1.8

Hallar todos los x tales que $(2x-1)^2 - 3x^2 = 2\left(\frac{1}{2} - 4x\right)$.

Solución: Desarrollando ambos miembros obtenemos una nueva ecuación que tiene, evidentemente, las mismas soluciones que la dada:

$$(2x-1)^2 - 3x^2 = 2\left(\tfrac{1}{2} - 4x\right) \iff 4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 = 1 - 8x$$

Sumando $8x - 1$ a ambos lados de la segunda igualdad y reduciendo términos semejantes se obtiene la expresión equivalente

$$4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 = 1 - 8x \iff x^2 + 4x = 0$$

Ahora bien, $x^2 + 4x = x(x+4)$, y el segundo miembro es 0 si y sólo si $x = 0$ ó $x + 4 = 0$. Esto es,

$$x^2 + 4x = 0 \iff x(x+4) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ó} \quad x + 4 = 0 \iff x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -4$$

Resumiendo, hemos construido una cadena de equivalencias que prueba que la ecuación dada se satisface para los dos valores $x = 0$ y $x = -4$, y sólo para ellos. Esto es,

$$(2x-1)^2 - 3x^2 = 2(\frac{1}{2} - 4x) \iff x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -4$$

Ejemplo 1.9

Hallar todos los x tales que $x + 2 = \sqrt{4-x}$ (véase Ejemplo 1.6).

Solución: Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación se obtiene

$$(x+2)^2 = (\sqrt{4-x}\,)^2$$

Consecuentemente, $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$, esto es, $x^2 + 5x = 0$. De la última ecuación se deduce que

$$x(x+5) = 0$$

lo que implica que $x = 0$ ó $x = -5$. Así, una condición necesaria para que x sea una raíz de $x + 2 = \sqrt{4-x}$ es que $x = 0$ ó $x = -5$. Sustituyendo x en la ecuación dada por cada uno de los dos valores posibles se ve que sólo $x = 0$ verifica la ecuación. Así la ecuación tiene una única solución, que es $x = 0$.

Al buscar la solución al Ejemplo 1.9, ¿por qué era necesario comprobar si los valores que hallábamos daban soluciones, mientras que este paso no era necesario en el Ejemplo 1.8? Para responder a esto debemos analizar la estructura lógica de nuestra solución al Ejemplo 1.9. Ayudándonos con flechas numeradas de implicación y equivalencia, podemos expresar la solución anterior así:

$$x+2=\sqrt{4-x} \overset{(1)}{\Longrightarrow} (x+2)^2=4-x \overset{(2)}{\Longrightarrow} x^2+4x+4=4-x \overset{(3)}{\Longrightarrow} x^2+5x=0$$
$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} x(x+5)=0 \overset{(5)}{\Longrightarrow} x=0 \text{ ó } x=-5$$

La implicación (1) es cierta (porque $a=b \Longrightarrow a^2=b^2$ y $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$). *Es importante observar que no se puede sustituir esta implicación por una equivalencia.* Si $a^2=b^2$ entonces, bien $a=b$ ó $a=-b$; no es necesariamente cierto que $a=b$. Las implicaciones (2), (3), (4) y (5) son también ciertas; más aún, todas ellas son equivalencias, aunque esto no sea necesario para hallar la solución. Hemos obtenido, por tanto, una cadena de implicaciones que van de la ecuación $x+2=\sqrt{4-x}$ a la proposición "$x=0$ ó $x=-5$". Puesto que la implicación (1) no se puede invertir, no hay una cadena de implicaciones en la dirección opuesta. Así hemos comprobado que si el número x verifica $x+2=\sqrt{4-x}$, entonces x debe ser 0 ó -5; ningún otro valor puede verificar la ecuación dada. Sin embargo, aún no hemos probado que 0 ó -5 verifiquen realmente la ecuación. Hasta que no sustituyamos, en la ecuación, x por 0 y -5, no podremos ver que solamente $x=0$ es una solución. *Nótese que, en este caso, el test que hemos propuesto no sólo sirve para comprobar nuestros cálculos, sino también su necesidad lógica.*

Volviendo al Ejemplo 1.6, vemos ahora que cometimos dos errores. En primer lugar, la implicación $x^2+5x=0 \Rightarrow x+5=0$ es falsa porque $x=0$ es también una solución de $x^2+5x=0$. En segundo lugar, es lógicamente necesario comprobar si 0 ó -5 verifican realmente la ecuación.

El método que hemos usado para resolver el Ejemplo 1.9 es el más común. Se establece una cadena de implicaciones que comienza en la ecuación dada y acaba en un conjunto de soluciones posibles de ella. Comprobando cada una de estas soluciones encontramos cuáles verifican realmente la ecuación. Aun si la cadena de implicaciones es una cadena de equivalencias (como en el Ejemplo 1.8), esta comprobación es un test útil de la validez, no sólo de los cálculos, sino de la lógica.

Problemas

1 Las implicaciones y equivalencias se pueden expresar de formas que difieren de las ya mencionadas. Usar flechas de implicación o equivalencia para marcar en qué dirección cree el lector que van las conclusiones lógicas en las siguientes proposiciones:

(a) La ecuación $2x-4=2$ se verifica sólo cuando $x=3$.

(b) Si $x=3$, entonces $2x-4=2$.

(c) La ecuación $x^2-2x+1=0$ se satisface si $x=1$.

(d) Si $x^2>4$, entonces $x>2$ ó $x<-2$ y recíprocamente.

2 Considérense las seis implicaciones siguientes y decídase en cada caso: (i) si la implicación es cierta y (ii) si la implicación contraria es cierta. (x, y, z son números reales.)

(a) $x=2$ e $y=5 \Longrightarrow x+y=7$

(b) $(x-1)(x-2)(x-3)=0 \Longrightarrow x=1$

(c) $x^2+y^2=0 \Longrightarrow x=0$ ó $y=0$

(d) $x=0$ e $y=0 \Longrightarrow x^2+y^2=0$

(e) $xy=xz \Longrightarrow y=z$

(f) $x>y^2 \Longrightarrow x>0$

3 Considérese la proposición $2x+5\geq 13$.

(a) ¿Es $x\geq 0$ una condición necesaria, suficiente, o necesaria y suficiente para que la proposición sea cierta?

(b) Responder a la misma pregunta cuando se sustituye $x \geq 0$ por $x \geq 50$.

(c) Responder a la misma pregunta cuando se sustituye $x \geq 0$ por $x \geq 4$.

4 Resolver la ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-1)} + \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} - 2\frac{3x+1}{x^2-1} = 0$$

5 Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$ (b) $|x + 2| = \sqrt{4 - x}$ (c) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

6 Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $\sqrt{x-4} = \sqrt{x+5} - 9$ (b) $\sqrt{x-4} = 9 - \sqrt{x+5}$

7 Rellenar las casillas con "si y sólo si" cuando el resultado sea un enunciado cierto o, en otro caso, con "si" o "sólo si."

(a) $x = \sqrt{4}$ ☐ $x = 2$

(b) $x^2 > 0$ ☐ $x > 0$

(c) $x^2 < 9$ ☐ $x < 3$

(d) $x(x^2 + 1) = 0$ ☐ $x = 0$

(e) $x(x + 3) < 0$ ☐ $x > -3$

8 Considérese el siguiente intento de resolver la ecuación $x + \sqrt{x+4} = 2$:

"De la ecuación dada se deduce que $\sqrt{x+4} = 2 - x$. Elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene $x + 4 = 4 - 4x + x^2$. Después de simplificar se ve que esta ecuación implica que $x^2 - 5x = 0$. Cancelando x, obtenemos $x - 5 = 0$ y esta ecuación se verifica cuando $x = 5$."

(a) Escribir en forma de flechas las implicaciones o equivalencias del razonamiento anterior. ¿Cuáles son correctas?

(b) Resolver correctamente la ecuación.

9 Enunciar la negación de cada una de las 6 proposiciones siguientes, de la forma más simple posible.

(a) $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(b) Todo x verifica $x \geq a$.

(c) Ni x ni y es menor que 5.

(d) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que se verifica B.

(e) Nadie puede evitar que le gusten los gatos.

(f) Cada uno ama a alguien algunas veces.

10 "El Tribunal Supremo no admite a trámite el recurso a una decisión de un tribunal inferior, en la que se aprueba el rechazo de un juez a permitir que un acusado se niegue a hablar". ¿Tiene el acusado derecho a negarse a hablar?

1.6 DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

En ciencia, lo que se puede probar no debe ser creído sin demostración.[4]
—*R. Dedekind* (1887)

Los resultados más importantes de cualquier rama de las matemáticas se llaman **teoremas.** La construcción de demostraciones lógicamente válidas de estos resultados puede ser, a menudo, complicada. Por ejemplo, el "Teorema de los cuatro colores" dice que cualquier mapa plano puede ser coloreado con cuatro colores, a lo más, de tal manera que regiones contiguas tengan colores distintos. La demostración necesita la comprobación de cientos de millares de casos distintos, una tarea que sólo es posible con la ayuda de un complicado programa de computador.

En este libro omitimos a menudo las demostraciones formales de los teoremas. En su lugar ponemos el énfasis en indicar cómo se puede captar de forma intuitiva lo que los teoremas nos dicen. Sin embargo, aunque las demostraciones no constituyen una parte importante de este libro, es útil entender algo sobre los distintos tipos de demostración que se usan en matemáticas. De hecho, una demostración que es legible se basa, hasta cierto punto, en la intuición del lector. Aunque muchos lógicos matemáticos se toman la molestia de escribir cada paso y cada razonamiento (y esto puede ser una técnica necesaria para programar computadores para que comprueben demostraciones) el resultado suele ser algo ilegible para la mayoría de la gente.

Todo teorema matemático se puede formular como una implicación

$$P \Longrightarrow Q \tag{$*$}$$

donde P representa una o varias proposiciones, llamadas *premisas* ("lo que sabemos"), Q representa una o varias proposiciones que se llaman las *conclusiones* ("lo que queremos saber"). Se puede considerar a un enunciado de la forma $P \iff Q$ como dos teoremas.

Normalmente es más natural demostrar un resultado del tipo $(*)$ empezando en las premisas P y procediendo sucesivamente hasta la conclusión Q. Esta técnica se llama una **demostración directa**. Sin embargo, a veces hay que dar una **demostración indirecta** de la implicación $P \Longrightarrow Q$. En este caso partimos de que Q no es cierta y, sobre esta base, probamos que P tampoco puede ser cierta. Esto es absolutamente legítimo porque se tiene la siguiente equivalencia:

$$P \Longrightarrow Q \quad \text{es equivalente a} \quad \text{no } Q \Longrightarrow \text{no } P \tag{1.6}$$

Es útil ver cómo esta regla de la lógica se aplica a algunos ejemplos concretos:

Si llueve, la hierba se moja

afirma exactamente lo mismo que

Si la hierba no se moja, entonces no llueve.

Si T designa a un triángulo, entonces

La igualdad de ángulos en la base de T implica que T es isósceles

afirma exactamente lo mismo que

Si T no es isósceles, entonces sus ángulos en la base son distintos.

Hay un tercer método de demostración que es útil a veces. Se llama **demostración por contradicción**. Se basa en un principio lógico fundamental: es imposible que una cadena de inferencias válidas vaya de una proposición verdadera a una falsa. Por tanto, si tenemos una proposición R

[4] Damos la frase original en alemán: "Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden."

y deducimos una contradicción de la suposición de que R sea falsa, se deduce que R debe ser verdadera.

Ejemplo 1.10

Usar tres métodos distintos para probar que

$$-x^2 + 5x - 4 > 0 \Longrightarrow x > 0$$

Solución:

(a) *Demostración directa:* Supongamos que $-x^2 + 5x - 4 > 0$. Sumando $x^2 + 4$ a cada miembro de la desigualdad se tiene $5x > x^2 + 4$. Puesto que $x^2 + 4 \geq 4$, para todo x, tenemos que $5x > 4$, y así $x > 4/5$. En particular, $x > 0$.

(b) *Demostración indirecta:* Supongamos que $x \leq 0$. Entonces $5x \leq 0$ y así $-x^2 + 5x - 4$ es ≤ 0 por ser la suma de tres números no positivos.

(c) *Demostración por contradicción:* Supongamos que el enunciado no es cierto. Entonces tiene que existir un x tal que $-x^2 + 5x - 4 > 0$ y $x \leq 0$. Pero si $x \leq 0$, entonces $-x^2 + 5x - 4 \leq -x^2 - 4 \leq -4$, y así hemos llegado a una contradicción.

Razonamientos deductivo e inductivo

Los tres métodos de demostración que acabamos de describir someramente son ejemplos de *razonamiento deductivo*, esto es, razonamiento basado en reglas lógicas. Por otra parte, muchas ramas de la ciencia usan *razonamiento inductivo*. Este tipo de proceso saca conclusiones generales basándose sólo en unas pocas (o muchas) observaciones. Por ejemplo, la afirmación de que "el índice de precios ha aumentado cada año durante los últimos n años; por tanto aumentará el año próximo también" muestra un razonamiento inductivo. Los propietarios de casas en California saben lo peligroso que este razonamiento puede llegar a ser en economía. Este proceso inductivo es, no obstante, de una importancia fundamental en las ciencias experimentales y empíricas, a pesar de que nunca se puedan considerar como absolutamente ciertas las conclusiones a que se llega.

El razonamiento inductivo no se considera una forma de demostración matemática. Supongamos, por ejemplo, que se pide a estudiantes de un curso de geometría probar que la suma de los ángulos de un triángulo vale 180 grados. Si miden fatigosamente, lo más exactamente posible, 1.000 (o incluso un millón) de triángulos distintos, probando en cada caso que la suma de los ángulos es 180, ¿no serviría esto como demostración? No. Aunque estas medidas representarían una buena indicación de que la proposición es cierta, no constituyen una demostración matemática. Análogamente, en economía de la empresa, el hecho de que los beneficios de una compañía hayan crecido durante los últimos 20 años no es garantía de que crecerán el presente año.

No obstante, hay una forma *matemática* de inducción que se usa bastante para crear demostraciones válidas. Se expone en la Sección B.5 del Apéndice B.

Problemas

1 Considerar el siguiente enunciado (dudoso): "Si la inflación crece, el paro disminuye". ¿Cuáles de los enunciados siguientes son equivalentes a él?

(a) Para que disminuya el paro, la inflación debe crecer.

(b) Una condición suficiente para que disminuya el paro es que la inflación crezca.

(c) El paro disminuye solamente si la inflación crece.

(d) Si el paro no disminuye, la inflación no crece.

(e) Una condición necesaria para que crezca la inflación es que el paro disminuya.

2 Analizar el siguiente epitafio: (a) usando la lógica y (b) desde un punto de vista poético.

Los que lo conocieron lo amaron.
Los que no lo amaron no lo conocieron.

3 Dar los detalles de la siguiente demostración de que $\sqrt{2}$ is irracional. Supongamos que $\sqrt{2} = p/q$, donde p y q son enteros primos entre sí. Entonces $p^2 = 2q^2$, lo que significaría que p^2, y por tanto p, serían divisibles por 2. Así, $p = 2s$ para un entero s, luego $4s^2 = 2q^2$. Por tanto, $q^2 = 2s^2$. De aquí se sigue que q sería también divisible por 2, lo que contradice la hipótesis de que p y q son primos entre sí.

1.7 TEORÍA DE CONJUNTOS

Si sabes teoría de conjuntos hasta el fondo, y nada más de matemáticas, no sirves de nada a nadie. Si supieras muchas matemáticas, pero nada de teoría de conjuntos, podrías conseguir mucho. Pero si supieras un poco de teoría de conjuntos, tendrías una comprensión mucho mayor del lenguaje de las matemáticas.

—*I. Stewart* (1975)

En la vida diaria agrupamos continuamente objetos de la misma naturaleza. Por ejemplo, nos referimos al profesorado universitario significando todo el personal académico de la universidad. Un jardín significa todas las plantas que crecen en él. Hablamos de todas las empresas con más de 1.000 empleados, de todos los contribuyentes de Los Ángeles que ganaron entre 50.000 y 100.000 dólares en 1992, y así sucesivamente. En todos estos casos tenemos una colección de objetos que se ve como una globalidad. En matemáticas, una tal colección se llama un **conjunto**, y los objetos se llaman sus **elementos** o **miembros**.

¿Cómo se define un conjunto? La manera más sencilla es dar una lista de sus elementos, en cualquier orden, entre las dos llaves $\{$ y $\}$. Un ejemplo de conjunto es

$$S = \{a, b, c\}$$

cuyos elementos son las tres primeras letras del alfabeto de la mayoría de las lenguas de origen europeo. O bien podría tratarse de un conjunto con tres elementos representados por las letras a, b, c. Por ejemplo, si $a = 0$, $b = 1$ y $c = 2$, entonces $S = \{0, 1, 2\}$. También S designa al conjunto de las raíces de la ecuación cúbica

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0$$

en la incógnita x, donde a, b y c son tres números reales cualesquiera.

De otra forma, supongamos que el lector come en un restaurante que ofrece varias alternativas para el plato fuerte. Podrían ser cuatro: pescado, pasta, tortilla y pollo. Entonces el *conjunto de las posibilidades*, E, tiene estos cuatro elementos y está completamente definido por

$$E = \{\text{pescado, pasta, tortilla, pollo}\}$$

Nótese que el orden en la lista de los platos no importa. El conjunto de posibilidades es el mismo, aun cuando se cambie el orden de los elementos del menú.

Se considera que dos conjuntos A y B son **iguales** si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A. En este caso, escribimos $A = B$. Esto significa que

los dos conjuntos tienen los mismos elementos. Consiguientemente, $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$ porque el orden en que se colocan los elementos no significa nada. Además $\{1,1,2,3\} = \{1,2,3\}$, porque un conjunto no cambia si sus elementos aparecen más de una vez.

Dar una propiedad

No se puede definir cualquier conjunto dando una lista de sus elementos. Algunos conjuntos son infinitos, esto es, contienen un número infinito de elementos.

De hecho, esos conjuntos infinitos son bastante corrientes en economía. Tómese, por ejemplo, el *conjunto presupuestario* que aparece en la teoría del consumidor. Supongamos que hay dos bienes, en cantidades designadas por x e y, que se pueden comprar a los precios p y q, respectivamente. Una cesta de consumo es un par (x, y) de cantidades de los dos bienes. Su valor a los precios p y q es $px + qy$. Supongamos que un consumidor tiene una cantidad m para gastar en los dos bienes. Entonces la *restricción presupuestaria* es $px + qy \leq m$ (suponiendo que el consumidor puede no gastar todo su dinero). Si también se acepta que la cantidad consumida de cada bien no es negativa, entonces el *conjunto presupuestario* (al que designaremos por P) consta de las cestas de consumo (x, y) que verifican las tres desigualdades $px + qy \leq m$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. (El conjunto P es el de la Figura 2.41.) Una notación estándar para este conjunto es

$$P = \{(x, y) : px + qy \leq m, \ x \geq 0, \ y \geq 0\} \tag{1.7}$$

Se siguen usando las llaves $\{ \}$ para designar al "conjunto que consta de". Sin embargo, en lugar de enumerar todos sus elementos, lo que es imposible pues son infinitos, se define el conjunto en dos partes. A la izquierda de los dos puntos se pone (x, y), que es la manera en que se designa un elemento típico de P, en este caso una cesta de consumo que se especifica por una lista de las cantidades de los dos bienes. A la derecha de los dos puntos se colocan las tres propiedades que deben verificar esos elementos típicos. Así queda definido el conjunto. Esto es un ejemplo de la definición general:

$$S = \{\text{elemento típico : propiedades a satisfacer}\}$$

Nótese que no sólo se pueden definir los conjuntos infinitos por propiedades —los finitos también. De hecho, hay que definir de esta manera algunos conjuntos finitos, como el de los seres humanos que hoy viven o, como esperamos, el conjunto de los lectores de este libro.

En matemáticas se hace uso frecuente de los conjuntos infinitos. Por ejemplo, en la Sección 1.4, estudiamos el conjunto de los enteros positivos, que se designa usualmente por N, así como el de los números racionales, que se designa por Q, y el de los números reales, que se designa por R. Todos estos conjuntos son infinitos.

Pertenencia a un conjunto

Como dijimos antes, los conjuntos están formados por elementos. Hay una notación estándar para designar la relación entre un conjunto y sus elementos. Primeramente,

$$x \in S$$

indica que x *es un elemento de* S. Nótese el símbolo especial $\in$ (que es una variante de la letra griega ϵ, o "épsilon"). A veces se usa $S \ni x$ para expresar exactamente la misma relación $x \in S$. El símbolo $\ni$ se llama "posee", pero no se usa frecuentemente. Para expresar el hecho de que x *no* es un elemento de S, escribimos $x \notin S$. Por ejemplo, $d \notin \{a, b, c\}$ quiere decir que d no es un elemento del conjunto $\{a, b, c\}$.

Para ilustrar la notación de pertenencia a un conjunto, volvamos a nuestros ejemplos anteriores. Dado el conjunto presupuestario P de (1.7), designemos por (x^*, y^*) las compras que hace el

consumidor. Entonces debe verificarse que $(x^*, y^*) \in P$. Si un cliente del restaurante elige una opción s en el conjunto $E = \{\text{pescado, pasta, tortilla, pollo}\}$ de los platos fuertes del menú, debe ser $s \in E$. Éste es el que llamamos "conjunto factible" —es posible elegir uno de sus elementos, pero nada fuera de él.

En el ejemplo de la elección de plato, se puede argüir que, si al cliente no le gusta ninguno, no se le puede prohibir el no elegir nada del menú. Puede, entonces, ir a otro restaurante o, más sencillamente, pasar hambre. Si esto es lo que hace, no está realmente eligiendo fuera del conjunto factible. Más bien debemos agrandar nuestro conjunto factible para incluir la opción de no elegir ninguno de los cuatro platos disponibles. Así el verdadero conjunto factible para el cliente es

$$E_5 = \{\text{pescado, pasta, tortilla, pollo, ninguno de los cuatro}\}$$

Al final, la única manera de evitar elegir algo de este conjunto es elegir más de un elemento. Si no se permite esto, entonces E_5 es el conjunto factible verdadero.

Subconjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Entonces A es un **subconjunto** de B si se verifica que todo elemento de A es también un elemento de B. Así A es más pequeño que B en un cierto sentido, aun cuando A y B pueden ser iguales. Esta relación se expresa en símbolos en la forma $A \subset B$, y como expresión así:

$$A \subset B \iff [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Un caso particular de subconjunto es cuando A es un *subconjunto propio* de B, lo que significa que $A \subset B$ y $A \neq B$. A veces se reserva la notación $A \subset B$ para el caso en que A es un subconjunto de B tal que $A \neq B$, lo mismo que se reserva $a < b$ para el caso en que $a \leq b$ y $a \neq b$. Entonces se usa $A \subseteq B$ para significar que A es un subconjunto de B. Sin embargo, rara vez se necesita especificar que A es un subconjunto propio de B y, cuando se necesita, se puede decir con palabras.

Operaciones con conjuntos

Se pueden combinar conjuntos de muchas maneras distintas. Son especialmente importantes tres operaciones: unión, intersección y diferencia de conjuntos, como se describe en la Tabla 1.2. Así,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

TABLA 1.2

Notación	*Nombre*	*El conjunto consta de*
$A \cup B$	*A* **unión** *B*	*Los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A, B.*
$A \cap B$	*A* **intersección** *B*	*Los elementos que pertenecen a A y B.*
$A \setminus B$	*A* **menos** *B*	*Los elementos que pertenecen a A pero no a B.*

Ejemplo 1.11

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 6\}$. Hallar $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $B \setminus A$.

Solución: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{1,2,4,5\}$, $B \setminus A = \{6\}$.

Se puede poner un ejemplo económico considerando conjuntos particulares de contribuyentes en 1990. Sea A el conjunto de todos esos contribuyentes cuyos ingresos eran al menos de 15.000$ y sea B el conjunto de los que tenían un patrimonio neto de al menos 150.000$. Entonces $A \cup B$ serían los contribuyentes que ganaron al menos 15.000$ o que tenían un patrimonio de al menos 150.000$, mientras que $A \cap B$ son aquéllos que ganaron al menos 15.000$ y cuyo patrimonio era al menos de 150.000$. Finalmente, $A \setminus B$ serían los que ganaron al menos 15.000$ pero tenían menos de 150.000$ de patrimonio neto.

Se llaman **disjuntos** dos conjuntos A y B sin elementos en común. El símbolo "$\emptyset$" designa al conjunto que no tiene ningún elemento. Se le llama el **conjunto vacío**. Los conjuntos A y B son disjuntos si y sólo si $A \cap B = \emptyset$.

Una colección de conjuntos se llama usualmente una familia de conjuntos. Cuando se considera una familia de conjuntos es natural pensar que cada conjunto de ella es un subconjunto de un conjunto fijo Ω, llamado de ahora en adelante el **conjunto universal**. En el ejemplo anterior, el conjunto de todos los contribuyentes en 1990 sería el conjunto universal.

Si A es un subconjunto del conjunto universal Ω, según la definición de diferencia, $\Omega \setminus A$ es el conjunto de los elementos de Ω que no están en A. Se llama **complemento** de A en Ω a este conjunto y a veces se le designa por CA, de tal forma que $CA = \Omega \setminus A$. Otras notaciones para el complemento de A son A^c y $\tilde{A}$.

Cuando se use la notación CA, es importante especificar claramente respecto de qué conjunto universal Ω se toma el complemento.

Ejemplo 1.12

Elijamos como conjunto universal Ω el de todos los estudiantes de una cierta universidad. Sea F el conjunto de las mujeres estudiantes, M el conjunto de todos los estudiantes de matemáticas, C el de los estudiantes que pertenecen al coro de la universidad, B el de todos los estudiantes de biología, y T el de todos los estudiantes que juegan al tenis. Describir los elementos de los conjuntos siguientes: $\Omega \setminus M$, $M \cup C$, $F \cap T$, $M \setminus (B \cap T)$ y $(M \setminus B) \cup (M \setminus T)$.

Solución: $\Omega \setminus M$ consta de los estudiantes que no hacen matemáticas, $M \cup C$ consta de aquellos que hacen matemáticas y/o pertenecen al coro universitario. El conjunto $F \cap T$ está formado por las estudiantes que juegan al tenis. El conjunto $M \setminus (B \cap T)$ está formado por los que hacen matemáticas y no hacen simultáneamente biología y tenis. Finalmente, $(M \setminus B) \cup (M \setminus T)$ está formado por los estudiantes que, o bien hacen matemáticas pero no biología, o bien que hacen matemáticas pero no juegan al tenis. ¿Ve el lector que los dos últimos conjuntos son iguales? (Si M, B, T son conjuntos cualesquiera se verifica que $(M \setminus B) \cup (M \setminus T) = M \setminus (B \cap T)$. Le será más fácil al lector comprobar esta igualdad una vez que haya leído el estudio de los diagramas de Venn, que se va a hacer a continuación.)

Diagramas de Venn

Cuando hay que considerar relaciones entre varios conjuntos es instructivo y de mucha ayuda representar a cada uno por una región en el plano. La región ha de dibujarse de forma que todos los elementos que pertenecen a un cierto conjunto estén contenidos en la misma región cerrada del plano. Se llaman **diagramas de Venn** a los que se construyen de esta forma. Las definiciones que hemos estudiado en la sección anterior se representan gráficamente en la Figura 1.6.

Se pueden deducir fórmulas universalmente válidas en teoría de conjuntos, bien directamente de las definiciones, o representando conjuntos por diagramas de Venn. Por ejemplo, la fórmula $A \cap B = B \cap A$ se deduce inmediatamente de la definición de intersección de conjuntos. En

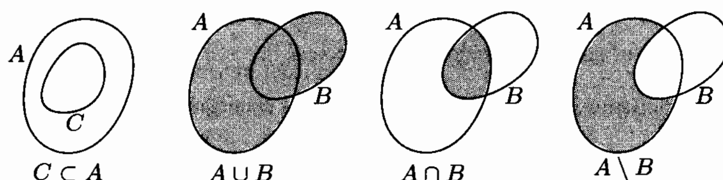


FIGURA 1.6 Diagramas de Venn.

cambio, es más difícil hacer lo mismo en el caso de la fórmula

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (*)$$

válida para toda terna A, B, C de conjuntos. Usando diagramas de Venn se ve inmediatamente que la parte sombreada de la Figura 1.7 representa a los conjuntos de ambos lados de la igualdad $(*)$, que queda así demostrada.

Cuando se dibuja un diagrama de Venn para tres conjuntos A, B, C, es importante hacerlo de tal forma que se representen todas las relaciones posibles entre un elemento y cada uno de los conjuntos. En otras palabras, deben ser no vacíos los ocho conjuntos siguientes: (1): $(A \cap B) \setminus C$; (2): $(B \cap C) \setminus A$; (3): $(C \cap A) \setminus B$; (4): $A \setminus (B \cup C)$; (5): $B \setminus (C \cup A)$; (6): $C \setminus (A \cup B)$; (7): $A \cap B \cap C$; y (8): $\complement(A \cup B \cup C)$. (véase Figura 1.8). Obsérvese que esta forma de representar conjuntos se vuelve pronto inmanejable. En efecto, cuando hay 4 conjuntos en un diagrama de Venn, el número de regiones es de $16\,(= 2^4)$ al menos.

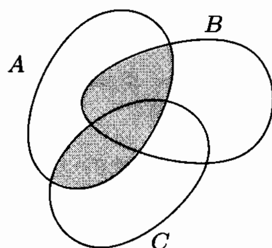


FIGURA 1.7

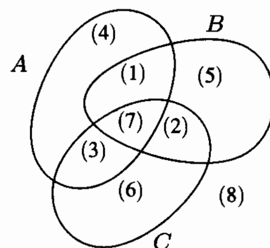


FIGURA 1.8

Se comprueba inmediatamente a partir de las definiciones de unión e intersección (o con diagramas de Venn) que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Por tanto, no importa el lugar donde se coloquen los paréntesis. En tales casos se suprimen los paréntesis y las expresiones se escriben $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$. Sin embargo, no se pueden quitar los paréntesis de expresiones como $A \cap (B \cup C)$ porque este conjunto no siempre es igual a $(A \cap B) \cup C$. Demuéstrese este hecho mediante diagramas de Venn o con el ejemplo $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4, 5\}$.

Problemas

1 Sean $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 2\}$ y $D = \{6\}$.

(a) Deducir si los enunciados siguientes son ciertos: $4 \in C$; $5 \in C$; $A \subset B$; $D \subset C$; $B = C$; $A = B$.

(b) Calcular $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \cup B \cup C \cup D$; $A \cap B \cap C$; $A \cap B \cap C \cap D$.

2 (a) ¿Es la misma persona el mayor pintor entre los poetas que el mayor poeta entre los pintores?
(b) ¿Es la misma persona el pintor más viejo entre los poetas que el poeta más viejo entre los pintores?

3 Usando las notaciones del Ejemplo 1.12, escribir los siguientes enunciados en la terminología de la teoría de conjuntos:
(a) Todos los estudiantes de biología hacen matemáticas.
(b) En el coro de la universidad hay mujeres que estudian biología.
(c) Todas las mujeres que ni juegan al tenis ni están en el coro universitario estudian biología

4 Sean F, M, C, B, T los conjuntos del Ejemplo 1.12. Describir los conjuntos siguientes: $F \cap B \cap C$; $M \cap F$; $\big((M \cap B) \setminus C\big) \setminus T$.

5 Demostrar las fórmulas siguientes, bien usando las definiciones, bien los diagramas de Venn:
(a) $A \cup B = B \cup A$
(b) $A \cup A = A$
(c) $A \cap A = A$
(d) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(e) $A \cup \emptyset = A$
(f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6 Determinar cuáles de las fórmulas siguientes son correctas. Si alguna no lo es, dar un contraejemplo. Usar diagramas de Venn si sirven de ayuda.
(a) $A \setminus B = B \setminus A$
(b) $A \subset B \iff A \cup B = B$
(c) $A \subset B \iff A \cap B = A$
(d) $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$
(e) $A \cup B = A \cup C \Longrightarrow B = C$
(f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

7 Hacer la lista completa de los subconjuntos del conjunto $\{a, b, c\}$. ¿Cuántos hay, incluyendo el vacío y el total? Hacer lo mismo con el conjunto $\{a, b, c, d\}$.

8 Una encuesta dio como resultado que a 50 personas les gustaba el café, a 40 el té, a 35 ambos y a 10 ninguno de los dos. ¿Cuántas personas respondieron a la encuesta?

9 Sea A un conjunto con un número finito de elementos, y designemos por $n(A)$ a este número. Si A y B son conjuntos finitos cualesquiera, probar que:
(a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
(b) $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

10 Si A y B son conjuntos arbitrarios, se define la **diferencia simétrica** entre A y B por la relación

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Evidentemente, $A \triangle B = B \triangle A$ mientras que, en general, $A \setminus B \neq B \setminus A$. Usando diagramas de Venn, o de cualquier otra forma, probar:
(a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(b) $(A \triangle B) \triangle C$ consta de los elementos que pertenecen a sólo uno de los conjuntos A, B, C, o bien que están en los tres.

11 Una de las identidades siguientes no es válida en general. ¿Cuál es?
(a) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
(b) $(A \cap C) \triangle B = (A \triangle B) \cap (C \triangle B)$
(c) $A \triangle A = \emptyset$

12 (a) Mil personas respondieron a una encuesta destinada a averiguar qué periódico, A, B o C, leían en un cierto día. Las respuestas fueron que 420 leían A, 316 leían B y 160 leían C. Entre los encuestados, 116 leían A y B, 100 A y C, 30 B y C y 16 leían los tres.

(i) ¿Cuántos leían A pero no B?
(ii) ¿Cuántos leían C, pero no A ni B?
(iii) ¿Cuántos no leían ninguno?

(b) Desígnese por Ω al conjunto de los 1.000 encuestados (el conjunto universal). Aplicando la notación del Problema 9, tenemos que $n(A) = 420$ y $n(A \cap B \cap C) = 16$, por ejemplo. Hallar los números de la parte (a) de manera semejante. Averiguar por qué es válida la ecuación siguiente

$$n\left(\Omega \setminus (A \cup B \cup C)\right) = n(\Omega) - n(A \cup B \cup C)$$

(c) Probar que, si A, B, C, son conjuntos finitos cualesquiera, entonces

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

2

Funciones de una variable: introducción

... las matemáticas no son tanto un tema como una manera de estudiar cualquier tema, no tanto una ciencia como una forma de vida.
—*G. Temple* (1981)

Las funciones tienen una importancia fundamental prácticamente en cualquier área de la matemática pura y aplicada, incluyendo la matemática aplicada a la economía. El lenguaje de la economía matemática está lleno de términos como funciones de oferta y demanda, producción, consumo, etcétera. En este capítulo y en el próximo presentamos una discusión general de las funciones de una variable real, ilustrada con algunos ejemplos muy importantes.

2.1 INTRODUCCIÓN

Una variable es función de otra si la primera *depende* de la segunda. Por ejemplo, el área de un círculo es una función de su radio. Si se da el radio r entonces el área está determinada. De hecho $A = \pi r^2$, donde π es la constante numérica 3,14159 . . . .

La medida de la temperatura suministra otro ejemplo de función. Si C designa la temperatura expresada en grados centígrados (o Celsius), ésta es una función de F, la misma temperatura medida en grados Fahrenheit, porque $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

En la conversación ordinaria utilizamos la palabra "función" de una forma análoga. Decimos, por ejemplo, que la tasa de mortalidad infantil de un país es función de la calidad de su atención médica, o que el producto nacional bruto es función del nivel de inversión. En ambos casos, el obtener una fórmula que represente a la función exactamente es una difícil tarea de investigación.

No se necesita una fórmula matemática para poner de relieve la idea de que una variable es función de otra: una tabla puede también establecer la relación. Por ejemplo, la Tabla 2.1 muestra el crecimiento de los gastos anuales totales personales de consumo, medidos en dólares, en los Estados Unidos en el periodo 1985–1991. Está tomada de los datos del *Economic Report of the President* de

enero de 1993. Esta tabla define los gastos de consumo como una función del año. No se considera la inflación.

TABLA 2.1 *Gastos personales de consumo en EE.UU., 1985–1991*

Año	*1985*	*1986*	*1987*	*1988*	*1989*	*1990*	*1991*
Consumo personal [1]	*2.667,4*	*2.850,6*	*3.052,2*	*3.296,1*	*3.523,1*	*3.748,4*	*3.887,7*

[1] *En miles de millones de dólares.*

También se puede ilustrar la dependencia entre dos variables mediante una curva o un gráfico. Consideremos los dos ejemplos que siguen.

En la figura 2.1, hemos dibujado una curva, la llamada curva de Laffer, de la que se ha dicho que desempeñó un papel importante hace algunos años en la discusión de la "economía por el lado de la oferta". Esta curva muestra la supuesta relación entre el tipo de gravamen del impuesto sobre la renta de las personas físicas y la recaudación total por este impuesto. Obviamente, si el tipo es del 0%, entonces el ingreso es 0. Sin embargo, si el tipo es del 100%, entonces los ingresos serán también casi cero porque prácticamente nadie querrá trabajar si sus ganancias íntegras van a ser confiscadas. Estas ideas son evidentes para la práctica totalidad de los economistas competentes (en casos como el Problema 1 de la Sección 3.2). No obstante, el economista americano Arthur Laffer, autor de la curva, suscitó una fuerte polémica, pues declaró que había dibujado esa curva en una servilleta de restaurante y, más tarde, divulgó el mensaje entre todo el público. Ha sido un objeto de discusión acalorada entre los economistas cuál es el tipo de gravamen a para el cual el gobierno obtiene la máxima recaudación.

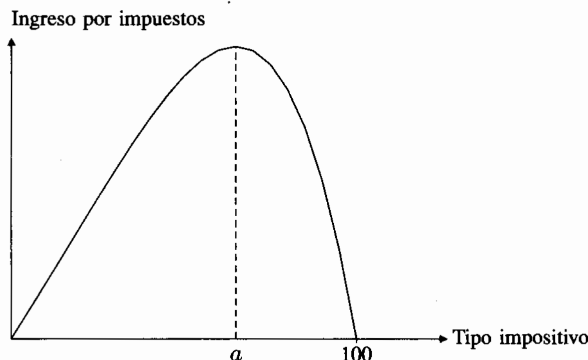


FIGURA 2.1 La "curva de Laffer", que relaciona ingresos por impuestos con tipo impositivo.

La Figura 2.2 reproduce un sello de correos con un gráfico sobre el crecimiento del producto nacional bruto de Noruega durante los 100 primeros años de vida de la Oficina Central de Estadística.

Todas las relaciones que hemos expuesto tienen una característica en común: hay definida una regla para relacionar cada valor de una variable con un valor de otra.

Nótese que en todos los ejemplos se ha supuesto implícitamente que las variables están sujetas a ciertas restricciones. En el ejemplo de la temperatura, F no puede ser menor que $-459{,}67$, el cero absoluto (que corresponde a $-273{,}15$ grados centígrados). En la tabla 2.1 sólo son relevantes los años entre 1985 y 1991.

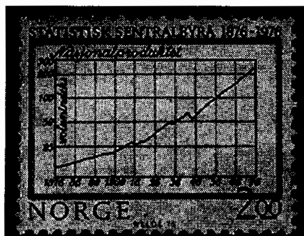


FIGURA 2.2 El producto nacional noruego (índice de volumen) 1876–1976

2.2 FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

Los ejemplos que hemos estudiado en la sección anterior nos conducen a la siguiente definición de función real de una variable real:

> Una **función** de una variable real x con **dominio** D es una regla que asigna un único número real a cada número x en D. (2.1)

La palabra "regla" se usa aquí en un sentido muy amplio. *Toda* regla con las propiedades descritas en (2.1) se llama una función, tanto si viene dada por una fórmula como por palabras, definida por una tabla, representada por una curva, o expresada por otros medios.

Se designa usualmente a las funciones por una letra como f, g, F, ó ϕ. Si f es una función y x es un número de su dominio D, entonces $f(x)$ designa al número que la función f asigna a x. Se pronuncia el símbolo $f(x)$ como "f de x". Es importante notar la diferencia entre f, que es un símbolo que representa a una función (la regla), y $f(x)$, que designa al valor de f en x.

Si f es una función, se designa a veces por y el valor de f en x, luego se escribe

$$y = f(x). \tag{$*$}$$

En esta situación se llama a x la **variable independiente**, o el **argumento** de f, mientras que se llama a y la **variable dependiente**, porque el valor de y depende (en general) del valor de x. En economía se llama a menudo a x la variable **exógena**, mientras que y es la variable **endógena**.

Frecuentemente se define una función por una fórmula del tipo $(*)$ como, por ejemplo, $y = 8x^2 + 3x + 2$. La función es entonces la regla que asigna a x el número $8x^2 + 3x + 2$.

Notación funcional

Para familiarizarse con la notación es bueno echar una ojeada a algunos ejemplos de funciones definidas por fórmulas.

Ejemplo 2.1

Se define una función para todos los números mediante la regla siguiente:

$$\text{Asígnese a todo número su tercera potencia.} \tag{1}$$

Esta función asignará $0^3 = 0$ a 0, $3^3 = 27$ a 3, $(-2)^3 = -8$ a -2 y $(1/4)^3 = 1/64$ a $1/4$. En general, asigna el número x^3 al número x. Si designamos por f a esta función, entonces

$$f(x) = x^3 \tag{2}$$

Por tanto, $f(0) = 0^3 = 0$, $f(3) = 3^3 = 27$, $f(-2) = (-2)^3 = -8$, $f(1/4) = (1/4)^3 = 1/64$. Sustituyendo a por x en la fórmula de f se obtiene $f(a) = a^3$, de donde

$$f(a+1) = (a+1)^3 = (a+1)(a+1)(a+1) = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \qquad (3)$$

Nota: Un error bastante común es suponer que $f(a) = a^3$ implica $f(a+1) = a^3 + 1$. Se puede ilustrar este error mediante una interpretación sencilla de f. Si a es la arista de un cubo medida en metros, entonces $f(a) = a^3$ es el volumen del cubo medido en metros cúbicos. Supongamos que cada arista del cubo aumenta 1 m. Entonces el volumen del nuevo cubo es $f(a+1) = (a+1)^3$ metros cúbicos. El número $a^3 + 1$ es el que se obtiene cuando el volumen de un cubo de arista a se aumenta en 1 m^3. De hecho, $f(a+1) = (a+1)^3$ es muy distinto de $a^3 + 1$, como se ve en las figuras 2.3 y 2.4.

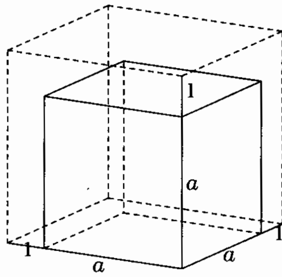


FIGURA 2.3 Volumen $f(a+1) = (a+1)^3$:

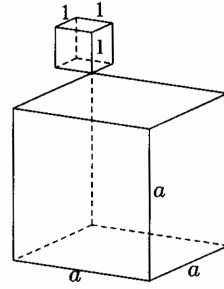


FIGURA 2.4 Volumen $a^3 + 1$.

Ejemplo 2.2

El coste total (en dólares) de la producción de x unidades de un cierto bien viene dado por la fórmula

$$C(x) = 100x\sqrt{x} + 500$$

Hallar el coste de producir 16, 100, y a unidades. Supongamos que la empresa produce a unidades; hallar el *incremento* de coste en la producción de una unidad adicional.[1]

Solución: El coste de producir 16 unidades se halla sustituyendo x por 16 en la fórmula de $C(x)$:

$$C(16) = 100 \cdot 16\sqrt{16} + 500 = 100 \cdot 16 \cdot 4 + 500 = 6.900$$

Análogamente,

$$C(100) = 100 \cdot 100 \cdot \sqrt{100} + 500 = 100.500$$
$$C(a) = 100a\sqrt{a} + 500$$

El coste de producción de $a+1$ unidades es $C(a+1)$, luego el aumento de coste es

$$C(a+1) - C(a) = 100(a+1)\sqrt{a+1} + 500 - 100a\sqrt{a} - 500$$
$$= 100\big[(a+1)\sqrt{a+1} - a\sqrt{a}\big]$$

Hemos usado x para designar a la variable independiente, pero podemos utilizar casi cualquier otro símbolo. Por ejemplo, todas las fórmulas siguientes definen exactamente la misma función (y

[1] Éste es el concepto que los economistas llaman usualmente **coste marginal**. Sin embargo, deberían llamarlo **coste incremental**. En la Sección 4.3, explicaremos la diferencia entre los dos.

así podemos poner $f = g = \phi$):

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^4 + 1}, \qquad g(t) = \frac{t^2 - 3}{t^4 + 1}, \qquad \phi(\xi) = \frac{\xi^2 - 3}{\xi^4 + 1} \qquad (*)$$

A estos efectos podríamos también expresar la función de $(*)$ como sigue:

$$f(\cdot) = \frac{(\cdot)^2 - 3}{(\cdot)^4 + 1}$$

Se entiende que el punto entre paréntesis se puede reemplazar por un número arbitrario, o una letra, o incluso otra función como $1/y$. Así,

$$f(1) = \frac{(1)^2 - 3}{(1)^4 + 1} = -1, \qquad f(k) = \frac{k^2 - 3}{k^4 + 1}, \qquad \text{y} \qquad f(1/y) = \frac{(1/y)^2 - 3}{(1/y)^4 + 1}$$

En teoría económica se estudian frecuentemente funciones que dependen de un cierto número de parámetros, además de la variable independiente. Damos un ejemplo típico.

Ejemplo 2.3

Supongamos que el coste de producción de x unidades de un bien de consumo es

$$C(x) = Ax\sqrt{x} + B \qquad (A \text{ y } B \text{ son constantes positivas}) \qquad (1)$$

Hallar el coste de producir 0, 10 y $x + h$ unidades.

Solución: El coste de producir 0 unidades es

$$C(0) = A \cdot 0 \cdot \sqrt{0} + B = 0 + B = B$$

(El parámetro B representa simplemente los costes fijos. Son los que hay que pagar haya producción o no, como el canon anual de una licencia de taxi.) Análogamente,

$$C(10) = A \cdot 10\sqrt{10} + B$$

Finalmente, sustituyendo x por $x + h$ en (1) se obtiene

$$C(x + h) = A(x + h)\sqrt{x + h} + B$$

El dominio y el rango

En la definición de una función se debe incluir su dominio. El dominio de la función f definida por $f(x) = x^3$ (véase el Ejemplo 2.1) es el conjunto de todos los números reales. En el Ejemplo 2.2, donde $C(x) = 100x\sqrt{x} + 500$ designa el coste de producción de x unidades de un bien, no se especificó el dominio, pero lo natural es considerar como tal el conjunto de los números 0, 1, 2, $\ldots$, x_0, donde x_0 es el máximo número de unidades que puede producir la empresa. Si x es una variable continua, el dominio natural es el intervalo cerrado $[0, x_0]$.

Si se define una función por medio de una fórmula algebraica, adoptamos el convenio de que el dominio consta de todos los valores de la variable independiente para los cuales la fórmula tiene sentido (a menos que se mencione explícitamente otro).

Ejemplo 2.4

Hallar los dominios de

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{1}{x + 3} \qquad \text{(b)}\ g(x) = \sqrt{2x + 4}$$

Solución:

(a) Para $x = -3$, la fórmula suministra la expresión "$1/0$", que no tiene sentido. Para cualquier otro valor de x, la fórmula define un número $f(x)$. Así, el dominio consta de todos los números $x \neq -3$.

(b) La expresión $\sqrt{2x+4}$ está definida para todo x tal que $2x+4$ no es negativo. Resolviendo en x la desigualdad $2x + 4 \geq 0$ se obtiene $x \geq -2$. Por tanto, el dominio de g es el intervalo $[-2, \infty)$.

Sea f una función con dominio D. El conjunto de todos los valores $f(x)$ que toma la función se llama el **rango** de f. Usualmente se denota el dominio de f por D_f y el rango por R_f. Estos conceptos se ilustran en la Figura 2.5, usando la idea de gráfica de una función. (Las gráficas se estudian en la sección siguiente, pero muy probablemente el lector las haya visto anteriormente.)

Otra forma de concebir una función es como un motor que toma como entrada un número x del dominio y da $f(x)$ como salida (véase Figura 2.6.) El rango de f es el conjunto de todos los números que se obtienen como salida al usar como entradas todos los números x del dominio. Si se introduce un número que no esté en el dominio, el motor no funciona y no hay salida.

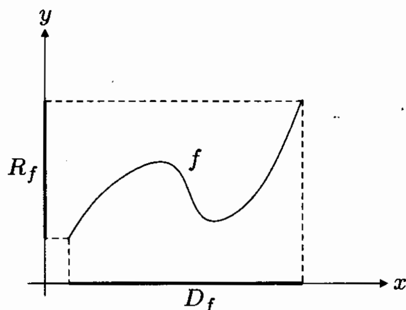


FIGURA 2.5 El dominio y el rango de *f*.



FIGURA 2.6 Función como motor.

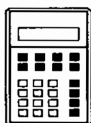
Ejemplo 2.5

Probar que el número 4 pertenece al rango de la función definida por $g(x) = \sqrt{2x+4}$. Hallar el rango de g. (Recuérdese que $\sqrt{u}$ designa a la raíz cuadrada no negativa de u.)

Solución: Para probar que un número como 4 está en el rango de g hay que encontrar un número x tal que $g(x) = 4$. En otras palabras, hay que resolver la ecuación $\sqrt{2x+4} = 4$ en x. Elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene $2x + 4 = 4^2 = 16$, luego $x = 6$. Así el número 4 pertenece al rango R_g porque $g(6) = 4$.

Para determinar el rango de g debemos responder a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son todos los valores posibles de $\sqrt{2x+4}$ cuando x varía en el intervalo $[-2, \infty)$? Para $x = -2$, $\sqrt{2x+4} = 0$, y $\sqrt{2x+4}$ no puede ser nunca negativo. Así afirmamos que, cualquiera que sea el número $y_0 \geq 0$ que se elija, existe un x_0 tal que $\sqrt{2x_0+4} = y_0$. Elevando al cuadrado cada miembro de esta ecuación se obtiene $2x_0 + 4 = y_0^2$. Por tanto, $2x_0 = y_0^2 - 4$, lo que implica que $x_0 = \frac{1}{2}(y_0^2 - 4)$. Como $y_0^2 \geq 0$, tenemos que $x_0 = \frac{1}{2}\left(y_0^2 - 4\right) \geq \frac{1}{2}(-4) = -2$. Así, para cada $y_0 \geq 0$, hemos hallado un número $x_0 \geq -2$ tal que $g(x_0) = y_0$. Por consiguiente, el rango de g es $[0, \infty)$.

Aun cuando tengamos una función definida por una fórmula en un dominio determinado, no es siempre fácil hallar el rango. Por ejemplo no es nada fácil hallar R_f para $f(x) = 3x^3-2x^2-12x-3$ y $D_f = [-2, 3]$ sin usar los métodos del cálculo diferencial.



Muchas calculadoras de bolsillo vienen con algunas funciones especiales ya implementadas. Por ejemplo, la mayoría tienen la función $\sqrt{\ }$ que asigna a cada número x su raíz cuadrada $\sqrt{x}$.

Si introducimos en la calculadora un número no negativo, como 25, y pulsamos la tecla de la raíz cuadrada, aparece el número 5 en la pantalla. Si introducimos -3 aparece la palabra "Error", que es la manera que la máquina tiene de decir que $\sqrt{-3}$ no está definida.

El concepto de función es completamente abstracto. En el Ejemplo 2.2 estudiamos una función que halla el coste de producción $C(x)$ (en dólares) asociado al número x de unidades de un bien de consumo. En este caso, x y $C(x)$ son cantidades concretas y medibles. Sin embargo, la letra C, que es el nombre de la función, no representa ninguna cantidad física; representa más bien la dependencia que tiene el coste del número de unidades que se producen, lo que es un concepto puramente abstracto.

Problemas

1 Sea $f(x) = x^2 + 1$.

(a) Calcular $f(0)$, $f(-1)$, $f(1/2)$, y $f(\sqrt{2})$.

(b) ¿Para qué x se verifica que: (i) $f(x) = f(-x)$, (ii) $f(x+1) = f(x)+f(1)$, (iii) $f(2x) = 2f(x)$?

2 Supongamos que $F(x) = 10$, para todo x. Hallar $F(0)$, $F(-3)$, y $F(a+h) - F(a)$.

3 Sea $f(t) = a^2 - (t-a)^2$ (a es constante).

(a) Calcular $f(0)$, $f(a)$, $f(-a)$, y $f(2a)$.

(b) Calcular $3f(a) + f(-2a)$.

4 Sea f la función definida, para todo x, por

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

(a) Calcular $f(-1/10)$, $f(0)$, $f(1/\sqrt{2})$, $f(\sqrt{\pi})$, y $f(2)$.

(b) Probar que $f(x) = -f(-x)$ para todo x, y que $f(1/x) = f(x)$, para $x \neq 0$.

5 El coste de producción de x unidades de un bien de consumo está dado por

$$C(x) = 1.000 + 300x + x^2$$

(a) Calcular $C(0)$, $C(100)$ y $C(101) - C(100)$.

(b) Calcular $C(x+1) - C(x)$ y explicar con palabras el significado de la diferencia.

6 Sea $F(t) = \sqrt{t^2 - 2t + 4}$. Calcular $F(0)$, $F(-3)$ y $F(t+1)$.

7 H. Schultz estimó que la demanda de algodón en los Estados Unidos en el periodo 1915–1919 fue de $D(P) = 6{,}4 - 0{,}3P$ (con unidades apropiadas para el precio P y la cantidad $D(P)$).

(a) Hallar la demanda si el precio es de 8, 10, y 10,22.

(b) Si la demanda es 3,13, ¿cuál es el precio?

8 El coste de quitar $p\%$ de la suciedad de un lago está dado por

$$b(p) = \frac{10p}{105 - p}$$

(a) Hallar $b(0)$, $b(50)$, y $b(100)$.

(b) ¿Qué significa $b(50+h) - b(50)$? ($h \geq 0$).

9 (a) Si $f(x) = 100x^2$ probar que, para todo t, $f(tx) = t^2 f(x)$.

(b) Si $P(x) = x^{1/2}$ probar que, para todo $t \geq 0$, $P(tx) = t^{1/2}P(x)$.

10 Se verifica que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para todo a y b solamente para unas funciones especiales, que se llaman "aditivas". Determinar si $f(2+1) = f(2) + f(1)$ para las siguientes:

(a) $f(x) = 2x^2$ (b) $f(x) = -3x$ (c) $f(x) = \sqrt{x}$

11 (a) Si $f(x) = Ax$, probar que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para todo a y b.

(b) Si $f(x) = 10^x$, probar que $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$, para todo par a, b de números naturales.

12 Un estudiante afirma que $(x+1)^2 = x^2 + 1$. ¿Puede el lector exhibir un razonamiento geométrico que pruebe que eso no es cierto?

13 Hallar los dominios de las funciones definidas por las ecuaciones siguientes:

(a) $y = \sqrt{5-x}$ (b) $y = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

(c) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{(x-2)(x+3)}}$ (d) $y = (x+1)^{1/2} + 1/(x-1)^{1/2}$

14 Considérese la función f definida por la fórmula

$$f(x) = \frac{3x+6}{x-2}$$

(a) Hallar el dominio de f.

(b) Probar que el número 5 pertenece al rango de f hallando un número x tal que $(3x+6)/(x-2) = 5$.

(c) Probar que 3 no pertenece al rango de f.

15 Hallar el dominio y el rango de $g(x) = 1 - \sqrt{x+2}$.

16 Sea $f(x) = |x|$. ¿Cuáles de las siguientes reglas son válidas para todo par x, y de números?

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (b) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

(c) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ (d) $f(2x) = 2f(x)$

(e) $f(-2x) = -2f(x)$ (f) $f(x) = \sqrt{x^2}$

(g) $f(-2x) = 2f(x)$ (h) $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$

17 Sea

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$$

donde a, b, y c son constantes, y $c \neq 0$. Suponiendo que $x \neq a/c$, probar que

$$f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = x$$

2.3 GRÁFICAS

Las expresiones

$$y = 2x - 1, \qquad x^2 + y^2 = 16, \qquad x\sqrt{y} = 2 \qquad (*)$$

son tres ejemplos de ecuaciones en dos variables x e y. Vamos a explicar en esta sección cómo *toda* ecuación en dos variables se puede representar por una curva (o gráfica) en un sistema de coordenadas. En particular, toda función dada por una ecuación $y = f(x)$ tiene una representación de ese tipo, lo que nos ayuda a visualizarla. Esto ocurre porque la forma de la gráfica refleja propiedades de la ecuación o de la función.

Sistemas de coordenadas en el plano

En la Sección 1.4 vimos cómo se pueden representar los números reales como los puntos de una recta (la recta numérica). Análogamente, todo *par* de números reales se puede representar por un punto de un plano. Se trazan dos rectas perpendiculares, que se llaman respectivamente el *eje* x (o el *eje horizontal*) y el *eje* y (o el *eje vertical*). El punto de intersección O se llama el *origen*. Medimos los números reales sobre esas rectas, como se muestra en la Figura 2.7. Usualmente se miden los números sobre los dos ejes de tal forma que la longitud sobre el eje x que representa la distancia entre x y $x + 1$ coincide con la longitud sobre el eje y que representa la distancia entre y e $y + 1$. Pero esto no tiene por qué ocurrir siempre.

La Figura 2.7 representa **un sistema de coordenadas rectangular** (o **Cartesiano**) que llamamos el **plano** xy. Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro cuadrantes, que se numeran como en la Figura 2.7. Todo punto P del plano queda representado por un par (a, b) de números reales, que se pueden hallar trazando por P las perpendiculares a los ejes. El punto representado por (a, b) es el punto de intersección de la recta vertical $x = a$ con la recta horizontal $y = b$. Recíprocamente, todo par de números reales representa un único punto del plano. Por ejemplo, en la Figura 2.8, el par ordenado $(3, 4)$ corresponde al punto P de intersección de $x = 3$ con $y = 4$. Así, P está 3 unidades a la derecha del eje y y 4 unidades por encima del eje x. Llamamos al par $(3, 4)$ las **coordenadas** de P. Análogamente, Q está 5 unidades a la izquierda del eje y y 2 unidades por debajo del eje x, luego las coordenadas de Q son $(-5, -2)$.

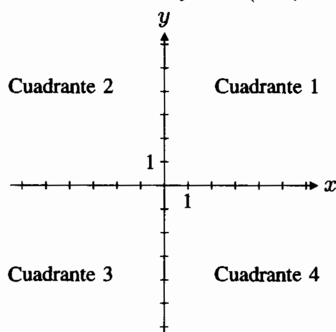


FIGURA 2.7 Un sistema de coordenadas.

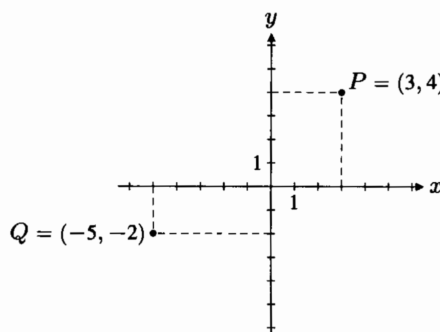


FIGURA 2.8 Los puntos (3, 4) y (−5, −2).

Nótese que llamamos a (a, b) un **par ordenado** porque el orden de colocación de los números en el par es importante. Por ejemplo, $(3, 4)$ y $(4, 3)$ representan dos puntos distintos.

Ejemplo 2.6

Dibujar un sistema de coordenadas y describir los puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen cada una de las tres condiciones siguientes:

(a) $x = 3$ (b) $x \geq 0$ y $y \geq 0$ (c) $-2 \leq x \leq 1$ y $-2 \leq y \leq 3$

Solución: (a) Véase la Figura 2.9, que representa una recta. (b) Véase la Figura 2.10, que representa el primer cuadrante. (c) Véase la Figura 2.11, que representa un rectángulo.

Gráficas de ecuaciones en dos variables

Una solución de una ecuación en dos variables x e y es un par (a, b) que verifica la ecuación cuando se sustituye x por a e y por b. El **conjunto solución** de la ecuación es el conjunto de todas las soluciones posibles. Si dibujamos todos los pares ordenados del conjunto solución en un sistema de coordenadas obtenemos una curva, que se llama la **gráfica** de la ecuación.

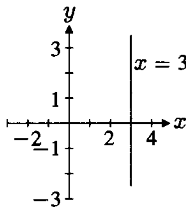


FIGURA 2.9 Una recta.

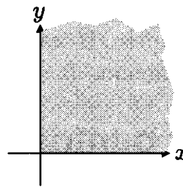


FIGURA 2.10 1er cuadrante.

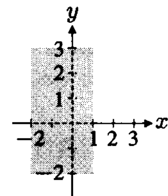


FIGURA 2.11 Un rectángulo.

Ejemplo 2.7

Hállense algunas soluciones numéricas de cada una de las ecuaciones $y = 2x - 1$, $x^2 + y^2 = 16$ y $x\sqrt{y} = 2$, y trátense de dibujar las gráficas.

Solución: Para $y = 2x - 1$, el punto $(0, -1)$ es una solución porque, si $x = 0$, entonces $y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$. Otras soluciones son $(1, 1)$, $(3, 5)$ y $(-1, -3)$. En la Figura 2.12 hemos dibujado las cuatro soluciones y todas ellas están sobre una recta. Existen una infinidad de soluciones, luego nunca podremos escribirlas todas.

Para $x^2 + y^2 = 16$, el punto $(4, 0)$ es una solución. Otras soluciones se encuentran en la Tabla 2.2.

TABLA 2.2 *Soluciones de $x^2 + y^2 = 16$*

x	-4	-3	-1	0	1	3	4
y	0	$\pm\sqrt{7}$	$\pm\sqrt{15}$	± 4	$\pm\sqrt{15}$	$\pm\sqrt{7}$	0

La Figura 2.13 muestra el dibujo de los puntos de la tabla, y la gráfica parece ser una circunferencia.

De $x\sqrt{y} = 2$ deducimos que $y = 4/x^2$ y así es fácil de rellenar la Tabla 2.3. La gráfica es la de la Figura 2.14.

TABLA 2.3 *Soluciones de $x\sqrt{y} = 2$*

x	1	2	4	6
y	4	1	1/4	1/9

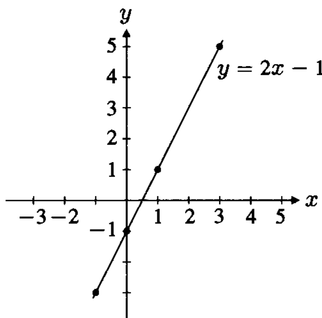


FIGURA 2.12 $y = 2x - 1$.

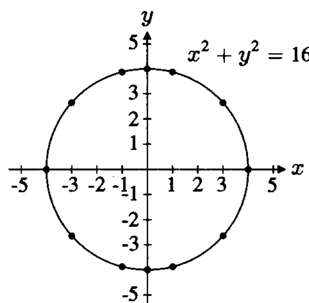


FIGURA 2.13 $x^2 + y^2 = 16$.

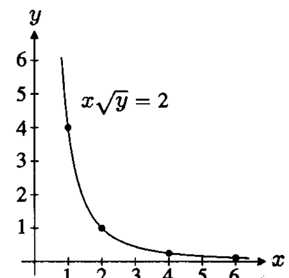


FIGURA 2.14 $x\sqrt{y} = 2$.

Nota: Al dibujar la gráfica de una ecuación como $x^2 + y^2 = 16$, debemos hallar un número suficiente de soluciones (x, y) pues, si no, podríamos perder algunas características importantes de la curva. De hecho, puesto que dibujamos solamente un número finito de puntos, nunca podremos estar seguros de que no hemos pasado por alto un zigzag o un corte en la curva. Veremos a continuación que

la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 16$ es realmente una circunferencia. Para dibujar gráficas de ecuaciones más complicadas tendremos que usar cálculo diferencial.

Distancia entre dos puntos del plano

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ los dos puntos dibujados en la Figura 2.15. Por el teorema de Pitágoras, la distancia d entre esos puntos verifica la ecuación $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Nótese que no importa en qué orden se toman los puntos puesto que $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ e $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$.

La fórmula de la distancia

La distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.2}$$

Para demostrar la fórmula de la distancia hemos usado dos puntos del primer cuadrante. Sin embargo, la misma fórmula vale para cualesquiera dos puntos P_1 y P_2, independientemente de donde estén situados.

Ejemplo 2.8

Hallar la distancia d entre los puntos $P_1 = (-4, 3)$ y $P_2 = (5, -1)$ (los puntos estan dibujados en la Figura 2.16).

Solución: Usando (2.2) con $x_1 = -4$, $y_1 = 3$, y $x_2 = 5$, $y_2 = -1$, se tiene

$$d = \sqrt{(-4 - 5)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{(-9)^2 + 4^2} = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97} \approx 9{,}85$$

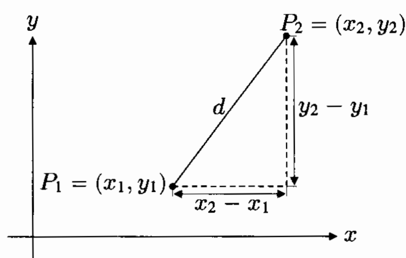


FIGURA 2.15

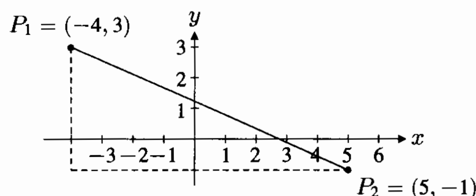


FIGURA 2.16

Circunferencias

Sea (a, b) un punto del plano. *La circunferencia de radio r con centro (a, b) es el conjunto de todos los puntos (x, y) cuya distancia a (a, b) es r.* Según la Figura 2.17, y usando la fórmula de la distancia, se obtiene $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$. Elevando al cuadrado cada miembro de esta ecuación se tiene

La ecuación de la circunferencia

La ecuación de una circunferencia de centro (a, b) y radio r es

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{2.3}$$

Nótese que si $a = b = 0$ y $r = 4$, entonces (2.3) se convierte en $x^2 + y^2 = 16$. Ésta es la ecuación de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 4 (véase Figura 2.13.)

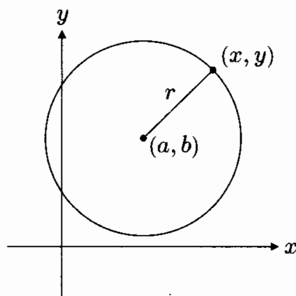


FIGURA 2.17 Circunferencia de centro (*a*, *b*) y radio *r*.

Ejemplo 2.9

Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-4, 1)$ y radio 3.

Solución: En la fórmula general se pone $a = -4$, $b = 1$ y $r = 3$, con lo que se obtiene la ecuación pedida:

$$(x+4)^2+(y-1)^2=9 \tag{1}$$

(véase Figura 2.18.) Desarrollando los cuadrados de (1) se obtiene

$$x^2+8x+16+y^2-2y+1=9 \tag{2}$$

que se puede escribir

$$x^2+y^2+8x-2y+8=0 \tag{3}$$

Nota: La ecuación (3) de la circunferencia tiene el inconveniente de que no podemos ver en ella inmediatamente el centro y el radio. Si nos dan la ecuación (3) siempre podemos "razonar hacia atrás" para reconstruir (1) pasando por (2). A esta operación se le llama "completar los cuadrados" y es una de las técnicas matemáticas más antiguas (véase la Sección A.8, Apéndice A). Se puede encontrar un ejemplo de este método en el problema 9.

Problemas

1 Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas y, en él, los puntos $(2, 3)$, $(-3, 2)$, $(-3/2, 1/4)$, $(4, 0)$ y $(0, 4)$.

2 Dibujar los seis conjuntos de puntos (x, y) que verifican las condiciones siguientes:

(a) $y = 4$ (b) $x < 0$ (c) $x \geq 1$ e $y \geq 2$

(d) $|x| = 2$ (e) $y = x$ (f) $y \geq x$

3 Dibujar las gráficas de cada una de las ecuaciones siguientes:

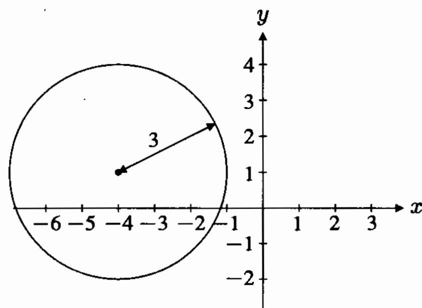


FIGURA 2.18 Circunferencia de centro $(-4, 1)$ y radio 3.

(a) $y = 4x - 3$ (b) $xy = 1$ (c) $y^2 = x$

4 Tratar de dibujar las gráficas de cada una de las ecuaciones siguientes:

(a) $x^2 + 2y^2 = 6$ (b) $y + \sqrt{x-1} = 0$ (c) $y^2 - x^2 = 1$

5 Hallar la distancia entre cada uno de los siguientes pares de puntos:

(a) $(1, 3)$ y $(2, 4)$ (b) $(-1, 2)$ y $(-3, -3)$ (c) $(3/2, -2)$ y $(-5, 1)$

(d) (x, y) y $(2x, y + 3)$ (e) (a, b) y $(-a, b)$ (f) $(a, 3)$ y $(2 + a, 5)$

6 La distancia entre $(2, 4)$ y $(5, y)$ es $\sqrt{13}$. Hallar y. (Explicar geométricamente por qué debe haber dos valores de y. ¿Qué ocurriría si la distancia fuese 2?)

7 Calcular la distancia aproximada entre los siguientes pares de puntos:

(a) (3,998 , 2,114) y (1,130 , −2,416) (b) $(\pi, 2\pi)$ y $(-\pi, 1)$

8 Hallar las ecuaciones de las circunferencias siguientes:

(a) Centro $(2, 3)$ y radio 4. (b) Centro $(2, 5)$ y pasa por $(-1, 3)$.

9 Podemos probar que la gráfica de $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$ es una circunferencia razonando así: En primer lugar se reordena la ecuación para obtener $(x^2 + 8x \ldots) + (y^2 - 2y \ldots) = -8$. Completando los dos cuadrados se tiene $(x^2 + 8x + 4^2) + (y^2 - 2y + (-1)^2) = -8 + 4^2 + (-1)^2 = 9$. Así la ecuación se transforma en $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$, cuya gráfica es una circunferencia de centro $(-4, 1)$ y radio $\sqrt{9} = 3$. Utilizar este método para hallar el centro y el radio de las dos circunferencias de ecuaciones:

(a) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$ (b) $3x^2 + 3y^2 + 18x - 24y = -39$

10 El punto P se mueve en el plano de tal manera que siempre permanece equidistante de los puntos $A = (3, 2)$ y $B = (5, -4)$. Hallar una ecuación sencilla que verifiquen las coordenadas (x, y) de P. Interpretar geométricamente el problema y su solución. (*Indicación:* Calcular el cuadrado de la distancia de P a A y B respectivamente.)

11 Probar que, si la distancia de un punto (x, y) a $(-2, 0)$ es el doble de la distancia de (x, y) a $(4, 0)$, entonces (x, y) debe estar en la circunferencia de centro $(6, 0)$ y radio 4.

Problemas avanzados

12 Tratar de dibujar la gráfica de la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

13 Una empresa tiene dos plantas A y B separadas 60 kilómetros, situadas en los puntos $(0, 0)$ y $(60, 0)$ (véase Figura 2.19.) Ambas plantas suministran el mismo producto, cuyo precio es de p dólares por

unidad. Los gastos de transporte por kilómetro y unidad son de 10$ desde A y $5 desde B. Hay un comprador en el punto (x, y).

(a) Interpretar en términos económicos las expresiones:
$p + 10\sqrt{x^2 + y^2}$ y $p + 5\sqrt{(x - 60)^2 + y^2}$

(b) Hallar la ecuación de la curva que separa los mercados de las dos plantas, suponiendo que los clientes compran el producto de la planta con menor coste total.

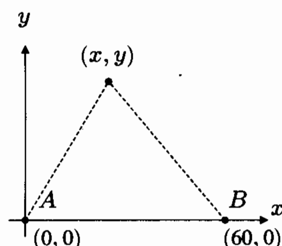


FIGURA 2.19

14 Generalizar el Problema 13 al caso en que $A = (0, 0)$ y $B = (a, 0)$, suponiendo que los gastos de transporte por kilómetro son, respectivamente, r y s dólares. Probar que la curva que separa los mercados es una circunferencia, hallando su centro y su radio.

15 Probar que la gráfica de

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (A,\ B \text{ y } C \text{ constantes})$$

es una circunferencia si $A^2 + B^2 > 4C$. Hallar su centro y su radio (véase el Problema 9). ¿Qué ocurre si $A^2 + B^2 \leq 4C$?

2.4 GRÁFICAS DE FUNCIONES

La **gráfica** de una función f es el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio de f. Ésta es simplemente la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Se pueden encontrar ejemplos típicos de gráficas de funciones en las Figuras 2.20 y 2.21. La Figura 2.20 contiene la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x$, que se halla calculando puntos $(x, f(x))$ y dibujando luego una curva lisa a través de esos puntos. La función cuya gráfica está contenida en la Figura 2.21 es de un tipo que se encuentra frecuentemente en economía. Está definida por fórmulas diferentes en intervalos diferentes.

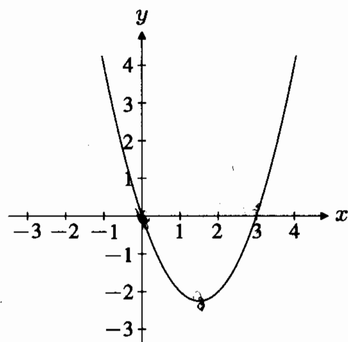


FIGURA 2.20 La gráfica de $f(x) = x^2 - 3x$.

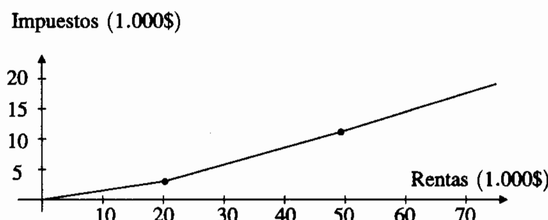


FIGURA 2.21 Impuestos federales en EE.UU.

Ejemplo 2.10 (Impuesto federal sobre la renta en EE.UU. para personas solteras (1991)) En la Figura 2.21 dibujamos la gráfica de esta función del impuesto sobre la renta. Para ingresos hasta 20.250$ el tipo era del 15%, para ingresos entre 20.251$ y $49.300 era del 28% y los ingresos superiores a 49.300$ cotizaban un 31%.

Las gráficas de varias funciones pueden tener innumerables formas distintas. Sin embargo, no todas las curvas del plano son gráficas de funciones. Una función asigna a cada punto x del dominio un solo valor de y. *La gráfica de una función tiene, por tanto, la propiedad de que una recta vertical que pase por cualquier punto del eje x la corta en un punto, a lo más.* En las Figuras 2.22 y 2.23 se ponen ejemplos de este *test de recta vertical*.

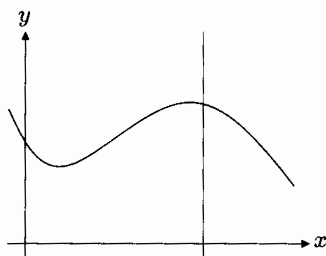


FIGURA 2.22 Esta gráfica representa una función.

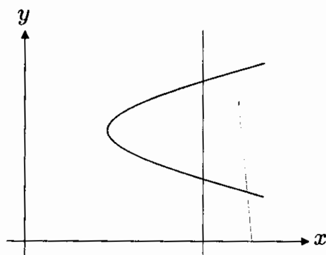


FIGURA 2.23 Esta gráfica no representa una función.

La gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ (véase Figura 2.13) es el típico ejemplo de una curva que *no* representa una función, puesto que no pasa el test de recta vertical. La recta vertical $x = a$, para cualquier a tal que $-4 < a < 4$ corta a la circunferencia en *dos* puntos. Cuando se resuelve la ecuación $x^2 + y^2 = 16$ respecto de y, se obtiene $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$. Nótese que la semicircunferencia superior es la gráfica de la función $y = \sqrt{16 - x^2}$ y la inferior es la gráfica de la función $y = -\sqrt{16 - x^2}$. Ambas funciones están definidas en el intervalo $[-4, 4]$.

Elección de unidades

Una función de una variable es una regla que asigna números del rango a números del dominio. Cuando describimos una relación empírica mediante una función, debemos primero elegir las unidades de medida. Por ejemplo, podríamos medir el tiempo en años, días o semanas. Podríamos medir el dinero en dólares, yenes o francos. La elección que se haga puede influenciar la impresión visual que se trata de transmitir con la gráfica de una función.

En la Figura 2.24 se da un ejemplo de una técnica estándar que se usa frecuentemente para influenciar la impresión que el público tiene de las relaciones empíricas. En ambos casos se mide

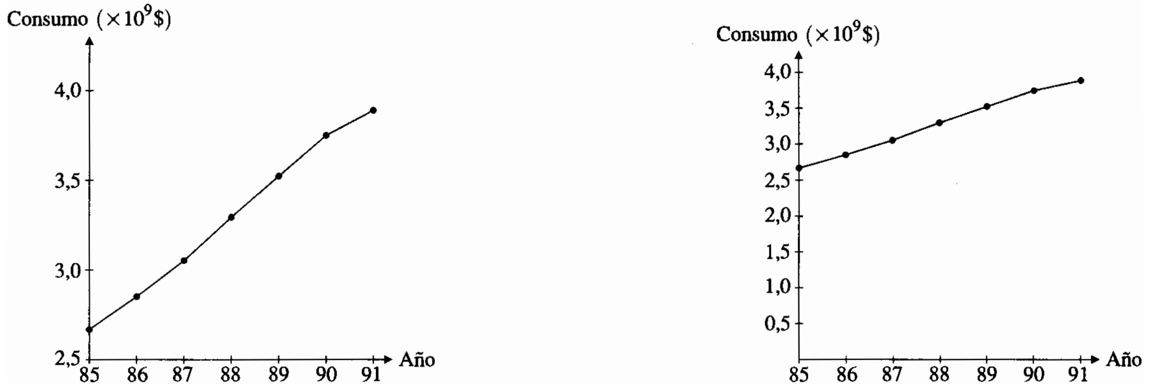


FIGURA 2.24 Representaciones gráficas de la función definida en la Tabla 2.1 con unidades de medida distintas.

el tiempo en años y el consumo en miles de millones de dólares. Ambas gráficas representan la misma función. (¿Cuál de ellas cree el lector que preferirán los Republicanos de EE.UU. para su propaganda y cuál los Demócratas?)

Desplazamiento de gráficas

Dada la gráfica de una función f, es útil a veces saber cómo dibujar las gráficas de las siguientes funciones relacionadas con ella:

$$f(x)+c, \qquad f(x+c), \qquad -f(x), \qquad \text{y} \qquad f(-x) \tag{2.4}$$

En el Problema 3 de esta sección se pide estudiar esas gráficas en general. Aquí vamos a considerar un ejemplo económico sencillo.

Ejemplo 2.11

Supongamos que una persona que gana y (dólares) en un año dado paga $f(y)$ (dólares) de impuestos. El gobierno decide rebajar los impuestos. Una propuesta consiste en permitir a todos los individuos deducir d dólares de la base imponible antes de calcular el impuesto. Una propuesta alternativa es la de calcular el impuesto sobre la base imponible total y luego deducir c dólares de este impuesto. Representar gráficamente estas dos propuestas para una función de impuestos "normal" y calcular la cifra y^* de ingresos para el caso en que las dos propuestas lleven a la misma cotización.

Solución: La Figura 2.25 describe la situación. Primero se dibuja la gráfica de la función de impuestos original, $T = f(y)$. Si la base imponible es y y la deducción es d, entonces la base imponible reducida es $y - d$ y el impuesto es $f(y - d)$. Desplazando la gráfica original d unidades a la derecha[2] obtenemos la gráfica de $T_1 = f(y - d)$. La gráfica de $T_2 = f(y) - c$ se obtiene al bajar la de $T = f(y)$ c unidades. La cifra y^* de ingresos que produce el mismo impuesto en los dos esquemas distintos es el valor de y que verifica la ecuación

$$f(y - d) = f(y) - c$$

Éste es el valor de y que se designa por y^* en la figura.

---

[2] Un ejemplo: $y = x^2$ representa una parábola, mientras que $y = (x-1)^2$ representa la parábola obtenida desplazando la primera una unidad a la derecha.

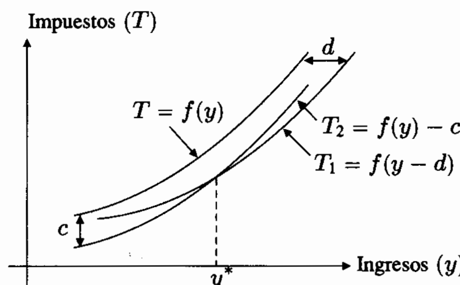


FIGURA 2.25 Las gráficas de $T_1 = f(y - d)$ y $T_2 = f(y) - c$.

Problemas

1 Determinar el dominio en el que cada una de las ecuaciones siguientes define a y como función de x:

(a) $y = x + 2$ (b) $y = \pm\sqrt{x}$ (c) $y = x^4$ (d) $y^4 = x$

(e) $x^2 - y^2 = 1$ (f) $y = \dfrac{x}{x-3}$ (g) $y^3 = x$ (h) $x^3 + y^3 = 1$

2 Se da la gráfica de una función f en la Figura 2.26.

(a) Hallar $f(-5)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$ y $f(4)$ inspeccionando esta gráfica.

(b) Hallar el dominio y el rango de f.

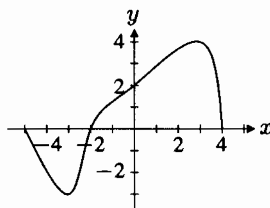


FIGURA 2.26

3 Explicar cómo se obtienen las gráficas de las cuatro funciones definidas en (2.4) conocida la gráfica de $y = f(x)$.

4 Úsense las reglas obtenidas en el Problema 3 para dibujar las gráficas de las funciones siguientes:

(a) $y = x^2 + 1$ (b) $y = (x+3)^2$ (c) $y = 3 - (x+1)^2$ (d) $y = 2 - (x+2)^{-2}$

2.5 FUNCIONES LINEALES

Una *relación lineal* entre las variables x e y es de la forma

$$y = ax + b \qquad (a \text{ y } b \text{ constantes})$$

La gráfica de la ecuación es una recta. Si designamos por f a la función que asigna y a x, entonces $f(x) = ax + b$ y f se llama una función **lineal**.[3] El número a se llama la **pendiente** de la función y de la recta. Elíjase un valor arbitrario de x. Entonces $f(x+1) - f(x) = a(x+1) + b - ax - b = a$. Esto indica que la pendiente a se puede interpretar como el cambio en el valor de la función cuando x aumenta en 1 unidad.

---

[3] De hecho los matemáticos reservan normalmente el nombre de "lineal" para las funciones definidas por $y = ax$ (con $b = 0$, la intersección con el eje y). En cambio a $y = ax + b$ con $b \neq 0$ la llaman una función "afín". La mayoría de los economistas llaman a $f(x) = ax + b$ una función lineal.

Si la pendiente a es positiva, la recta está inclinada hacia arriba a la derecha y, mientras mayor es el valor de a, más vertical es. Por otra parte, si a es negativa, la recta está inclinada hacia abajo a la derecha, y el valor absoluto de a mide la cuantía de esta inclinación, Por ejemplo, cuando $a = -3$, la cuantía de la inclinación es 3. En el caso particular en que $a = 0$ es $y = ax + b = b$ para todo x, y la recta es paralela al eje x. Los tres casos se recogen en las Figuras 2.27 a 2.29. Si $x = 0$, entonces $y = ax + b = b$ y b se llama la **intersección** con el eje y (o simplemente la intersección).

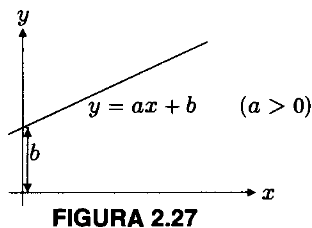


FIGURA 2.27

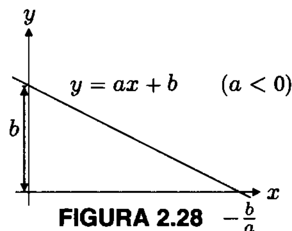


FIGURA 2.28

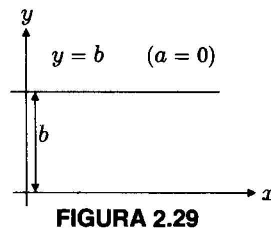


FIGURA 2.29

Ejemplo 2.12

Calcular e interpretar las pendientes de las rectas siguientes:

(a) $C = 55{,}73x + 182.100.000$, que es la función de costes estimada para la U.S. Steel Corp. en el periodo 1917–1938 (C es el coste total en dólares por año y x es la producción de acero en toneladas por año).

(b) $q = -0{,}15p + 0{,}14$, que es la función estimada de demanda anual de arroz en India en el periodo 1949–1964 (p es el precio y q es el consumo por persona).

Solución:

(a) La pendiente es 55,73, lo que significa que si la producción aumenta en 1 tonelada, el coste *aumenta* 55,73$.

(b) La pendiente es $-0{,}15$ lo que nos dice que, si el precio aumenta en 1 unidad, entonces la cantidad demandada *disminuye* 0,15 unidades.

Cálculo de la pendiente

Consideremos una recta arbitraria del plano que no sea vertical (i.e., paralela al eje y). Tómense dos puntos distintos en ella, $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, como se ilustra en la Figura 2.30. Puesto que la recta no es vertical y puesto que P y Q son distintos, $x_1 \neq x_2$. La pendiente de la recta es entonces el cociente $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Si designamos por a a esta pendiente, entonces se verifica lo siguiente:

> La **pendiente de una recta** r es
>
> $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2 \tag{2.5}$$
>
> donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos distintos cualesquiera de r.

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ por -1, se obtiene $(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$. Esto prueba que no influye el orden en que se tomen P y Q. Más aún, usando

Las fórmulas punto–pendiente y punto–punto

Vamos a hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (x_1, y_1)$ y tiene pendiente a. Si (x, y) es cualquier otro punto de la recta, la pendiente a viene dada por la fórmula (2.5):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$$

Multiplicando cada miembro por $x - x_1$, se obtiene $y - y_1 = a(x - x_1)$, luego la siguiente:

Fórmula punto–pendiente para una recta

La ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y tiene pendiente a es

$$y - y_1 = a(x - x_1) \tag{2.6}$$

Nótese que, al usar la ecuación (2.6), x_1 y y_1 son números fijos, que expresan las coordenadas de un punto fijo. Por otra parte, x e y son variables que designan un punto arbitrario de la recta.

Ejemplo 2.15

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 3)$ y tiene pendiente -4. Hallar el punto en que esta recta corta al eje x.

Solución: La fórmula punto–pendiente con $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ y $a = -4$ da

$$y - 3 = (-4)[x - (-2)] \qquad \text{ó} \qquad y - 3 = -4(x + 2) \tag{1}$$

La recta corta al eje x en el punto en el que $y = 0$, esto es, donde $0 - 3 = -4(x + 2)$ ó $-3 = -4x - 8$. Resolviendo esta ecuación en x se obtiene $x = -5/4$, luego el punto de intersección con el eje x es $(-5/4, 0)$.

A menudo necesitamos hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados. Combinando (2.5) y (2.6), se obtiene la fórmula siguiente:

Fórmula punto–punto para una recta

La ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2), donde $x_1 \neq x_2$, se obtiene como sigue:

1. Calcúlese la pendiente de la recta:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Sustitúyase la expresión de a en la fórmula punto–pendiente $y - y_1 = a(x - x_1)$. El resultado es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.16

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 3)$ y $(5, -2)$.

Solución: Sea $(x_1, y_1) = (-1, 3)$ y $(x_2, y_2) = (5, -2)$. Entonces la fórmula punto–punto da

$$y - 3 = \frac{-2-3}{5-(-1)}[x-(-1)] \quad \text{ó} \quad y - 3 = -\frac{5}{6}(x+1) \quad \text{ó} \quad 5x + 6y = 13$$

Modelos lineales

Las relaciones lineales aparecen frecuentemente en modelos aplicados. La relación entre la temperatura en grados Celsius y Fahrenheit es un ejemplo de relación lineal exacta entre dos variables. La mayoría de los modelos lineales en economía son aproximaciones de modelos más complicados. El Ejemplo 2.12 contiene dos relaciones lineales típicas. Se han diseñado métodos estadísticos para construir funciones lineales que aproximen datos reales lo más fielmente posible. Consideremos un intento muy ingenuo de construir un modelo lineal basado en algunos datos.

Ejemplo 2.17

En un informe de Naciones Unidas, la población Europea en 1960 se estimaba en 641 millones de personas y en 1970 en 705 millones. Usar esas estimaciones para construir una función lineal de t que aproxime la población de Europa (en millones), donde t es el número de años transcurridos desde 1960 ($t = 0$ es 1960, $t = 1$ es 1961, y así sucesivamente). Usar la ecuación para estimar la población en 1975 y en el año 2000. ¿Cómo se estimaría la población en 1930 sobre la base de esta relación lineal?

Solución: Si P designa a la población en millones, construimos una ecuación de la forma $P = at + b$. Sabemos que la gráfica debe pasar por los puntos $(t_1, P_1) = (0, 641)$ y $(t_2, P_2) = (10, 705)$. Usando la fórmula de (2.7) sustituyendo x e y por t y P, respectivamente, se obtiene

$$P - 641 = \frac{705-641}{10-0}(t-0) = \frac{64}{10}t$$

o lo que es lo mismo,

$$P = 6{,}4t + 641 \tag{1}$$

En la Tabla 2.4, hemos comparado nuestras estimaciones con las predicciones de la ONU. Nótese que, ya que $t = 0$ corresponde a 1960, $t = -30$ corresponderá a 1930.

TABLA 2.4 *Estimaciones de la población europea*

Año	1930	1975	2000
t	−30	15	40
Estimaciones ONU	573	728	854
La Fórmula (1) da	449	737	897

Nótese que la pendiente de la recta (1) es de 6,4. Esto significa que, si la población europea se hubiese desarrollado de acuerdo con estas previsiones, el aumento anual de población hubiese sido constante, igual a 6,4 millones

De hecho, la población europea creció inusualmente deprisa durante los sesenta. También había crecido inusualmente despacio cuando murieron millones durante la guerra de los años 1939–1945. Vemos que la fórmula (1) no da buenos resultados en comparación con las estimaciones de la ONU (véase el Ejemplo 3.12 de la Sección 3.5 para un modelo mejor del crecimiento de la población.)

Ejemplo 2.18 (**La función de consumo**)

En teoría macroeconómica keynesiana se supone que el gasto total C de consumo de bienes y servicios es una función de la renta nacional Y, que se representa por

$$C = f(Y) \tag{2.8}$$

En muchos modelos se supone que la función de consumo es lineal, luego que

$$C = a + bY$$

La pendiente b se llama la **propensión marginal al consumo**. Si C e Y se miden en millones de dólares, el número b nos indica en cuántos millones de dólares aumenta el consumo si la renta nacional aumenta en 1 millón de dólares. Normalmente el número b está entre 0 y 1.

En un estudio de la economía de EE.UU. durante el periodo 1929–1941, T. Haavelmo halló la siguiente función de consumo:

$$C = 95{,}05 + 0{,}712Y$$

Aquí la propensión marginal al consumo es 0,712.

Ejemplo 2.19

Otros ejemplos de funciones lineales en el campo económico son las planificaciones de oferta y demanda siguientes:

$$D = a - bP$$
$$S = \alpha + \beta P$$

En estas fórmulas, a y b (ambos positivos) son parámetros de la función de demanda D, y α y β (ambos positivos) son parámetros de la función de oferta.

Estas funciones desempeñan un papel importante en economía cuantitativa. Ocurre a menudo que el mercado de un determinado bien de consumo, tal como el de una marca específica de disquetes de ordenador de $3\frac{1}{2}$ pulgadas, se puede representar aproximadamente por funciones lineales de oferta y demanda. El precio de equilibrio P^e debe igualar la demanda a la oferta, luego $D = S$ para $P = P^e$. Así,

$$a - bP^e = \alpha + \beta P^e$$

Sumando $bP^e - \alpha$ a ambos lados de la ecuación se tiene

$$a - bP^e + bP^e - \alpha = \alpha + \beta P^e + bP^e - \alpha$$

Así, $a - \alpha = (\beta + b)P^e$. La correspondiente cantidad de equilibrio es $Q^e = a - bP^e$. Por tanto hay equilibrio cuando

$$P^e = \frac{a - \alpha}{\beta + b}, \qquad Q^e = a - b\frac{a - \alpha}{\beta + b} = \frac{a\beta + \alpha b}{\beta + b}$$

Si se conocieran los cuatro parámetros a, b, α y β, el modelo estaría completo y se podrían predecir la cantidad y precio de equilibrio.

Supongamos que hay una desviación posterior en la función de demanda u oferta—por ejemplo, supongamos que la oferta crece y S se convierte en $\tilde{\alpha} + \beta P$, donde $\tilde{\alpha} > \alpha$. Entonces podemos predecir nuevos valores de equilibrio para la cantidad y el precio, en este caso van a ser

$$\tilde{P}^e = \frac{a - \tilde{\alpha}}{\beta + b}, \qquad \tilde{Q}^e = \frac{a\beta + \tilde{\alpha} b}{\beta + b}$$

Se ve que $\tilde{P}^e$ es menor que P^e, mientras que $\tilde{Q}^e$ es mayor que Q^e. En efecto,

$$\tilde{P}^e - P^e = \frac{\alpha - \tilde{\alpha}}{\beta + b} \quad \text{y} \quad \tilde{Q}^e - Q^e = \frac{(\tilde{\alpha} - \alpha)b}{\beta + b} = -b(\tilde{P}^e - P^e)$$

Esto está de acuerdo con la Figura 2.34. La desviación a la derecha de la curva de oferta, desde S hasta $\tilde{S}$ desplaza el equilibrio hacia abajo a la derecha sobre la curva de demanda, que no cambia.

Una peculiaridad de la Figura 2.34 es que, aunque la cantidad es función del precio, ponemos a éste en el eje vertical y a aquélla en el horizontal. Esto ha sido una práctica estándar en teoría elemental de precios desde el trabajo de Alfred Marshall al final del siglo XIX.

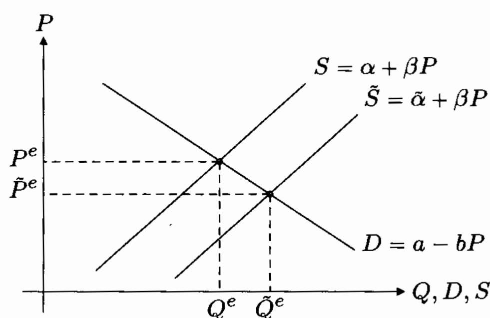


FIGURA 2.34

El problema con este método de análisis surge cuando no se conocen los parámetros, luego no se pueden dibujar con precisión las curvas de oferta y demanda. De hecho, si todo lo que observa un economista es una bajada de precio y una subida de la cantidad, de (P^e, Q^e) a $(\tilde{P}^e, \tilde{Q}^e)$, no tiene manera de saber (sin más información) si este resultado proviene solamente de un desplazamiento hacia la derecha de la curva de oferta (véase Figura 2.34), o de alguna combinación de un desplazamiento a la derecha (o a la izquierda) de la demanda *y* un desplazamiento a la derecha en la oferta, como se ve en las Figuras 2.35 y 2.36. Lo más que se puede decir es que, puesto que el precio de equilibrio cae, debe haber algún desplazamiento a la derecha de la oferta —pero la demanda puede haber descendido, crecido o permanecido igual. Además, existe la posibilidad de que las curvas de oferta y demanda hayan cambiado de pendientes, esto es, los parámetros b y β pueden haber cambiado también.

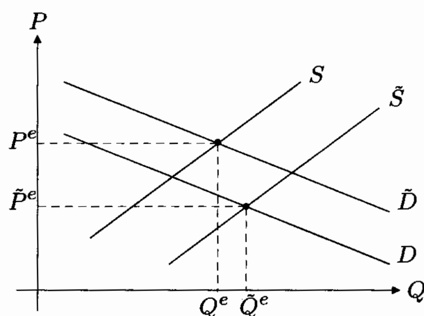


FIGURA 2.35

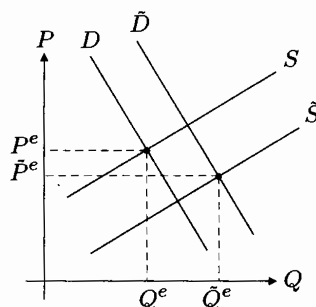


FIGURA 2.36

La ecuación general de la recta

Toda recta del plano que no es vertical tiene una ecuación del tipo $y = ax + b$. Una recta vertical, esto es, paralela al eje y cortará el eje x en un punto $(c, 0)$. Todo punto de la recta va a tener, por tanto, la misma coordenada x, luego su ecuación será

$$x = c$$

Ésta es la ecuación de la recta que pasa por $(c, 0)$ *y es paralela al eje* y.

Las ecuaciones $y = ax + b$ y $x = c$ se pueden escribir de forma unificada como

$$Ax + By + C = 0 \tag{2.9}$$

para valores adecuados de las constantes A, B, y C. Concretamente, $y = ax + b$ corresponde a $A = a$, $B = -1$ y $C = b$, mientras que $x = c$ corresponde a $A = 1$, $B = 0$, y $C = -c$. Recíprocamente, toda ecuación de la forma (2.9) representa una recta en el plano, descartando el caso en que $A = B = 0$. Si $B = 0$, se deduce de (2.9) que $Ax = -C$ o, lo que es lo mismo, que $x = -C/A$. Ésta es la ecuación de una recta paralela al eje y.

Por otra parte, si $B \neq 0$, resolviendo (2.9) en y se obtiene

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Ésta es la ecuación de una recta de pendiente $-A/B$. Así, la ecuación (2.9) se llama la *ecuación general de la recta en el plano* porque representa a todas las rectas cuando se varían los coeficientes A, B y C arbitrariamente.

Resolución gráfica de ecuaciones lineales

La Sección A.9 del Apéndice A trata de métodos algebraicos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sin embargo, aquí vamos a dar un avance geométrico —gráfico de cómo resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Las ecuaciones son lineales, luego sus gráficas son rectas. Las coordenadas de cada punto de una recta verifican la ecuación de la recta. Así, las coordenadas de un punto de intersección de dos rectas verificarán ambas ecuaciones. Esto significa que cualquier punto de intersección es solución del sistema.

Ejemplo 2.20

Resolver gráficamente cada uno de los tres pares siguientes de ecuaciones:

$$\text{(a)}\ \begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= -1 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\ \begin{aligned} 3x + y &= -7 \\ x - 4y &= 2 \end{aligned} \qquad \text{(c)}\ \begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 6x + 8y &= 24 \end{aligned}$$

Solución:

(a) La Figura 2.37 contiene las gráficas de las rectas $x + y = 5$ y $x - y = -1$. Hay un solo punto de intersección, que es $(2, 3)$. La solución del sistema es, pues, $x = 2$, $y = 3$.

(b) La Figura 2.38 contiene las gráficas de las rectas $3x + y = -7$ y $x - 4y = 2$. Hay un solo punto de intersección, que es $(-2, -1)$. La solución del sistema es, pues, $x = -2$, $y = -1$.

(c) La Figura 2.39 contiene las gráficas de las rectas $3x + 4y = 2$ y $6x + 8y = 24$. Esas rectas son paralelas, luego no se cortan. Así el sistema no tiene solución.

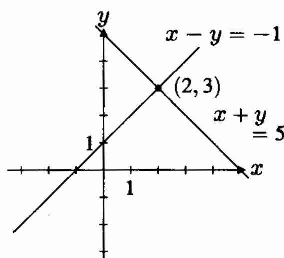


FIGURA 2.37

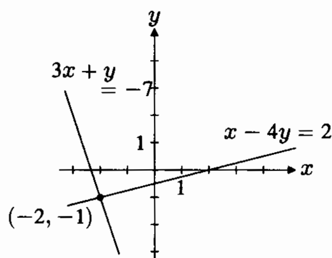


FIGURA 2.38

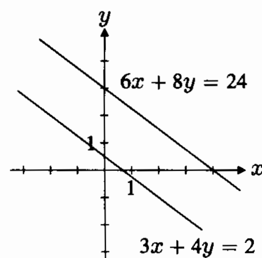


FIGURA 2.39

Desigualdades lineales

Terminamos el capítulo estudiando cómo representar gráficamente desigualdades lineales. Consideremos dos ejemplos.

Ejemplo 2.21

Dibujar en el plano el conjunto de todos los pares de números (x, y) que verifican la desigualdad $2x + y \leq 4$. (Usando la notación de la teoría de conjuntos, éste es $\{(x, y) : 2x + y \leq 4\}$.)

Solución: Se puede escribir la desigualdad en la forma $y \leq -2x + 4$. El conjunto de los puntos (x, y) que verifican la ecuación $y = -2x + 4$ es una recta. Por tanto, el conjunto de los puntos (x, y) que verifican la desigualdad $y \leq -2x + 4$ debe tener los valores de y por debajo de la recta $y = -2x + 4$. Así debe constar de todos los puntos que están en la recta o debajo de ella (véase Figura 2.40.)

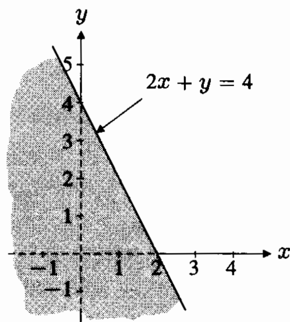


FIGURA 2.40 $\{(x, y) : 2x + y \leq 4\}$.

Ejemplo 2.22

Una persona tiene m dólares para gastar comprando dos tipos de bienes. Los precios respectivos son de p y q dólares por unidad. Supongamos que compra x unidades del primero e y unidades del segundo. Suponiendo también que no puede comprarse un número negativo de unidades, el *conjunto presupuestario* es

$$B = \{(x, y) : \ px + qy \leq m, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$$

(véase (1.7), Sección 1.7.) Dibujar el conjunto presupuestario B en el plano xy. Hallar la pendiente de la recta presupuestaria $px + qy = m$ y sus puntos de intersección con los dos ejes coordenados.

Solución: El conjunto de los puntos (x, y) que verifican que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ se dibujó en la Figura 2.10: Es el primer cuadrante. Si imponemos el requerimiento adicional de que $px + qy \leq m$, obtenemos el dominio triangular B que muestra la Figura 2.41. Si resolvemos la ecuación

$px + qy = m$ en y, obtenemos $y = (-p/q)x + m/q$, luego la pendiente es $-p/q$. La recta presupuestaria corta al eje x en el punto en que $y = 0$, luego $px = m$ y así $x = m/p$. Esa recta corta al eje y en el punto en que $x = 0$, luego $qy = m$ y así $y = m/q$. Por tanto, los dos puntos de intersección son $(m/p, 0)$ y $(0, m/q)$, como se ve en la Figura 2.41.

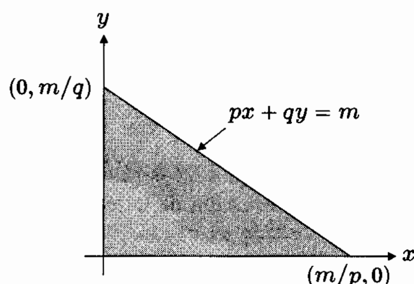


FIGURA 2.41 Conjunto presupuestario: $px + qy \leq m$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Problemas

1 Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos siguientes, usando la fórmula de (2.5).

(a) $(2, 3)$ y $(5, 8)$ (b) $(-1, -3)$ y $(2, -5)$ (c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right)$

2 Se estimó la función de consumo para el Reino Unido en el periodo 1949–1975 en $C = 4.141 + 0{,}78\,Y$. ¿Cuál es la propensión marginal al consumo?

3 Hallar las pendientes de las cinco rectas L_1 a L_5 de la Figura 2.42, y dar sus ecuaciones. (L_3 es horizontal.)

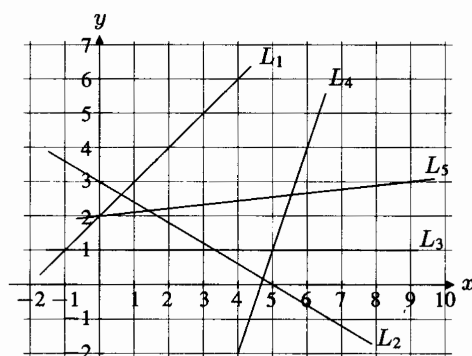


FIGURA 2.42

4 Dibujar las gráficas de las ecuaciones siguientes:

(a) $3x + 4y = 12$ (b) $\frac{x}{10} - \frac{y}{5} = 1$ (c) $x = 3$

5 Decir cuáles de las siguientes relaciones son lineales:

(a) $5y + 2x = 2$ (b) $P = 10(1 - 0{,}3t)$ (c) $C = (0{,}5x + 2)(x - 3)$

(d) $p_1x_1 + p_2x_2 = R$ (p_1, p_2, y R constantes)

6 (a) Determinar la relación entre las escalas de temperaturas centígrada y Fahrenheit sabiendo que (i) la relación es lineal; (ii) el agua se congela a $0°C$ y $32°F$; (iii) el agua hierve a $100°C$ y $212°F$.

(b) ¿Qué temperatura viene representada por el mismo número en ambas escalas?

7 Hallar las ecuaciones y representar gráficamente las siguientes rectas:

(a) L_1 que pasa por $(1, 3)$ y tiene pendiente 2.

(b) L_2 que pasa por $(-2, 2)$ y $(3, 3)$.

(c) L_3 que pasa por el origen y tiene pendiente $-1/2$.

(d) L_4 que pasa por $(a, 0)$ y $(0, b)$ (se supone $a \neq 0$).

8 Una recta L pasa por $(1, 1)$ y tiene pendiente 3. Otra recta M pasa por $(-1, 2)$ y $(3, -1)$. Hallar las ecuaciones de L y M, así como su punto de intersección P. Hallar la ecuación de la recta N que pasa por $(-1, -1)$ y es paralela a M. Representar gráficamente.

9 El coste total y de producir x unidades de un cierto bien es una función lineal. En una ocasión, se hicieron 100 unidades con un coste total de 200\$, y en otra se hicieron 150 unidades por 275\$. Hallar la ecuación lineal para el coste total en términos del número x de unidades producidas.

10 Calcular el precio de equilibrio en el modelo del Ejemplo 2.19 para los datos siguientes:

(a) $D = 75 - 3P, \quad S = 20 + 2P$ (b) $D = 100 - 0{,}5P, \quad S = 10 + 0{,}5P$

11 Según el vigésimo informe de la Comisión Internacional de las Ballenas, el número N de éstas en el Antártico, durante el periodo 1958–1963, estaba descrito por la función

$$N = -17.400t + 151.000, \qquad 0 \leq t \leq 5$$

donde $t = 0$ corresponde a enero de 1958, $t = 1$ corresponde a enero de 1959 y así sucesivamente.

(a) Usando esta ecuación, calcular cuántas ballenas habrá en abril de 1960

(b) Si el número sigue decreciendo a la misma velocidad, ¿cuándo se acabarán las ballenas? (De hecho, en 1993 había aproximadamente 21.000.)

12 El gasto C de un hogar en bienes de consumo está relacionado con el ingreso familiar y de la manera siguiente: Cuando los ingresos son de 1.000 dólares se gastan 900, y cada vez que los ingresos aumentan en 100\$ los gastos lo hacen en 80\$. Suponiendo que la relación entre ingresos y gastos es lineal, hallar la función que la describe.

13 Resolver gráficamente los tres sistemas de ecuaciones siguientes:

(a) $\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x + \ \ y &= 2 \\ x - 2y &= 2 \\ x - \ \ y &= 2 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 1 \\ 6x + 8y &= 6 \end{aligned}$

14 Probar que la pendiente de la recta que pasa por P y Q en la Figura 2.43 es $-1/[x_0(x_0 + h)]$.

15 La tabla siguiente muestra el consumo total y la renta nacional neta de un cierto país en el periodo 1955–1960, expresados en millones de dólares. Representar los puntos de la tabla en el plano YC. Dibujar la recta que pasa por los "puntos extremos" (21,3 , 17,4) y (24,7 , 20,4). Hallar la ecuación de esta recta. ¿Cómo se interpreta su pendiente?

TABLA 2.5

Año	*1955*	*1956*	*1957*	*1958*	*1959*	*1960*
Consumo total (C)	*17,4*	*18,0*	*18,4*	*18,6*	*19,3*	*20,4*
Producto nacional neto (Y)	*21,3*	*22,4*	*23,0*	*22,6*	*23,4*	*24,7*

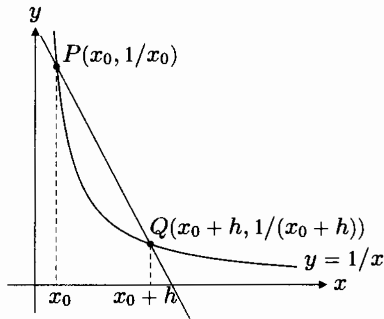


FIGURA 2.43

16 Dibujar en el plano xy el conjunto de todos los pares de números (x, y) que verifican las desigualdades siguientes:

(a) $2x + 4y \geq 5$ (b) $x - 3y + 2 \leq 0$ (c) $100x + 200y \leq 300$

17 Dibujar en el plano xy el conjunto de todos los pares de números (x, y) que verifican simultáneamente las tres desigualdades siguientes: $3x + 4y \leq 12$; $x - y \leq 1$; y $3x + y \geq 3$.

3

Polinomios, potencias y exponenciales

Ahora ha quedado completamente establecida la paradoja
de que las abstracciones más extremas constituyen las armas verdaderas
para controlar nuestra reflexión sobre hechos concretos.
—A.N. Whitehead

Las funciones lineales y los modelos lineales asociados, que estudiamos en el capítulo anterior con un cierto detalle, son particularmente sencillos. No debe sorprendernos que la mayoría de las aplicaciones económicas requieran más precisión que la que las funciones lineales pueden ofrecer, y así los economistas usan a menudo funciones más complicadas.

3.1 FUNCIONES CUADRÁTICAS

Muchos modelos económicos requieren funciones que, o bien decrecen hasta un valor mínimo para crecer después, o bien crecen hasta un máximo para decrecer después. Las funciones más sencillas con esta propiedad son las funciones **cuadráticas** generales

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a,\, b,\, c \text{ constantes, } a \neq 0) \tag{3.1}$$

(Si $a = 0$, la función es lineal y por eso la condición de que $a \neq 0$.) La Figura 2.20 de la Sección 2.4 muestra la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x$, que se obtiene de (3.1) haciendo $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$. En general, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se llama **parábola**. La forma de la parábola se parece a $\cap$ cuando $a < 0$ y a $\cup$ cuando $a > 0$. La Figura 3.1 recoge tres casos típicos.

Para comprender más profundamente la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, nos interesa responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Para qué valores de x (si los hay) es $ax^2 + bx + c = 0$?
2. ¿Qué coordenadas tiene el máximo o mínimo P?

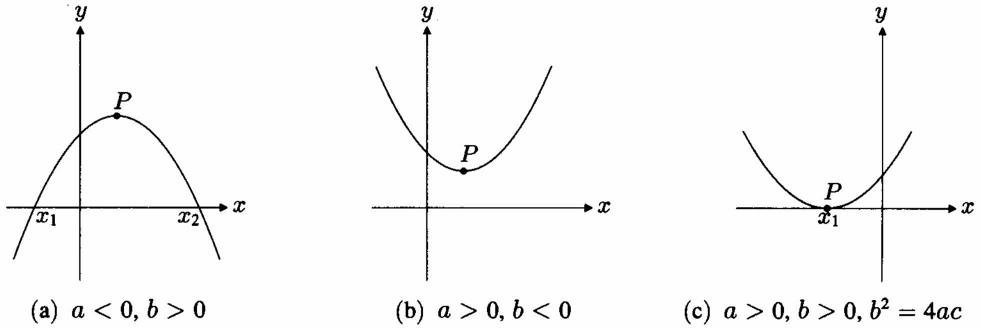


FIGURA 3.1 Gráficas de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

Para responder a la pregunta 1 hay que resolver la ecuación $f(x) = 0$. En términos geométricos esto significa hallar los puntos de intersección de la parábola con el eje x. Esos puntos se llaman los **ceros** de la función cuadrática. En la Figura 3.1(a), los ceros están representados por x_1 y x_2, en la Figura 3.1(b) no hay ceros, mientras que el gráfico de la Figura 3.1(c) tiene un único punto x_1 de intersección con el eje x. Se prueba en la Sección A.8 del Apéndice A que, si $b^2 \geq 4ac$ y $a \neq 0$, entonces

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.2}$$

que es la expresión de las dos raíces de una ecuación de segundo grado. Para demostrar esta fórmula, hemos usado en el Apéndice A el método conocido bajo el nombre de "completar el cuadrado". Esta técnica nos va a servir también para contestar a la pregunta 2. En efecto, cuando $a \neq 0$, se puede escribir la función (3.1) así

$$f(x) = a\left[x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{3.3}$$

Considérese la expresión después del segundo signo de igualdad de (3.3). Cuando x varía, sólo cambia el valor de $a(x + b/2a)^2$. Este término es igual a 0 si $x = -b/2a$, y si $a > 0$, no es nunca negativo. Esto significa que, si $a > 0$, la función $f(x)$ alcanza un mínimo para $x = -b/2a$, y el valor de $f(x)$ es entonces igual a $f(-b/2a) = -(b^2 - 4ac)/4a = c - b^2/4a$. De otro lado, si $a < 0$, entonces $a(x + b/2a)^2 \leq 0$ para todo x y el cuadrado es igual a 0 cuando $x = -b/2a$. Por tanto, $f(x)$ alcanza un máximo para $x = -b/2a$ en este caso. Resumiendo, hemos probado lo siguiente:

Si $a > 0$, entonces $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene **mínimo** en

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Si $a < 0$, entonces $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un **máximo** en

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

(3.4)

Si el lector tiene dificultades en seguir el razonamiento para deducir (3.4), debe estudiar con cuidado los ejemplos que siguen.

Ejemplo 3.1

Completar el cuadrado, como en (3.3), para las funciones siguientes y hallar el máximo o mínimo de cada una:

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (b) $f(x) = -2x^2 + 40x - 600$ (c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

Solución:

(a) $x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x) + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1$
La expresión $(x - 2)^2 - 1$ alcanza el mínimo -1 para $x = 2$.

(b)
$$\begin{aligned} -2x^2 + 40x - 600 &= -2(x^2 - 20x) - 600 \\ &= -2(x^2 - 20x + 100) + 200 - 600 \\ &= -2(x - 10)^2 - 400 \end{aligned}$$

La expresión $-2(x - 10)^2 - 400$ alcanza el máximo -400 para $x = 10$.

(c)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{8}{3} &= \tfrac{1}{3}(x^2 + 2x) - \tfrac{8}{3} \\ &= \tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 1) - \tfrac{1}{3} - \tfrac{8}{3} \\ &= \tfrac{1}{3}(x + 1)^2 - 3 \end{aligned}$$

La expresión $\frac{1}{3}(x + 1)^2 - 3$ alcanza el mínimo -3 para $x = -1$.

Un ejercicio útil es resolver los tres casos del Ejemplo 3.1 directamente usando las fórmulas de (3.4), sustituyendo los parámetros a, b y c por los valores correspondientes. Comprobar que se obtienen los mismos resultados.

Problemas

1 (a) Sea $f(x) = x^2 - 4x$. Rellenar la tabla siguiente:

x	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)							

(b) Usando la tabla anterior, dibujar la gráfica de f.

(c) Usando (3.3), determinar el mínimo.

(d) Resolver la ecuación $f(x) = 0$.

2 (a) Sea $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$. Rellenar la tabla siguiente:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)							

(b) Usar la información de la parte (a) para dibujar la gráfica de f.

(c) Usando (3.3), determinar el máximo.

(d) Resolver la ecuación $-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$ en x.

(e) Probar que $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)(x + 3)$ y usarlo para estudiar la variación de signo de f cuando x varía. Comparar el resultado con la gráfica.

3 Completar los cuadrados como en (3.3) en las siguientes funciones cuadráticas y determinar su máximo o mínimo:

(a) $x^2 + 4x$ (b) $x^2 + 6x + 18$ (c) $-3x^2 + 30x - 30$

(d) $9x^2 - 6x - 44$ (e) $-x^2 - 200x + 30.000$ (f) $x^2 + 100x - 20.000$

4 Hallar los ceros de cada una de las funciones cuadráticas del Problema 3, escribiéndolas en la forma $a(x - x_1)(x - x_2)$ (si es posible).

5 Usar la fórmula de (3.2) para hallar las soluciones de las ecuaciones siguientes, suponiendo que p y q son parámetros positivos.

(a) $x^2 - 3px + 2p^2 = 0$ (b) $x^2 - (p + q)x + pq = 0$ (c) $x^2 + px + q = 0$

6 Se da una cuerda de longitud L a una persona para que delimite un área rectangular.

(a) Si uno de los lados es x, probar que el área delimitada es $A(x) = Lx/2 - x^2$, con $0 \leq x \leq L/2$. Hallar x para que el área sea máxima.

(b) ¿Delimitará una circunferencia de longitud L un área mayor que la que hemos hallado en (a)? (Se sabe que algunos agrimensores de la antigüedad redactaron contratos de venta de parcelas en los cuales sólo se especificaba el perímetro. El resultado fue que los lotes constaban de rectángulos muy alargados y estrechos.)

7 Considérese la función dada por la fórmula $A = 500x - x^2$, como en el Ejemplo 1.1 de la Sección 1.3. ¿Para qué valor de x se alcanza el mayor valor del área A?

8 (a) Resolver $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. (*Indicación:* Hacer $x^2 = u$ formando una ecuación cuadrática en u.)

(b) Resolver las ecuaciones (i) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ y (ii) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

9 En la teoría de mercados eficientes de créditos aparece un modelo dado por la función

$$U(x) = 72 - (4 + x)^2 - (4 - rx)^2$$

donde r es una constante. Calcular el valor de x para el cual $U(x)$ alcanza un máximo.

10 Hallar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, -3)$, $(0, -6)$, $(3, 15)$. (*Indicación:* Calcular a, b, c.)

Problemas avanzados

11 Se dice que la gráfica de una función f es *simétrica* respecto de la recta $x = p$ si

$$f(p - t) = f(p + t) \qquad \text{(para todo } t\text{)}$$

Probar que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ es simétrica respecto de la recta $x = -b/2a$. (*Indicación:* Usar (3.3).)

12 Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales cualesquiera. Afirmamos que la desigualdad siguiente (llamada la **desigualdad de Cauchy–Schwarz**) se verifica siempre:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \tag{3.5}$$

(a) Comprobar la desigualdad para (i) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$ y (ii) $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, $b_1 = 5$, $b_2 = -2$. (En ambos casos, $n = 2$.)

(b) Probar (3.5) usando el siguiente artificio: primeramente se define f, para todo x, por

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2$$

Es claro que $f(x) \geq 0$ para todo x. Escríbase $f(x)$ en la forma $Ax^2 + Bx + C$, donde A, B, C están dados en función de los términos de (3.5). Puesto que $Ax^2 + Bx + C \geq 0$ para todo x, se debe tener $B^2 - 4AC \leq 0$. ¿Por qué? De aquí se deduce la conclusión.

3.2 EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CUADRÁTICA

Una buena parte de la economía matemática trata de problemas de optimización. La economía es, después de todo, la ciencia de la elección y los problemas de optimización son la forma en que la elección se expresa matemáticamente.

Se debe posponer una discusión general de estos problemas hasta que hayamos desarrollado las herramientas necesarias en el cálculo. Aquí vamos a demostrar cómo se puede usar el cálculo del máximo de las funciones cuadráticas, que vimos en la sección anterior, para ilustrar algunas ideas económicas básicas.

Ejemplo 3.2 (Un problema de monopolio)

Consideremos una empresa que es la única que vende un cierto bien, digamos un medicamento patentado, y así tiene el monopolio. Se supone que los costes totales del monopolista vienen dados por la función cuadrática

$$C = \alpha Q + \beta Q^2, \qquad Q \geq 0 \tag{1}$$

de su nivel de producción Q, donde α y β son constantes positivas. Para cada Q, se supone que el precio P al que puede vender la producción viene determinado por la función lineal "inversa" de demanda

$$P = a - bQ, \qquad Q \geq 0 \tag{2}$$

donde a y b son constantes con $a > 0$ y $b \geq 0$. Por tanto, para todo Q no negativo, el ingreso total R viene dado por la función cuadrática

$$R = PQ = (a - bQ)Q$$

y el beneficio por la función cuadrática[1]

$$\pi(Q) = R - C = (a - bQ)Q - \alpha Q - \beta Q^2 = (a - \alpha)Q - (b + \beta)Q^2 \tag{3}$$

El objetivo del monopolista es hacer máximo $\pi = \pi(Q)$. Usando (3.4) vemos que hay un máximo de π (para el monopolista M) en

$$Q^M = \frac{a - \alpha}{2(b + \beta)} \qquad \text{con} \qquad \pi^M = \frac{(a - \alpha)^2}{4(b + \beta)} \tag{4}$$

Esto es válido si $a > \alpha$; si $a \leq \alpha$, la empresa no producirá y tendrá $Q^M = 0$ y $\pi^M = 0$. Los dos casos están recogidos en las Figuras 3.2 y 3.3. El precio y coste asociados se pueden hallar por cálculos rutinarios.

Si ponemos $b = 0$ en (2), entonces $P = a$ para todo Q. En este caso, la elección por la empresa del nivel de producción no tiene influencia en el precio y se dice que la empresa es *perfectamente competitiva*. Sustituyendo a por P en (3) y haciendo $b = 0$, vemos que el beneficio se hace máximo para una empresa perfectamente competitiva en

$$Q^* = \frac{P - \alpha}{2\beta} \qquad \text{con} \qquad \pi^* = \frac{(P - \alpha)^2}{4\beta} \tag{5}$$

---

[1] Antes se ha usado π para designar la razón constante 3,14159 ... de la longitud de una circunferencia a su diámetro. En economía, no se usa esta constante con mucha frecuencia, y así se ha llegado a usar π para designar beneficio o probabilidad.

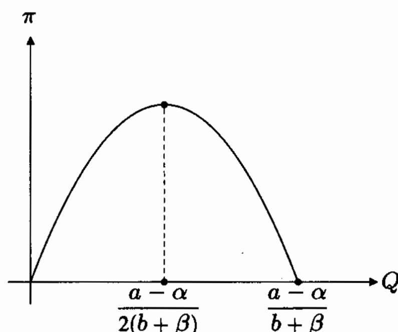


FIGURA 3.2 La función de beneficios, $a > \alpha$.

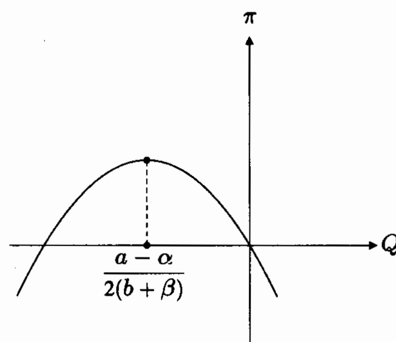


FIGURA 3.3 La función de beneficios, $a \leq \alpha$.

siempre y cuando $P > \alpha$. Si $P \leq \alpha$, es $Q^* = 0$ y $\pi^* = 0$.

Resolviendo la primera ecuación de (5) en P se obtiene $P = \alpha + 2\beta Q^*$. Así,

$$P = \alpha + 2\beta Q^* \tag{6}$$

representa la curva de oferta de la empresa perfectamente competitiva, para $P > \alpha$ cuando $Q^* > 0$, mientras que para $P \leq \alpha$, el beneficio que hace máxima la producción Q^* es 0. La curva de la Figura 3.4 es la de oferta, que relaciona el precio del mercado con la elección, por parte de la empresa, de su cantidad de producción; incluye todos los puntos entre el origen y $(0, \alpha)$.

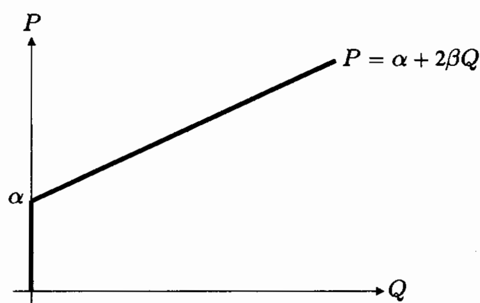


FIGURA 3.4 La curva de oferta de una empresa perfectamente competitiva.

Volvamos a la empresa monopolística (que no tiene curva de oferta). Si de alguna forma se le pudiera hacer comportar como una empresa competitiva, tomando el precio como dato, estaría en la curva de oferta (6). Dada la curva de demanda $P = a - bQ$, hay equilibrio entre oferta y demanda cuando se verifica (6) también y así $P = a - bQ = \alpha + 2\beta Q$. Resolviendo la segunda ecuación en Q y sustituyendo en P y π a su vez, vemos que el nivel de equilibrio de producción, el precio correspondiente y el beneficio serían

$$Q^e = \frac{a - \alpha}{b + 2\beta}, \qquad P^e = \frac{2a\beta + \alpha b}{b + 2\beta}, \qquad \pi^e = \frac{\beta(a - \alpha)^2}{(b + 2\beta)^2} \tag{7}$$

Para que el monopolista pueda imitar a una empresa competitiva eligiendo estar en la posición (Q^e, P^e), puede ser deseable gravar (o subvencionar) la producción. Supongamos que el monopolista debe pagar un impuesto t por unidad producida. Puesto que el pago tQ en concepto de impuestos se añade a los costes de la empresa, la nueva función de costes totales es

$$C = \alpha Q + \beta Q^2 + tQ = (\alpha + t)Q + \beta Q^2 \tag{8}$$

Después de algunos cálculos como antes, pero con $\alpha + t$ en lugar de α, se obtiene la elección de producción del monopolista:

$$Q_t^M = \begin{cases} \dfrac{a-\alpha-t}{2(b+\beta)}, & \text{si } a \geq \alpha + t \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{9}$$

Por tanto, $Q_t^M = Q^e$ cuando $(a-\alpha-t)/2(b+\beta) = (a-\alpha)/(b+2\beta)$. Resolviendo esta ecuación en t se obtiene $t = -(a-\alpha)b/(b+2\beta)$. Nótese que t es negativo, lo que indica que es deseable subvencionar la producción del monopolista para animar su aumento. (Desde luego, generalmente se considera injusto subvencionar monopolistas y hay que considerar muchas complicaciones adicionales antes de formular una política idónea para tratar a los monopolistas. El análisis anterior sugiere que, si la justicia requiere rebajar el precio o beneficio de una empresa monopolista, esto se hace mucho mejor directamente que a través de impuestos a la producción.)

Problemas

1 Una empresa importadora-exportadora de coco rallado vende Q toneladas en Inglaterra y recibe un precio dado por $P = \alpha_1 - \frac{1}{3}Q$. Por otra parte, si compra Q toneladas de su único proveedor en Ghana, tiene que pagar un precio dado por $P = \alpha_2 + \frac{1}{6}Q$. Además, le cuesta γ el transporte por tonelada, desde el proveedor en Ghana hasta los clientes en Inglaterra (su único mercado). Los números α_1, α_2 y γ positivos.

(a) Hallar el beneficio de la empresa en función de Q, número de toneladas vendidas.

(b) Suponiendo que $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma > 0$, hallar la cantidad que hace máximo el beneficio. ¿Qué ocurre si $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma \leq 0$?

(c) Supongamos que el gobierno de Ghana impone un gravamen de t por tonelada a la exportación de coco. Hallar la nueva expresión de los beneficios de la empresa y la nueva cantidad exportada.

(d) Calcular los ingresos del gobierno por este impuesto en función de t y aconsejar cómo se puede obtener el máximo posible de ingresos por este concepto.

3.3 POLINOMIOS

Después de considerar funciones lineales y cuadráticas, el siguiente paso lógico sería considerar **funciones cúbicas**, esto es, de la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a,\, b,\, c,\, d \text{ constantes; } a \neq 0) \tag{3.6}$$

Es relativamente fácil entender el comportamiento de las funciones lineales y cuadráticas a partir de sus gráficas. Las funciones cúbicas son notablemente más complicadas porque la forma de las gráficas cambia drásticamente cuando los coeficientes a, b, c, d varían. En las Figuras 3.5 y 3.6 damos dos ejemplos.

Las funciones cúbicas aparecen ocasionalmente en los modelos económicos. Veamos un ejemplo típico.

Ejemplo 3.3

Consideremos una empresa que produce un único bien. El coste total de producir Q unidades es $C(Q)$. Las funciones de costes tienen a menudo las siguientes propiedades: Primeramente, $C(0)$ es positivo, porque siempre hay un gasto inicial fijo. Cuando aumenta la producción, también aumentan los costes. Al principio los costes crecen rápidamente, pero la tasa de crecimiento se hace más pequeña a medida que el equipo de producción se va usando en proporción

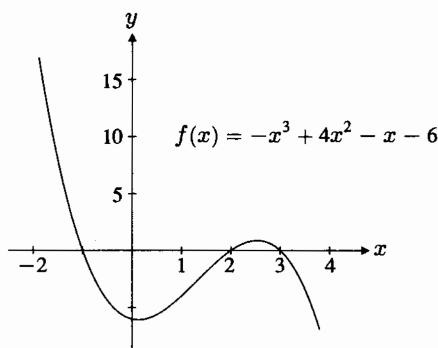


FIGURA 3.5 Una función cúbica.

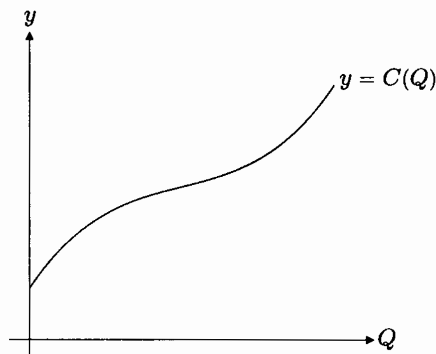


FIGURA 3.6 Una función cúbica de costes.

más alta cada semana laboral. Sin embargo, a altos niveles de producción, los costes vuelven a crecer a una tasa alta, por los cuellos de botella técnicos y por los pagos de horas extras a los trabajadores, por ejemplo. La función cúbica de costes $C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$ tiene este comportamiento cuando $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ y $d > 0$. Una función como ésta es la que representa la Figura 3.6.

Polinomios generales

Las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas son ejemplos de **polinomios**. La función P definida para todo x por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{(las } a_i \text{ son constantes y } a_n \neq 0\text{)} \tag{3.7}$$

se llama el **polinomio general de grado** n. Cuando $n = 4$ tenemos $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, que es el polinomio general de grado 4.

Muchos problemas de matemáticas y sus aplicaciones requieren polinomios. A menudo interesa hallar el número y la localización de los ceros de $P(x)$ —esto es, los valores de x tales que $P(x) = 0$. La ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{3.8}$$

se llama la **ecuación general de orden** n. Pronto demostraremos que esta ecuación tiene *a lo más* n soluciones reales, llamadas también **raíces**, pero puede no tener ninguna.

Según el **teorema fundamental del Álgebra**, se puede escribir todo polinomio de la forma (3.7) como producto de polinomios de primer y segundo grado. Un caso complicado es, por ejemplo:

$$x^5 - x^4 + x - 1 = (x-1)(x^4+1) = (x-1)\big(x^2 - \sqrt{2}x + 1\big)\big(x^2 + \sqrt{2}x + 1\big)$$

Raíces enteras

Supongamos que x_0 es un entero que verifica la ecuación cúbica $-x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$ o, equivalentemente, $-x^3 + 4x^2 - x = 6$. Entonces x_0 debe también verificar la ecuación

$$x_0(-x_0^2 + 4x_0 - 1) = 6 \tag{$*$}$$

Puesto que x_0 es entero, x_0^2, $4x_0$ y $-x_0^2 + 4x_0 - 1$ deben serlo también. Pero ya que x_0 multiplicado por el entero $-x_0^2 + 4x_0 - 1$ es igual a 6, el número x_0 debe ser un divisor de 6 —esto es, 6 deber ser divisible por x_0. Ahora bien, los únicos enteros que dividen a 6 son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6. Sustituyendo en el miembro de la izquierda de la ecuación $(*)$ se obtiene que, de las ocho

posibilidades, sólo -1, 2 y 3 son raíces de la ecuación. Como una ecuación de tercer grado tiene a lo más tres raíces, las hemos hallado todas. En general, se puede enunciar lo siguiente:

> Supongamos que a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$, a_0 son enteros. Todas las raíces enteras posibles de la ecuación
>
> $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{3.9}$$
>
> deben dividir al término independiente a_0.

Demostración: Si x_0 es una raíz entera entonces x_0 debe verificar la ecuación

$$x_0(a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + a_1) = -a_0$$

Los dos factores de la izquierda son enteros, luego $-a_0$ debe ser divisible por cada uno de ellos y, en particular, por x_0. Por tanto, a_0 debe ser divisible por x_0.

Ejemplo 3.4

Hallar todas las raíces enteras posibles de la ecuación $\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$.

Solución: Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 2 para tener una ecuación con coeficientes enteros:

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

Según (3.9), todas las soluciones enteras de la ecuación deben dividir a -2. Por tanto, sólo ± 1 y ± 2 son las posibles soluciones enteras. Comprobando se ve que $x = 2$ es la única solución entera. De hecho, puesto que $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$, hay una única raíz real.

El teorema del resto

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$. Entonces existen siempre polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x) \tag{3.10}$$

con el grado de $r(x)$ menor que el de $Q(x)$. Este resultado se llama el **teorema del resto**. Cuando x es tal que $Q(x) \neq 0$, entonces se puede escribir (3.10) de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \tag{3.11}$$

Si $r(x) = 0$ en (3.10) y (3.11) decimos que $Q(x)$ *es un divisor de* $P(x)$, o que $P(x)$ *es divisible por* $Q(x)$. En este caso, $P(x) = q(x)Q(x)$ o $P(x)/Q(x) = q(x)$, que se llama el *cociente*. Cuando $r(x) \neq 0$, se le llama el *resto*.

Un caso particular importante es cuando $Q(x) = x - a$. Entonces, $Q(x)$ es de grado 1, luego el resto $r(x)$ debe ser de grado 0 y así es una constante. Podemos escribir lo anterior en la forma

$$P(x) = q(x)(x-a) + r$$

para todo x. En particular, para $x = a$ obtenemos $P(a) = r$. *Por tanto, $x - a$ divide a $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$.*

Esta importante observación se puede formular así

$$\text{El polinomio } P(x) \text{ es divisible por } x - a \iff P(a) = 0 \qquad (3.12)$$

Se deduce de (3.12) que un polinomio $P(x)$ de grado n puede tener, *a lo más*, n ceros distintos. Para ver esto nótese que cada cero $x = a_1$, $x = a_2$, ..., $x = a_k$ produce un divisor distinto, de $P(x)$, de la forma $x - a$. Se deduce de aquí que se puede expresar $P(x)$ en la forma $P(x) = A(x)(x - a_1)\dots(x - a_k)$ donde $A(x)$ es un polinomio. Así, $P(x)$ es de grado mayor o igual que k, luego $k \leq n$.

Ejemplo 3.5

Demostrar que el polinomio $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6$ tiene un cero para $x = 3$, y factorizar el polinomio.

Solución: Haciendo $x = 3$ en el polinomio se obtiene

$$f(3) = -2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 + 6 = -54 + 18 + 30 + 6 = 0$$

Por tanto $x - 3$ es un divisor. Se deduce de aquí que la función cúbica $f(x)$ se puede expresar como el producto de $(x - 3)$ por un polinomio de segundo grado. En efecto,

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6 = -2(x - 3)(x^2 + ax + b)$$

y debemos calcular a y b. Desarrollando la última expresión se obtiene

$$f(x) = -2x^3 + (6 - 2a)x^2 + (6a - 2b)x + 6b$$

Como este polinomio $f(x)$ debe coincidir con $-2x^3+2x^2+10x+6$ para todo x, los coeficientes de las mismas potencias de x deben ser iguales. Así $6 - 2a = 2$, $6a - 2b = 10$ y $6b = 6$. Por tanto, $b = 1$ y $a = 2$. Puesto que $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, concluimos con unos pocos cálculos algebraicos elementales que

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6 = -2(x - 3)(x^2 + 2x + 1) = -2(x - 3)(x + 1)^2$$

El procedimiento de factorización que hemos usado en este Ejemplo se llama el *método de los coeficientes indeterminados* (porque, como hemos visto, a y b eran coeficientes indeterminados). Hay un método alternativo para factorizar polinomios, que es la "división larga" y que estudiamos a continuación.

División de polinomios

Se pueden dividir polinomios de forma análoga a como se dividen números. Consideremos primero un ejemplo numérico sencillo:

$$\begin{array}{rl}
2735 \div 5 & = 500 + 40 + 7 \\
\underline{2500} & \\
235 & \\
\underline{200} & \\
35 & \\
\underline{35} & \\
0 & \quad \text{resto}
\end{array}$$

Por tanto, $2735 \div 5 = 547$. Nótese que las líneas horizontales indican que se deben restar los dos números que hay sobre ellas. (Puede que el lector esté más acostumbrado a otra forma de ordenar los números en la operación, pero la idea es la misma.)

Consideremos a continuación la división

$$(-x^3 + 4x^2 - x - 6) \div (x - 2)$$

La escribimos así:

$$\begin{array}{rrrrl}
(-x^3 + & 4x^2 - & x & - 6) \div (x-2) & = -x^2 \qquad + 2x + 3 \\
-x^3 + & 2x^2 & & \longleftarrow & \boxed{-x^2(x-2)} \\
\hline
& 2x^2 - & x & - 6 & \\
& 2x^2 - & 4x & \longleftarrow & \boxed{2x(x-2)} \leftarrow \\
\hline
& & 3x & - 6 & \\
& & 3x & - 6 \longleftarrow & \boxed{3(x-2)} \leftarrow \\
\hline
& & & 0 & \text{resto}
\end{array}$$

(Se pueden omitir las casillas, pero sirven de ayuda para comprender lo que ocurre.)

Concluimos que $(-x^3 + 4x^2 - x - 6) \div (x - 2) = -x^2 + 2x + 3$. Como es fácil ver que $-x^2 + 2x + 3 = -(x + 1)(x - 3)$, tenemos que

$$-x^3 + 4x^2 - x - 6 = -(x + 1)(x - 3)(x - 2)$$

División de polinomios con resto

La división $2734 \div 5$ da como cociente 546 y 4 como resto. Por tanto, $2734/5 = 546 + 4/5$. Consideramos una forma semejante de división de polinomios.

Ejemplo 3.6
$(x^4 + 3x^2 - 4) \div (x^2 + 2x)$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^4 & & + 3x^2 & & - 4) \div (x^2 + 2x) = x^2 - 2x + 7 \\
x^4 & + 2x^3 & & & \\
\hline
& - 2x^3 & + 3x^2 & & - 4 \\
& - 2x^3 & - 4x^2 & & \\
\hline
& & 7x^2 & & - 4 \\
& & 7x^2 & + 14x & \\
\hline
& & & - 14x & - 4 \quad \text{resto}
\end{array}$$

(El polinomio $x^4 + 3x^2 - 4$ no tiene términos en x^3 y x, luego insertamos un espacio extra entre las potencias de x para dejar sitio a los términos en x^3 y x que van a aparecer en el curso de los cálculos.) De lo anterior deducimos que

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 - 2x + 7)(x^2 + 2x) + (-14x - 4)$$

luego

$$\frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 + 2x} = x^2 - 2x + 7 - \frac{14x + 4}{x^2 + 2x} \qquad (*)$$

Funciones racionales

Una **función racional** es una función $R(x) = P(x)/Q(x)$ que se puede expresar como un cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Esta función está definida para todo x tal que $Q(x) \neq 0$. La

función racional $R(x)$ se llama **propia** si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$. Cuando el grado de $P(x)$ es mayor o igual al de $Q(x)$, entonces $R(x)$ se llama una función racional **impropia**. Usando la división polinómica, toda función racional impropia se puede escribir como un polinomio más una función racional propia, como en (3.11) y en el Ejemplo 3.6.

Problemas

1 Usando (3.9), hallar todas las raíces enteras de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 + x - 2 = 0$ (b) $x^3 - x^2 - 25x + 25 = 0$ (c) $x^5 - 4x^3 - 3 = 0$

2 Hallar todas las raíces enteras de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ (b) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 = 0$

(c) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ (d) $\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$

3 Hacer las siguientes divisiones:

(a) $(x^2 - x - 20) \div (x - 5)$ (b) $(x^3 - 1) \div (x - 1)$ (c) $(-3x^3 + 48x) \div (x - 4)$

4 Hacer las siguientes divisiones:

(a) $(2x^3 + 2x - 1) \div (x - 1)$ (b) $(x^4 + x^3 + x^2 + x) \div (x^2 + x)$

(c) $(3x^8 + x^2 + 1) \div (x^3 - 2x + 1)$ (d) $(x^5 - 3x^4 + 1) \div (x^2 + x + 1)$

5 ¿Cuáles de las siguientes divisiones dan resto 0? (a y b son constantes y n es un número natural.)

(a) $(x^3 - x - 1)/(x - 1)$ (b) $(2x^3 - x - 1)/(x - 1)$

(c) $(x^3 - ax^2 + bx - ab)/(x - a)$ (d) $(x^{2n} - 1)/(x + 1)$

6 Descomponer los polinomios siguientes como producto de factores lineales:

(a) $p(x) = x^3 + x^2 - 12x$ (b) $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 18x + 8$

7 Hallar posibles expresiones de cada uno de los tres polinomios cuyas gráficas recoge la Figura 3.7.

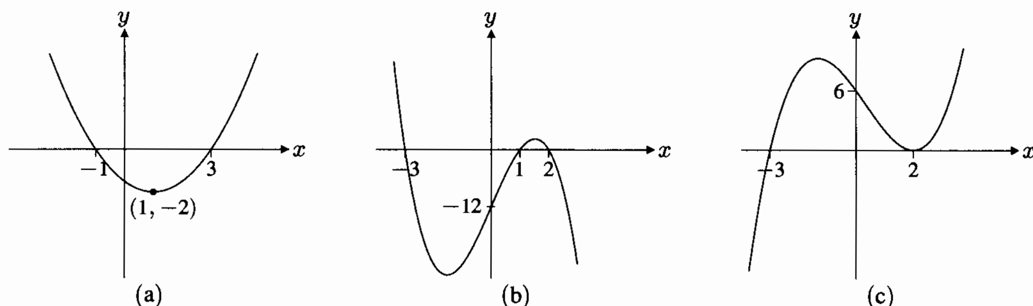


FIGURA 3.7

3.4 FUNCIONES POTENCIALES

Consideremos la función potencial f definida por la fórmula

$$f(x) = x^r \tag{3.13}$$

Sabemos qué significa x^r si r es un entero —esto es, si $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En efecto, si r es un número natural, x^r es el producto de r factores iguales a x. También, si $r = 0$, entonces

$x^r = x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$, y si $r = -n$ entonces $x^r = 1/x^n$ para $x \neq 0$. Además, para $r = 1/2$, $x^r = x^{1/2} = \sqrt{x}$, definida para todo $x \geq 0$ (véase la Sección A.2 del Apéndice A.) Esta sección extiende la definición de x^r de tal manera que tenga sentido para cualquier número racional r.

Damos algunos ejemplos de por qué necesitamos potencias de exponente racional:

1. El flujo de la sangre (en litros por segundo) por el corazón de un individuo es aproximadamente proporcional a $x^{0,7}$, donde x es el peso corporal.
2. La fórmula $S \approx 4{,}84V^{2/3}$ da la superficie aproximada S de una esfera en función de su volumen V. (Véase Ejemplo 3.10 a continuación.)
3. La fórmula $Y = 2{,}262K^{0,203}L^{0,763}(1{,}02)^t$ aparece en un estudio del crecimiento de la producción nacional y demuestra que las potencias de exponente fraccionario se usan en economía. (Aquí Y es el producto nacional neto, K es el volumen de capital, L trabajo y t tiempo.)

Estos ejemplos indican la necesidad de definir x^r para $r = 0{,}7 = 7/10$, $r = 2/3$, $r = 0{,}203 = 203/1.000$ y $r = 0{,}763 = 763/1.000$. En general queremos definir x^r para $x > 0$ cuando r es un número racional cualquiera.

Las siguientes reglas básicas de potenciación (que se estudian en la Sección A.1, Apéndice A) son válidas para todos los enteros r y s:

$$\text{(i) } a^r a^s = a^{r+s} \qquad \text{(ii) } (a^r)^s = a^{rs} \tag{3.14}$$

Al extender la definición de x^r a exponentes racionales r es natural el requerir que esas reglas sigan siendo válidas.

Examinemos, en primer lugar, el significado de $a^{1/n}$ cuando n es un número natural y a es positivo. Por ejemplo, ¿qué significa $5^{1/3}$? Si la regla (3.14)(ii) debe verificarse en este caso, se tendrá que $(5^{1/3})^3 = 5$. Esto implica que $5^{1/3}$ debe ser una solución de la ecuación $x^3 = 5$. Se puede probar que esta ecuación tiene una única solución positiva, que se designa por $\sqrt[3]{5}$, la *raíz cúbica de 5* (véase Ejemplo 7.2 en la Sección 7.1). Por tanto, se debe definir $5^{1/3}$ como $\sqrt[3]{5}$. En general, $(a^{1/n})^n = a$. Así, $a^{1/n}$ es una solución de la ecuación $x^n = a$. Se puede probar que esta ecuación tiene una única solución positiva, que se designa por $\sqrt[n]{a}$, la *raíz n-ésima de a*:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \tag{3.15}$$

En palabras: *si a es positivo y n es un número natural, entonces $a^{1/n}$ es el único número positivo que, elevado a la potencia n-ésima, da a —esto es,* $(a^{1/n})^n = a^1 = a$. Por ejemplo,

$$27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^3 = (27^{1/3})^3 = 27$$

$$\left(\tfrac{1}{625}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{625}} = \tfrac{1}{5} \qquad \text{porque} \qquad \left(\tfrac{1}{5}\right)^4 = \left[\left(\tfrac{1}{625}\right)^{1/4}\right]^4 = \tfrac{1}{625}$$

Normalmente escribimos $a^{1/2}$ como $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$ (véase la Sección A.2 del Apéndice A).

Vamos ahora a definir $a^{p/q}$ cuando p es un entero, q es un número natural y $a > 0$. Consideremos $5^{2/3}$, por ejemplo. Ya hemos definido $5^{1/3}$. Para que se pueda aplicar la regla (3.14)(ii) debemos tener $5^{2/3} = (5^{1/3})^2$. Así hay que definir $5^{2/3}$ como $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$. En general definimos, para $a > 0$,

$$a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p, \qquad p \text{ entero, } q \text{ natural} \tag{3.16}$$

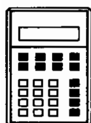
Nota: Si q es impar y p es entero, se puede definir $a^{p/q}$ aun cuando $a < 0$. Por ejemplo, $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$. Para definir $a^{p/q}$ cuando $a < 0$, hay que cuidar que la fracción p/q sea irreducible porque, si no, podríamos incurrir en contradicciones como "$-2 = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$".

Ejemplo 3.7

Calcular $625^{0,75}$ y $32^{-3/5}$.

Solución:

$$625^{0,75} = 625^{3/4} = (625^{1/4})^3 = 5^3 = 125$$
$$32^{-3/5} = \left(32^{1/5}\right)^{-3} = 2^{-3} = 1/8$$



Muchas calculadoras científicas tienen una tecla de potenciación, a menudo llamada $\boxed{y^x}$. Por ejemplo, supongamos que $y = 625$, $x = 0{,}75$ y que ordenamos a la calculadora que halle y^x (la manera de hacer esto varía de unas calculadoras a otras). La pantalla puede mostrar el número 125,000 —o, a lo mejor, 125,0000001 si se calcula con 7 cifras decimales. Esto prueba que la tecla $\boxed{y^x}$ no siempre da una respuesta exacta, aun en casos sencillos. Ensáyese con 2^3, y compruébese el valor para $32^{-3/5}$. Las calculadoras de bolsillo sencillas son normalmente lo suficientemente exactas en la práctica.

Podemos probar que, con esta definición de $a^{p/q}$, las reglas (3.14) siguen valiendo cuando r y s son números racionales. En particular,

$$a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = (a^p)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Así, para calcular $a^{p/q}$, podemos, bien tomar primero la raíz q-ésima de a y elevar a p el resultado, bien elevar primero a a la potencia p y luego tomar la raíz q-ésima del resultado. Obtendremos el mismo resultado de las dos maneras. Por ejemplo,

$$625^{0,75} = 625^{3/4} = \left(625^3\right)^{1/4} = (244140625)^{1/4} = \sqrt[4]{244140625} = 125$$

Nótese que este procedimiento necesita cálculos más difíciles que los que usamos en el ejemplo 3.7.

Ejemplo 3.8

Si z designa la demanda de café en toneladas por año y p el precio por tonelada, la relación aproximada entre ellos para un cierto periodo de tiempo es

$$z = 694.500p^{-0,3}$$

(a) Escribir la fórmula usando raíces.

(b) Usar una calculadora para hallar la demanda cuando $p = 35.000$ y cuando $p = 55.000$.

Solución:

(a) $p^{-0,3} = \dfrac{1}{p^{0,3}} = \dfrac{1}{p^{3/10}} = \dfrac{1}{\sqrt[10]{p^3}}$, luego tenemos $z = \dfrac{694.500}{\sqrt[10]{p^3}}$

(b) $p = 35.000$ da $z = 694.500 \cdot (35.000)^{-0,3} \approx 30.092$ (toneladas)

$p = 55.000$ da $z = 694.500 \cdot (55.000)^{-0,3} \approx 26.276$ (toneladas)

Nótese que, cuando el precio aumenta, la demanda disminuye.

Uso de las reglas de potenciación

En aplicaciones económicas aparecen frecuentemente potencias de exponentes racionales, luego el lector debe aprender a usarlas correctamente. Antes de considerar algunos ejemplos más se debe notar que las reglas de potenciación se pueden extender fácilmente a más factores. Por ejemplo, tenemos

$$(abcd)^p = (ab)^p(cd)^p = a^p b^p c^p d^p$$

Ejemplo 3.9

Simplificar la expresión siguiente, de tal manera que la respuesta contenga un único exponente para cada variable x e y:

$$\left(\frac{5x^{-2}y^{2/3}}{625x^4y^{-4/3}}\right)^{-1/3}$$

Solución: Un método comienza por simplificar la expresión entre paréntesis,

$$\left(\frac{5x^{-2}y^{2/3}}{625x^4y^{-4/3}}\right)^{-1/3} = \left(\frac{1}{125}\cdot\frac{x^{-2}}{x^4}\cdot\frac{y^{2/3}}{y^{-4/3}}\right)^{-1/3} = \left(\frac{1}{125}\cdot x^{-6}\cdot y^2\right)^{-1/3}$$

$$= \left(\frac{1}{125}\right)^{-1/3}\left(x^{-6}\right)^{-1/3}\left(y^2\right)^{-1/3} = (125)^{1/3}x^2y^{-2/3} = \frac{5x^2}{y^{2/3}}$$

De otra manera: podemos elevar todos los factores a la potencia $-1/3$ y luego simplificar, usando la relación $625 = 5^4$

$$\left(\frac{5x^{-2}y^{2/3}}{625x^4y^{-4/3}}\right)^{-1/3} = \frac{5^{-1/3}x^{2/3}y^{-2/9}}{(5^4)^{-1/3}x^{-4/3}y^{4/9}} = 5^{-1/3-(-4/3)}\cdot x^{2/3-(-4/3)}\cdot y^{-2/9-4/9}$$

$$= 5^1x^2y^{-2/3} = \frac{5x^2}{y^{2/3}}$$

Ejemplo 3.10

Las fórmulas para la superficie S y el volumen V de una esfera cuyo radio es r vienen dadas, respectivamente, por las expresiones $S = 4\pi r^2$ y $V = (4/3)\pi r^3$. Escribir S como una función de V.

Solución: Hay que eliminar r. De $V = (4/3)\pi r^3$ obtenemos $r^3 = 3V/4\pi$. Elevando cada miembro de esta ecuación a $1/3$ y usando que $(r^3)^{1/3} = r$, tenemos que $r = (3V/4\pi)^{1/3}$. Por tanto,

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left[\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}\right]^2 = 4\pi\frac{(3V)^{2/3}}{(4\pi)^{2/3}}$$

$$= (4\pi)^{1-(2/3)}3^{2/3}V^{2/3} = (4\pi)^{1/3}(3^2)^{1/3}V^{2/3} = \sqrt[3]{36\pi}\,V^{2/3}$$

Así hemos probado que

$$S = \sqrt[3]{36\pi}\,V^{2/3} \approx 4{,}84\,V^{2/3} \tag{1}$$

Nota: Quizás el error más común que se comete en álgebra elemental es escribir que $(x+y)^2$ es igual a x^2+y^2 y perder así el término $2xy$. Si sustituimos $(x+y)^3$ por x^3+y^3 perdemos $3x^2y + 3xy^2$. ¿Qué error cometemos si sustituimos $(x-y)^3$ por x^3-y^3? Evidentemente $-3x^2y+3xy^2$. Los exámenes realizados por estudiantes muestran cómo personas que son capaces de manejar este tipo de expresiones simples cometen frecuentemente errores de bulto cuando manejan potencias más

complicadas. Un error sorprendentemente común es sustituir $\left(25 - \frac{1}{2}x\right)^{1/2}$ por $25^{1/2} - \left(\frac{1}{2}x\right)^{1/2}$, por ejemplo. En general:

> $(x + y)^\alpha$ NO es igual a $x^\alpha + y^\alpha$
> $(x - y - z)^{1/\alpha}$ NO es igual a $x^{1/\alpha} - y^{1/\alpha} - z^{1/\alpha}$

La *única* excepción, para valores generales de x, y, z, es cuando $\alpha = 1$.

Gráficas de funciones potenciales

Volvemos a la función potencial $f(x) = x^r$ de (3.13), que está ya definida para todos los números racionales r siempre que $x > 0$. Siempre tendremos que $f(1) = 1^r = 1$, luego la gráfica pasa por el punto $(1, 1)$ del plano xy. El comportamiento de la gráfica depende esencialmente de si r es positivo o negativo.

Ejemplo 3.11

Dibujar las gráficas de $y = x^{0,3}$ e $y = x^{-1,3}$.

Solución: Podemos escribir la tabla siguiente usando una calculadora de bolsillo

x	0	1/3	2/3	1	2	3	4
$y = x^{0,3}$	0	0,72	0,89	1	1,23	1,39	1,52
$y = x^{-1,3}$	*	4,17	1,69	1	0,41	0,24	0,16

* *No definido.*

Las gráficas están en las Figuras 3.8 y 3.9.

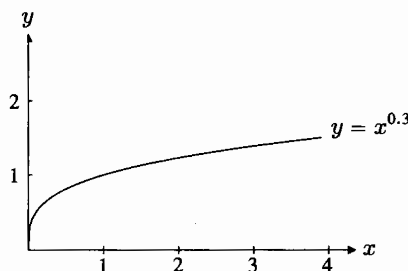


FIGURA 3.8

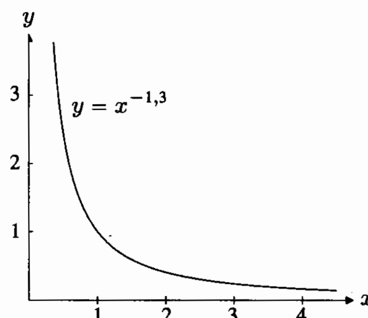


FIGURA 3.9

La Figura 3.10 ilustra cómo la gráfica de $y = x^r$ cambia para distintos valores del exponente. Dibujar las gráficas de $y = x^{-3}$, $y = x^{-1}$, $y = x^{-1/2}$ e $y = x^{-1/3}$.

Problemas

1 Calcular lo siguiente:

(a) $16^{1/4}$ (b) $243^{-1/5}$ (c) $5^{1/7} \cdot 5^{6/7}$ (d) $(4^8)^{-3/16}$

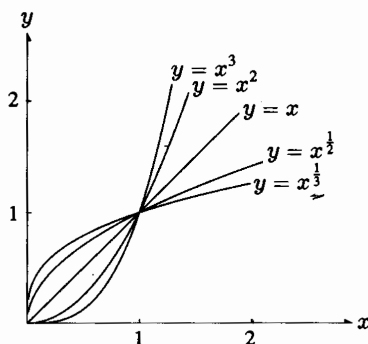


FIGURA 3.10

2 Hallar valores aproximados para las siguientes potencias, usando una calculadora de bolsillo o un computador:

(a) $100^{1/5}$ (b) $16^{-3,33}$ (c) $5{,}23^{1,02} \cdot 2{,}11^{-3,11}$

3 Calcular lo siguiente:

(a) $\dfrac{4 \cdot 3^{-1/3}}{\sqrt[6]{81}}$ (b) $(0{,}064)^{-1/3}$ (c) $\left(3^2 + 4^2\right)^{-1/2}$

4 ¿Cómo se puede expresar el número $50^{0,16}$ en forma de raíz?

5 Simplificar las expresiones siguientes de tal forma que cada una contenga un único exponente de a.

(a) $\{[(a^{1/2})^{2/3}]^{3/4}\}^{4/5}$ (b) $a^{1/2}a^{2/3}a^{3/4}a^{4/5}$

(c) $\{[(3a)^{-1}]^{-2}(2a^{-2})^{-1}\}/a^{-3}$ (d) $\dfrac{\sqrt[3]{a}\, a^{1/12}\sqrt[4]{a^3}}{a^{5/12}\sqrt{a}}$

6 Resolver las siguientes ecuaciones en x:

(a) $2^{2x} = 8$ (b) $3^{3x+1} = 1/81$ (c) $10^{x^2-2x+2} = 100$

7 ¿Cuáles de las ecuaciones siguientes son válidas para todo x e y?

(a) $(2^x)^2 = 2^{x^2}$ (b) $3^{x-3y} = \dfrac{3^x}{3^{3y}}$

(c) $3^{-1/x} = \dfrac{1}{3^{1/x}} \quad (x \neq 0)$ (d) $5^{1/x} = \dfrac{1}{5^x} \quad (x \neq 0)$

(e) $a^{x+y} = a^x + a^y$ (f) $2^{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 2^{\sqrt{xy}}$ (x e y positivos)

8 Resolver las ecuaciones siguientes en las variables que se indican:

(a) $3K^{-1/2}L^{1/3} = 1/5$ en K (b) $p - abx_0^{b-1} = 0$ en x_0

(c) $ax(ax+b)^{-2/3} + (ax+b)^{1/3} = 0$ en x (d) $\left[(1-\lambda)a^{-\rho} + \lambda b^{-\rho}\right]^{-1/\rho} = c$ en b

9 Hay que pintar la superficie externa de una esfera de un volumen de 100 m^3. Un litro de pintura cubre 5 m^2. ¿Cuántos litros de pintura se necesitan? (*Indicación:* Usar la fórmula (1) del Ejemplo 3.10.)

10 Usando una calculadora de bolsillo (o un computador) probar que la ecuación

$$Y = 2{,}262K^{0,203}L^{0,763}(1{,}02)^t$$

tiene una solución aproximada en K dada por $K \approx 0{,}018Y^{4,926}L^{-3,759}(0{,}907)^t$. Hallar K numéricamente cuando $Y = 100$, $L = 6$ y $t = 10$.

11 Simplificar las expresiones siguientes:

(a) $\left(a^{1/3} - b^{1/3}\right)\left(a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}\right)$ (b) $\dfrac{bx^{1/2} - (x-a)b\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\left(bx^{1/2}\right)^2}$ $(x > 0)$

3.5 FUNCIONES EXPONENCIALES

Se dice que una cantidad *aumenta* (o *disminuye*) *exponencialmente* cuando aumenta (o disminuye) en un factor fijo por unidad de tiempo. Si el factor fijo es a, esta definición se traduce en la función exponencial f definida por

$$f(t) = Aa^t \tag{3.17}$$

donde a y A son constantes positivas. Nótese que, si $f(t) = Aa^t$, entonces $f(t+1) = Aa^{t+1} = Aa^t \cdot a^1 = af(t)$, luego el valor de f en el instante $t+1$ es a veces su valor en el instante t. Si $a > 1$, f crece; si $0 < a < 1$ f, decrece. Puesto que $f(0) = Aa^0 = A$, se puede escribir $f(t) = f(0)a^t$.

Las funciones exponenciales aparecen en muchos modelos económicos, sociales y físicos importantes. Por ejemplo, se pueden describir mediante funciones exponenciales fenómenos como el crecimiento económico, crecimiento demográfico, interés acumulado continuamente, desintegración radioactiva, y disminución del analfabetismo. Además, la función exponencial es una de las más importantes en estadística.

Ejemplo 3.12 **(Crecimiento demográfico)**

Consideremos una población en crecimiento, como la de Europa. En el Ejemplo 2.13, construimos una función lineal

$$P = 6{,}4t + 641$$

donde P designa la población en millones, $t = 0$ corresponde al año 1960 cuando la población era de 641 millones, y $t = 10$ corresponde al año 1970 cuando la población estimada era de 705 millones. Según esta fórmula, el aumento anual de población sería constante e igual a 6,4 millones. Esta hipótesis no es razonable. Las poblaciones crecen más rápidamente cuanto mayores son, porque hay más gente para tener hijos y la tasa de mortalidad usualmente decrece o permanece constante. En efecto, según estimaciones de la ONU, la esperanza de crecimiento de la población europea es, aproximadamente, del 0,72% anual durante el periodo 1960 al 2000. Con una población de 641 millones en 1960, la población en 1961 sería entonces

$$641 + \frac{641 \cdot 0{,}72}{100} = 641 \cdot \left(1 + \frac{0{,}72}{100}\right) = 641 \cdot 1{,}0072$$

que es aproximadamente 645 millones. Para el año siguiente, 1962, habría crecido hasta

$$641 \cdot 1{,}0072 + \frac{641 \cdot 1{,}0072 \cdot 0{,}72}{100} = 641 \cdot 1{,}0072 \cdot \left(1 + 0{,}0072\right) = 641 \cdot 1{,}0072^2$$

que es aproximadamente 650 millones. Nótese cómo la cifra de población crece por el factor 1,0072 cada año. Si la tasa de crecimiento anual continuara siendo del 0,72%, entonces t años después de 1960 la población vendría dada por

$$P(t) = 641 \cdot 1{,}0072^t \tag{1}$$

Así, $P(t)$ es una función exponencial del tipo (3.17). Para el año 2000, que corresponde a $t = 40$, la fórmula da una estimación de $P(40) \approx 854$ millones.

Muchos países, especialmente en África y América Latina, han tenido un mayor crecimiento demográfico que Europa. Por ejemplo, durante la década de los setenta y los ochenta la tasa de

crecimiento de la población de Zimbabwe se acercaba al 3,5% anual. Si ponemos $t = 0$ para el año 1969, en que se hizo el censo, y cuando la población era de 5,1 millones, t años después de 1969 vendrá dada por

$$P(t) = 5{,}1 \cdot 1{,}035^t$$

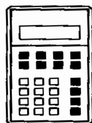
Así, $P(20)$, $P(40)$ y $P(60)$ dan aproximadamente, usando esta fórmula, 10, 20 y 40 millones. Por tanto, la población de Zimbabwe se duplica durante los primeros 20 años; durante los 20 años siguientes se duplica de nuevo, y así sucesivamente.

Decimos que el *tiempo de duplicación* de la población es aproximadamente 20 años. Desde luego es muy dudoso extrapolar de esta forma hacia el futuro porque el crecimiento demográfico exponencial no puede mantenerse indefinidamente. (Si continuara en Zimbabwe al 3,5% anual, y el territorio no creciera, en el año 2697 cada habitante de este país tendría un espacio vital de sólo 1 metro cuadrado. Véase Problema 7.)

Si $a > 1$ y $A > 0$, la función exponencial $f(t) = Aa^t$ es creciente. Su **tiempo de duplicación** t^* es el tiempo necesario para que se multiplique por 2. Como $f(0) = A$, se obtiene el tiempo de duplicación resolviendo la ecuación $f(t^*) = Aa^{t^*} = 2A$ o, simplificando por A, $a^{t^*} = 2$. Así, el tiempo de duplicación de la función exponencial $f(t) = Aa^t$ es el exponente al que hay que elevar a para que dé 2.[2] (Se pedirá al lector en el Problema 8 demostrar que el tiempo de duplicación es independiente del año que se tome como base.)

Ejemplo 3.13

Usar calculadora para hallar el tiempo de duplicación de



(a) una población (como la de Zimbabwe) que crece al 3,5% anual (confirmando así nuestros cálculos anteriores).

(b) la población de Kenya en los ochenta (que tenía la tasa de crecimiento anual más alta del mundo: 4,2%).

Solución:

(a) El tiempo de duplicación t^* está dado por la ecuación $1{,}035^{t^*} = 2$. Usando una calculadora probar que $1{,}035^{15} \approx 1{,}68$, mientras que $1{,}035^{25} \approx 2{,}36$. Así t^* debe estar entre 15 y 25. Puesto que $1{,}035^{20} \approx 1{,}99$, t^* debe estar cercano a 20. En efecto, $t^* \approx 20{,}15$.

(b) El tiempo de duplicación t^* viene dado por la ecuación $1{,}042^{t^*} = 2$. Usando una calculadora hallamos que $t^* \approx 16{,}85$. Así, con una tasa de crecimiento de 4,2%, la población de Kenya se duplicaría en menos de 17 años.

Ejemplo 3.14 (**Interés compuesto**)

Una libreta de ahorro de K dólares, que crece en un p% de interés cada año, habrá aumentado al cabo de t años hasta

$$K\,(1 + p/100)^t \tag{1}$$

(véase Sección A.1 del Apéndice A). Según esta fórmula, 1 dólar ($K = 1$) a un interés del 8% anual ($p = 8$), se habrá convertido al cabo de t en

$$(1 + 8/100)^t = 1{,}08^t \tag{2}$$

La Tabla 3.1 refleja cómo crece este dólar con el tiempo.

[2] Usando logaritmos naturales (que se explican en la Sección 8.2), tenemos que $t^* = \ln 2 / \ln a$.

TABLA 3.1 *Cómo crece con el tiempo un ahorro de 1$*

t	1	2	5	10	20	30	50	100	200
$(1{,}08)^t$	1,08	1,17	1,47	2,16	4,66	10,06	46,90	2.199,76	4.838.949,60

Después de 30 años, 1$ se convierte en más de 10$ y, después de 200 años, ¡se ha convertido en más de 4,8 millones de dólares! Este crecimiento se recoge en el gráfico de la Figura 3.11. Obsérvese que la expresión $1{,}08^t$ define una función exponencial del tipo (3.17) con $a = 1{,}08$. Aun cuando a sea poco mayor que 1, $f(t)$ crecerá muy rápidamente cuando t sea grande.

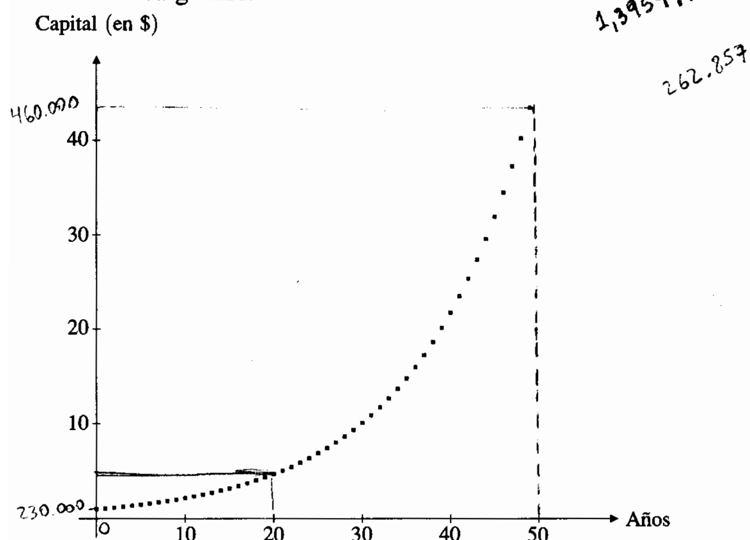


FIGURA 3.11 Crecimiento de 1$ en *t* años, con interés del 8% anual

Ejemplo 3.15 (Desintegración radioactiva)

Las mediciones indican que los materiales radioactivos se desintegran en un porcentaje fijo por unidad de tiempo. El plutonio 239, que es un desecho de ciertas centrales eléctricas nucleares y se usa en la producción de armas atómicas, se desintegra un 50% cada 24.400 años. En este caso decimos que la *vida media* del plutonio 239 es de 24.400 años. Si tenemos I_0 unidades de plutonio 239 en el instante $t = 0$, después de t años, quedarán

$$I(t) = I_0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t/24.400} = I_0 \cdot 0{,}9999716^t$$

unidades. (Obsérvese que esto es coherente con $I(24.400) = \frac{1}{2}I_0$.)

En el Capítulo 8 se estudia la función exponencial con mayor detalle.

Obsérvese la diferencia fundamental entre las dos funciones

$$f(x) = a^x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^a$$

La segunda es la **función potencial** que vimos en la Sección 3.4. En la función exponencial a^x es el exponente quien varía, mientras que la base es constante. En la función potencial x^a, por otra parte, el exponente es constante, mientras que la base varía. Las propiedades más importantes de la función exponencial se resumen en el siguiente enunciado:

La **función exponencial general** de base $a > 0$ es

$$f(x) = Aa^x$$

donde $f(0) = A$ y a es el factor por el que cambia $f(x)$ cuando x aumenta en 1.
Si $a = 1 + p/100$, donde $p > 0$ y $A > 0$, entonces $f(x)$ aumentará en $p\%$ por cada unidad que aumente x.
Si $a = 1 - p/100$, donde $p > 0$ y $A > 0$, entonces $f(x)$ disminuirá en $p\%$ por cada unidad que aumente x.

Problemas

1 Si la población de Europa creciera un 0,72% anualmente, ¿cuál sería el tiempo de duplicación?

2 Se calculó que la población de Botswana era de 1,22 millones en 1.989, y crecía un 3,4% anualmente.

(a) Si $t = 0$ designa 1.989, hallar una fórmula que dé la población en la fecha t.

(b) ¿Cuál es el tiempo de duplicación?

3 Una libreta de ahorro con depósito inicial de 100$ produce el 12% de interés al año.

(a) ¿Cuál es la cantidad al cabo de t años?

(b) Hacer una tabla semejante a la Tabla 3.1. (Llegar hasta los 50 años.)

4 Supongamos que al lector prometen darle 2$ el primer día, 4$ el segundo, 8$ el tercero, 16$ el cuarto, y así sucesivamente (de tal forma que cada día recibe el doble que el anterior).

(a) ¿Cuánto recibirá el día décimo?

(b) Hallar una función $f(t)$ que calcule cuánto recibirá el día t.

(c) Explicar por qué $f(20)$ vale más de un millón de dólares. (*Indicación:* 2^{10} es ligeramente mayor que 10^3.)

5 Rellenar la tabla siguiente y hacer un dibujo aproximado de las gráficas de $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x							
2^{-x}							

6 Rellenar la tabla siguiente y dibujar la gráfica de $y = 2^{x^2}$.

x	-2	-1	0	1	2
2^{x^2}					

7 El área de Zimbabwe es aproximadamente de $3{,}91 \cdot 10^{11}$ metros cuadrados. Refiriéndose al texto que sigue al Ejemplo 3.12 usando una calculadora, resolver la ecuación $5{,}1 \cdot 1{,}035^t = 3{,}91 \cdot 10^{11}$ en t, e interpretar la respuesta. (Recuérdese que $t = 0$ corresponde a 1969.)

8 Si $f(t + t^*) = 2f(t)$ con $f(t) = Aa^t$, probar que $a^{t^*} = 2$. Explicar por qué esto prueba que el tiempo de duplicación de la función exponencial general es independiente del origen del tiempo.

9 En 1964 se comenzó un plan quinquenal en Tanzania. Uno de sus objetivos era doblar la renta real per cápita en los 15 años siguientes. ¿Cuál es la tasa media de crecimiento de la renta per cápita requerida para alcanzar este objetivo?

10 Considérese la función f definida para todo x por $f(x) = 1 - 2^{-x}$.

(a) Hacer una tabla de valores de la función para $x = 0, \pm 1, \pm 2$ y ± 3. Dibujar la gráfica de f.

(b) ¿Qué ocurre con $f(x)$ cuando x es muy grande o muy pequeño?

11 ¿Cuáles de las ecuaciones siguientes *no* definen una función exponencial de x?

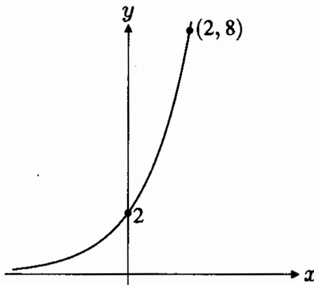
(a) $y = 3^x$ (b) $y = x^{\sqrt{2}}$ (c) $y = (\sqrt{2})^x$

(d) $y = x^x$ (e) $y = (2{,}7)^x$ (f) $y = 1/2^x$

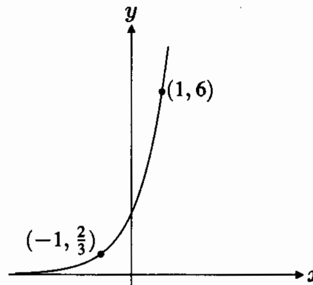
12 Rellenar la tabla siguiente y dibujar la gráfica de $y = x^2 2^x$.

x	*-10*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
$x^2 2^x$									

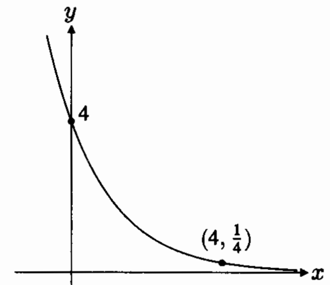
13 Hallar las posibles funciones exponenciales para las gráficas de la Figura 3.12.



(a) $a < 0, b > 0$



(b) $a > 0, b < 0$



(c) $a > 0, b > 0, b^2 = 4ac$

FIGURA 3.12

14 El isótopo radioactivo yodo 131, cuya vida media es de 8 días, se usa para diagnosticar las enfermedades de la glándula tiroides. Si hay I_0 unidades de material en el instante $t = 0$, ¿cuánto quedará después de t días?

3.6 EL CONCEPTO GENERAL DE FUNCIÓN

Hemos estudiado funciones de una variable. Se trata de funciones cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango también es un conjunto de números reales. Sin embargo, una descripción realista de muchos fenómenos económicos requiere considerar un gran número de variables simultáneamente. Por ejemplo, la demanda de un bien, como la mantequilla, es función de variables como su precio, los precios de los complementarios y sustitutivos, las rentas de los consumidores, etcétera.

De hecho, ya hemos visto muchas funciones especiales de varias variables. Por ejemplo, la fórmula $V = \pi r^2 h$ del volumen V de un cilindro con radio de la base igual a r y altura h requiere una función de dos variables (por supuesto, $\pi \approx 3{,}14159$ es una constante matemática). Un cambio en una de esas variables no afectará a los valores de las otras variables. Para cada par de números

positivos (r, h), hay definido un valor para el volumen V. Para poner de relieve que V depende de los valores de r y h, escribimos

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

Para $r = 2$ y $h = 3$ se tiene que $V(2,3) = 12\pi$, mientras que $r = 3$ y $h = 2$ dan $V(3,2) = 18\pi$. También, $r = 1$ y $h = 1/\pi$ dan $V(1, 1/\pi) = 1$. Nótese que, en particular, $V(2,3) \neq V(3,2)$.

En algunos modelos económicos abstractos puede bastar el saber que hay una relación funcional entre las variables, sin especificar más detalladamente la dependencia. Por ejemplo, supongamos que un mercado vende tres bienes cuyos precios unitarios son respectivamente p, q, r. En este caso los economistas suponen generalmente que la demanda, para uno de los bienes, de un individuo con renta m viene dada por una función $f(p, q, r, m)$ de cuatro variables, sin especificar la forma precisa de esa función.

Una discusión extensa de las funciones de varias variables empieza en el Capítulo 15. En esta sección se introduce un tipo aún más general de función. De hecho, funciones generales del tipo presentado aquí son de importancia fundamental en prácticamente cualquier área de las matemáticas puras y aplicadas, incluso en las aplicadas a la economía.

Ejemplo 3.16

Los ejemplos siguientes indican lo amplio del concepto de función.

(a) La función que asigna a cada triángulo del plano su área (medida, por ejemplo, en cm^2).

(b) La función que determina cualquier número de identificación personal de un contribuyente.

(c) La función que, a cada punto P del plano, asigna el punto que está 3 unidades por encima de P.

(d) Sea A el conjunto de todas las posibles decisiones que puede tomar una persona en una cierta situación. Supongamos que cada decisión $a \in A$ produce un cierto resultado (digamos un cierto beneficio $\varphi(a)$). De esta manera, hemos definido una función φ con dominio A.

Damos una definición general:

> Una **función** de A en B es una regla que asigna, a cada elemento del conjunto A un elemento y sólo uno del conjunto B. (3.18)

Si designamos por f a la función, el conjunto A se llama el **dominio** de f y B se llama el **conjunto final**. Los dos conjuntos A y B no constan necesariamente de números, sino que sus elementos pueden ser otras entidades.

La definición de función requiere que se especifiquen tres objetos:

1. Un dominio A
2. Un conjunto final B
3. Una regla que asigne un *único* elemento de B a *cada* elemento de A.

Sin embargo, en muchos casos, no damos explícitamente los conjuntos A y/o B cuando es claro por el contexto de qué conjuntos se trata.

Un requerimiento importante de la definición de función es que, a cada elemento del dominio A, corresponda un *único* elemento del conjunto final B. Mientras que tiene sentido asignar a cada niño o niña su madre natural, el asignarle su tía no define ninguna función, en general, porque se

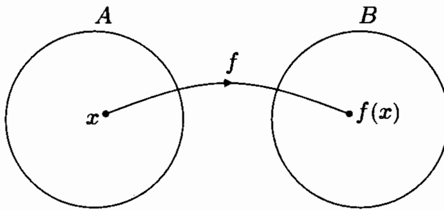


FIGURA 3.13 Una función de *A* en *B*.

pueden tener varias tías. Explicar por qué la regla siguiente, al contrario que la del Ejemplo 3.16(c), no define una función: "se asigna a cada punto P del plano otro que diste 3 unidades de él".

Si f es una función con dominio A y conjunto final B, decimos a menudo que f es una **función de** A **en** B y escribimos $f : A \to B$. La relación funcional se representa usualmente como en la Figura 3.13. Se usan a veces otras palabras distintas de "función" para expresar este concepto, como **transformación** o **aplicación**. Se llama **imagen** del elemento x mediante la función f al elemento $f(x)$. El conjunto de los elementos de B que son imagen de al menos uno de A se llama el **rango** o **recorrido** de la función. Así el rango es un subconjunto del conjunto final. Si designamos al rango de f por R_f, entonces $R_f = \{f(x) : x \in A\}$. También se le designa por $f(A)$. El rango de la función del Ejemplo 3.16(a) es el conjunto de todos los números positivos. Explicar por qué el rango de la función de (c) es todo el plano.

La definición de función requiere que a cada elemento de A se le asigne un *único* elemento de B. Sin embargo, un mismo elemento de B puede ir asignado a más de uno de A. En el Ejemplo 3.16(a) infinitos triángulos distintos tienen la misma área. Si cada elemento de B es imagen de, a lo más, un elemento de A, la función f se llama **inyectiva** (o **uno a uno**). Si uno o más elementos de B son imagen de más de un elemento de A, la función es de varios a uno.

La función de identificación del Ejemplo 3.16(b) debe ser inyectiva porque contribuyentes distintos deben tener números distintos. (En algunos casos raros los errores hacen que esta función sea de varios a uno. ¡Esto siempre crea una gran confusión cuando se descubre!) Explíquese por qué la función definida en el Ejemplo 3.16(c) es también inyectiva, mientras que no lo es la que asigna a cada niño su madre.

Supongamos que f es una función inyectiva de un conjunto A en uno B, y supongamos que el rango de f es todo B. Así se tiene:

1. f lleva cada elemento de A en uno de B (que es la definición de función).
2. Dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B (luego f es inyectiva).
3. Para cada elemento v de B, existe un elemento u de A tal que $f(u) = v$ (luego el rango de f es todo B).

En esta situación podemos definir una función g de B en A mediante la siguiente regla: Asígnese a cada elemento v de B el elemento $u = g(v)$ de A que f lleva sobre v —esto es, el elemento $u \in A$ tal que $v = f(u)$. A causa de la regla 2, esta asignación es única, luego g es una función. Su dominio es B y su conjunto final y rango son ambos iguales a A. La función g se llama **la función inversa** de f. Por ejemplo, la inversa de la de los números de identificación es la función que asigna a cada número la persona que lo tiene como identificación. La Sección 7.6 da más detalles sobre las funciones inversas y sus propiedades.

Problemas

1 Decidir cuál de las reglas siguientes define una función:

(a) La regla que asigna a cada persona en un aula su altura.

(b) La regla que asigna a una madre su hijo/a menor.

(c) La regla que asigna el perímetro de un rectángulo a su área.

(d) La regla que asigna el área de una esfera a su volumen.

(e) La regla que asigna el par de números $(x + 3, y)$ al par de números (x, y).

2 Decidir cuáles de las funciones del Problema 1 son inyectivas y cuáles tienen inversa. Determinar la inversa cuando exista.

3 Cada persona tiene hematíes que pertenecen a uno y sólo uno de los siguientes grupos sanguíneos designados por A, B, AB y O. Considérese la función que asigna a cada persona de un equipo su grupo sanguíneo. ¿Puede ser inyectiva esta función si el equipo consta de al menos cinco personas?

4

Cálculo diferencial de una variable

Pensar de él (el cálculo diferencial) meramente como una técnica más avanzada es perder su contenido real. En él, las matemáticas se convierten en un modelo dinámico de pensamiento, que es un gran paso mental en el ascenso del hombre.
—*J. Bronowski* (1973)

Un tema importante de las disciplinas científicas, incluyendo la economía, es el estudio de la velocidad de variación de las cantidades con el tiempo. Para calcular la posición futura de un planeta, para predecir el crecimiento de la población de una especie biológica, o para dar una estimación de la demanda futura de un bien, necesitamos información sobre la tasa de variación.

El concepto matemático que se usa para describir la tasa de variación es el de derivada, que es *el* concepto central del análisis matemático. En este capítulo se define la derivada de una función y se dan algunas reglas sencillas para calcularla. En el capítulo siguiente se dan otras reglas que permiten calcular las derivadas de funciones más complicadas.

Isaac Newton (1642–1727) y Gottfried Leibniz (1646–1716) descubrieron, independientemente, la mayoría de esas reglas. Ésto inició el desarrollo del cálculo diferencial e integral.

4.1 PENDIENTES DE CURVAS

Aunque en economía nos interesa usualmente la derivada como tasa de variación, comenzamos este capítulo con una motivación geométrica del concepto.

Cuando estudiamos la gráfica de una función, nos gustaría tener una medida precisa de la inclinación de la gráfica en un punto. Sabemos que, en la recta $y = ax + b$, el número a designa la pendiente. Si a es grande y positivo, la recta está muy inclinada hacia arriba, de izquierda a derecha; si a es grande y negativo, la recta está muy inclinada hacia abajo, de izquierda a derecha. Pero,

¿cuál es la inclinación de la gráfica de una función f cualquiera? Una respuesta natural es definir la inclinación de una curva en un punto como la pendiente de la tangente a la curva en ese punto —esto es, la pendiente de la recta que más se ajusta a la curva en ese punto. En la curva de la Figura 4.1 la inclinación en el punto P es por tanto $1/2$, porque la tangente pasa por el par de puntos $(a, f(a))$ y $(a+4, f(a)+2)$, por ejemplo.

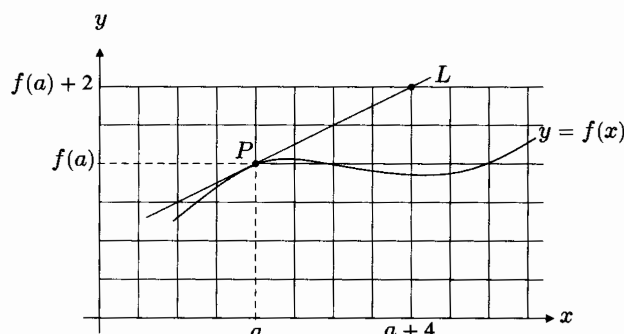


FIGURA 4.1 $f'(a) \approx 1/2$.

En la Figura 4.1, el punto P tiene coordenadas $\big(a, f(a)\big)$. La pendiente de la tangente a la gráfica en P se llama la **derivada** de f en el punto a y se designa por $f'(a)$ (que se lee *"f prima de a"*). En general se tiene

$$f'(a) = \text{la pendiente de la tangente a la curva } y = f(x) \text{ en el punto } \big(a, f(a)\big). \tag{4.1}$$

Así, en la Figura 4.1, tenemos $f'(a) = [f(a) + 2 - f(a)]/(a + 4 - a) = 2/4 = 1/2$.

Ejemplo 4.1

Usar la definición (4.1) para determinar $f'(1)$, $f'(4)$ y $f'(7)$ en el caso de la función cuya gráfica es la de la Figura 4.2.

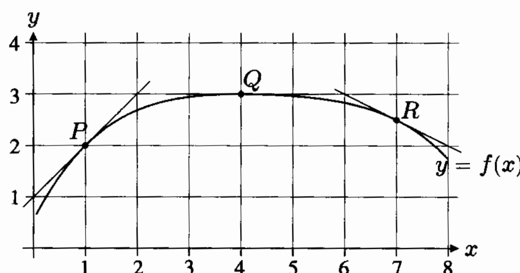


FIGURA 4.2

Solución: La tangente en $P = (1, 2)$ pasa por el punto $(0, 1)$, luego tiene pendiente 1. La tangente en $Q = (4, 3)$ es horizontal, luego tiene pendiente 0. La tangente en $R = (7, 2\frac{1}{2})$ pasa por $(8, 2)$, luego tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Obtenemos, por tanto: $f'(1) = 1$, $f'(4) = 0$ y $f'(7) = -1/2$.

4.2 LA PENDIENTE DE LA TANGENTE Y LA DERIVADA

Hemos dado en la sección anterior una definición vaga de tangente a una curva en un punto, diciendo que es la recta que más se ajusta a la curva en ese punto. Vamos a dar ahora una definición más formal.

Es fácil de entender la idea geométrica que hay detrás de la definición. Consideremos un punto P de una curva del plano xy (véase Figura 4.3.) Tomemos otro punto Q de la curva. La recta que pasa por P y Q se llama una *secante* (palabra que viene del latín y significa "que corta"). Si se deja P fijo y se mueve Q sobre la curva acercándose a P, la secante girará alrededor de P, como se indica en la Figura 4.4.

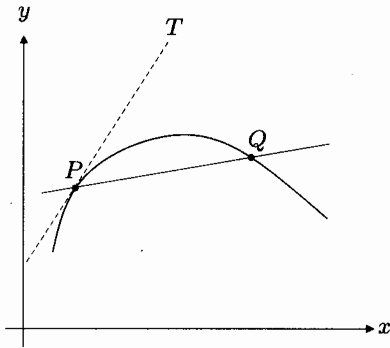


FIGURA 4.3

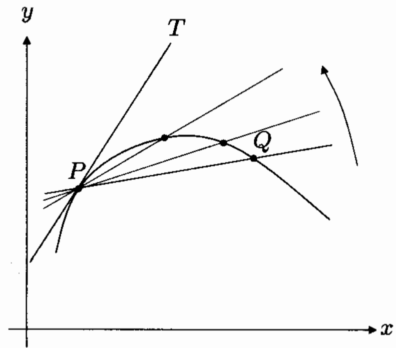


FIGURA 4.4

La recta límite PT hacia la que tiende la secante se llama la **recta tangente** a la curva en P. Supongamos que P es un punto de la gráfica de la función f. Vamos a ver cómo lo anterior nos permite hallar la pendiente de la tangente en P. Esto se ilustra en la Figura 4.5.

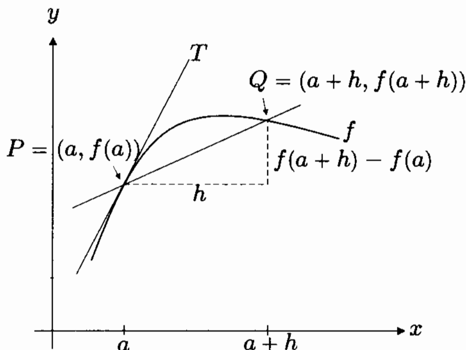


FIGURA 4.5

El punto P tiene coordenadas $(a, f(a))$. El punto Q está cercano a P y también sobre la gráfica de f. Supongamos que la coordenada x de Q es $a+h$, donde h es un número pequeño $\neq 0$. Entonces, la coordenada x de Q es un número cercano a a. Puesto que Q está sobre la gráfica de f, la coordenada y de Q es $f(a+h)$. Por tanto, las coordenadas de los puntos son $P = (a, f(a))$ y $Q = (a+h, f(a+h))$. La pendiente m_{PQ} de la secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{4.2}$$

Esta fracción se llama el **cociente de Newton** o el **cociente incremental de f**.

Nótese que, cuando $h = 0$, la fracción de (4.2) se convierte en 0/0 y así no está definida. El tomar $h = 0$ corresponde a hacer $Q = P$. Cuando Q se mueve hacia P (Q tiende a P) a lo largo de la gráfica de f, la coordenada x de Q, que es $a + h$, debe tender a a y h debe tender a 0. A la vez, la secante PQ tiende a la tangente a la gráfica en P. Esto sugiere que se debe *definir* la pendiente de la tangente en P como el número al que tiende m_{PQ} en (4.2) cuando h tiende a 0. En (4.1), hemos llamado a este valor la pendiente $f'(a)$. Damos, por tanto, la siguiente definición de $f'(a)$:

$$f'(a) = \begin{Bmatrix} \text{el límite cuando } h \\ \text{tiende a 0 de} \end{Bmatrix} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Es usual en matemáticas abreviar la notación a $\lim_{h\to 0}$ para expresar "el límite cuando h tiende a cero" de una expresión que depende de h. Tenemos, por tanto, la siguiente definición:

La **derivada** $f'(a)$ de la función f en el punto a de su dominio está dada por la fórmula

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{4.3}$$

Al igual que en (4.1), el número $f'(a)$ da la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La ecuación de una recta que pasa por (x_1, y_1) y tiene pendiente b es $y - y_1 = b(x - x_1)$. Obtenemos, por tanto,

La ecuación de la **tangente** a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \tag{4.4}$$

El concepto de límite en la definición de $f'(a)$ no está completamente claro. En la Sección 6.7 se da una definición exacta. De momento confiamos en la intuición para proseguir, porque la cosa es relativamente complicada. Consideremos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 4.2

Usar (4.3) para calcular $f'(a)$ cuando $f(x) = x^2$. Hallar, en particular, $f'(1/2)$, $f'(0)$ y $f'(-1)$. Dar las interpretaciones geométricas y hallar la ecuación de la tangente en el punto $(1/2, 1/4)$.

Solución: Si $f(x) = x^2$, tenemos $f(a + h) = (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$ y así $f(a + h) - f(a) = (a^2 + 2ah + h^2) - a^2 = 2ah + h^2$. Por tanto, para todo $h \neq 0$, se tiene

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a + h)}{h} = 2a + h \tag{1}$$

porque se puede simplificar por h ya que $h \neq 0$. Cuando h tiende a 0, $2a+h$ tiende obviamente a $2a$. Así podemos escribir

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(2a + h) = 2a \tag{2}$$

Esto prueba que, si $f(x) = x^2$, entonces $f'(a) = 2a$. Para $a = 1/2$, se tiene $f'(1/2) = 2 \cdot 1/2 = 1$. Análogamente $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$ y $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$.

En la Figura 4.6 damos la interpretación geométrica de (1). En la Figura 4.7, hemos dibujado las tangentes a la curva $y = x^2$ en los puntos $a = 1/2$ y $a = -1$. Para $a = 1/2$ se tiene $f(a) = (1/2)^2 = 1/4$ y $f'(1/2) = 1$. Según (4.4), la ecuación de la tangente es $y - 1/4 = 1 \cdot (x - 1/2)$, ó $y = x - 1/4$. (Probar que la otra tangente dibujada en la Figura 4.7 tiene como ecuación $y = -2x - 1$.) Nótese que la fórmula $f'(a) = 2a$ indica que $f'(a) < 0$ si $a < 0$ y $f'(a) > 0$ si $a > 0$. ¿Está esto de acuerdo con la gráfica?

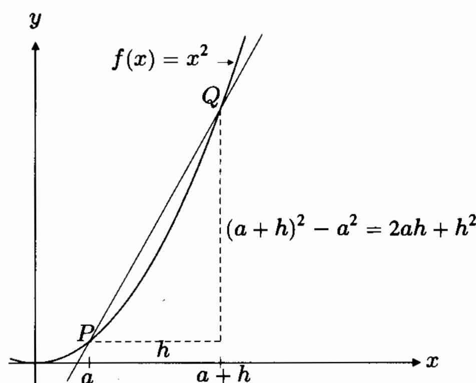


FIGURA 4.6 $f(x) = x^2$.

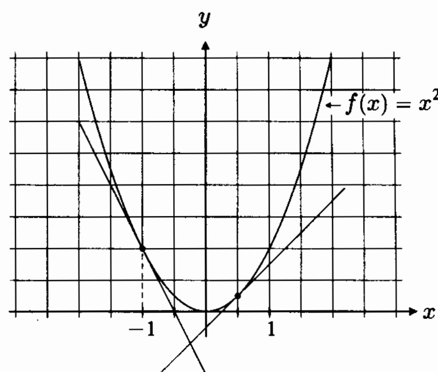


FIGURA 4.7 $f(x) = x^2$.

Si f es una función relativamente sencilla, se puede calcular $f'(a)$ por el algoritmo siguiente:

Algoritmo para calcular $f'(a)$:

1. Sumar h a a $(h \neq 0)$ y calcular $f(a+h)$.

2. Calcular el cambio de valor de la función: $f(a+h) - f(a)$.

3. Para $h \neq 0$, hallar el cociente de Newton $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (4.5)

4. Simplificar la fracción del paso 3 lo máximo posible. Cancelar h en numerador y denominador siempre que sea posible.

5. $f'(a)$ es el número al que tiende $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ cuando h tiende a 0.

Apliquemos este algoritmo a otro ejemplo.

Ejemplo 4.3

Si $f(x) = x^3$, calcular $f'(a)$.

$3x^2$

Solución: Seguimos el algoritmo (4.5).

1. $f(a+h) = (a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$

2. $f(a+h) - f(a) = (a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3) - a^3 = 3a^2h + 3ah^2 + h^3$

3–4. $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2$

5. Cuando h tiende a 0, también tenderá a cero $3ah + h^2$, luego la expresión $3a^2 + 3ah + h^2$ tiende a $3a^2$. Así, $f'(a) = 3a^2$.

Así hemos probado que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en el punto $x = a$ tiene pendiente $3a^2$. Nótese que $f'(a) = 3a^2 > 0$ si $a \neq 0$ y $f'(0) = 0$. La tangente está siempre inclinada hacia arriba, de izquierda a derecha, para todo $a \neq 0$, y es horizontal en el origen. Dibújese la gráfica de $f(x) = x^3$ para comprobar lo anterior.

El algoritmo de (4.5) es fácil de usar para funciones sencillas. Sin embargo, se vuelve difícil y aun imposible si se pretende tratar con él funciones ligeramente más complicadas como $f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 1}$. En el siguiente capítulo se dan reglas de cálculo de derivadas para funciones complicadas, sin necesidad de tener que recurrir a (4.5). Sin embargo, antes de estudiar esas reglas debemos examinar con más atención el concepto de límite. Esto se hace en la Sección 4.4.

Notaciones

Hemos demostrado en el Ejemplo 4.2 que, si $f(x) = x^2$, para todo a se tiene que $f'(a) = 2a$. Como usamos frecuentemente x para representar una cantidad que puede tomar cualquier valor, escribimos entonces $f'(x) = 2x$. Usando esta nueva notación para la función del Ejemplo 4.3, podemos formular brevemente los principales resultados de los dos últimos ejemplos de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x \tag{4.6}$$
$$f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2 \tag{4.7}$$

La ecuación (4.6) es un caso particular de la regla siguiente, cuya demostración se pedirá en el Problema 6.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \implies f'(x) = 2ax + b \qquad (a,\ b \text{ y } c \text{ constantes}) \tag{4.8}$$

Si $a = 1$, $b = c = 0$ se tiene (4.6). Casos particulares de (4.8) son:

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 5 \implies f'(x) = 3 \cdot 2x + 2 = 6x + 2$$
$$f(x) = -16 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{16}x^2 \implies f'(x) = -\tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{2}$$
$$f(x) = (x - p)^2 = x^2 - 2px + p^2 \implies f'(x) = 2x - 2p \qquad (p \text{ constante})$$

Si se usa y para designar el valor de la función $y = f(x)$, la derivada se designa por y'. Así se escribe, por ejemplo, $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$.

No son éstas las únicas notaciones para la derivada, sino que a menudo se usan otras en matemáticas y sus aplicaciones. Una de ellas, debida a Leibniz, se llama la **notación diferencial**. Si $y = f(x)$, se escribe

$$\frac{dy}{dx} = dy/dx \text{ ó } \frac{df(x)}{dx} = df(x)/dx \text{ ó } \frac{d}{dx}f(x) \text{ en lugar de } f'(x)$$

Por ejemplo, si $y = x^2$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{ó} \qquad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Por el momento, el símbolo dy/dx sólo significa $f'(x)$ y no se considerará como dy dividido por dx. En capítulos posteriores discutiremos esta notación con más detalle. En efecto, d/dx designa la orden de derivar lo que sigue, con respecto a x.

Cuando se usen letras distintas de f, x, y, la notación para la derivada cambiará. Por ejemplo: $P(t) = t^2 \Rightarrow P'(t) = 2t$; $Y = K^3 \Rightarrow Y' = 3K^2$; $A = r^2 \Rightarrow dA/dr = 2r$.

Problemas

1 Sea $f(x) = 4x^2$. Probar que $f(5+h) - f(5) = 40h + 4h^2$. Por tanto,

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 40 + 4h$$

Usando este resultado hallar $f'(5)$. Comparar la respuesta con (4.8).

2 Sea $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Probar que, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 6x + 2 + 3h$$

Usar este resultado para hallar $f'(x)$. Hallar, en particular, $f'(0)$, $f'(-2)$ y $f'(3)$. Hallar la ecuación de la tangente a la gráfica en el punto $(0, -1)$.

3 La Figura 4.8 muestra la gráfica de una función f. Hallar si las siguientes derivadas son > 0, $= 0$, ó < 0: $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$.

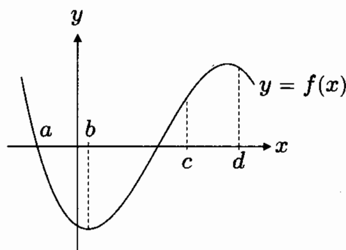


FIGURA 4.8

4 Probar que

$$f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Indicación: Probar que $[f(x+h) - f(x)]/h = -1/x(x+h)$ (véase Problema 14, Sección 2.5).

5 Hallar la pendiente de la tangente a la gráfica de las funciones siguientes en los puntos que se indican:

(a) $f(x) = 3x + 2$ en $(0, 2)$

(b) $f(x) = x^2 - 1$ en $(1, 0)$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{x} + 2$ en $(3, 3)$

(d) $f(x) = x^3 - 2x$ en $(0, 0)$

(e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ en $(-1, -2)$

(f) $f(x) = x^4$ en $(1, 1)$

6 (a) Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, probar que $[f(x+h) - f(x)]/h = 2ax + b + ah$. Usar esto para ver que $f'(x) = 2ax + b$.

(b) ¿Para qué valor de x es $f'(x) = 0$? Explicar este resultado a la luz de (3.4) de la Sección 3.1.

7 (a) La función de demanda de un bien de precio P está dada por la fórmula $D(P) = a - bP$. Hallar $dD(P)/dP$.

(b) El coste de producir x unidades de un bien está dado por la fórmula $C(x) = p + qx^2$. Hallar $C'(x)$.

8 (a) Probar que $(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) = h$.

(b) Si $f(x) = \sqrt{x}$, probar que $[f(x+h) - f(x)]/h = 1/(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$.

(c) Usar el resultado de la parte (b) para probar que, para $x > 0$,

$$f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(d) Probar que se puede escribir el resultado en la forma

$$\frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

9 (a) Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, probar que

$$[f(x+h) - f(x)]/h = 3ax^2 + 2bx + c + 3axh + ah^2 + bh$$

y, por tanto, que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

(b) Probar que el resultado de la parte (a) generaliza los del Ejemplo 4.3 y el Problema 6.

Problemas avanzados

10 (a) Si $f(x) = x^{1/3}$, probar que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3} \cdot x^{1/3} + x^{2/3}}$$

usando el resultado del Problema 11(a) de la Sección 3.4 con $a = x + h$ y $b = x$.

(b) Usar el resultado de la parte (a) para demostrar que

$$\frac{d}{dx}(x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

4.3 TASAS DE VARIACIÓN Y SU SIGNIFICADO ECONÓMICO

Hemos interpretado la derivada de una función como la pendiente de la tangente a su gráfica en el punto de que se trate. En economía hay otras interpretaciones más importantes. Veamos primero cómo se puede interpretar en general la derivada como tasa de variación.

Supongamos que una cantidad y está relacionada con una cantidad x por $y = f(x)$. Si se da a x un valor a, el valor de la función es $f(a)$. Supongamos que se cambia a por $a + h$. El nuevo valor de y es $f(a + h)$ y la variación del valor de la función, cuando x varía de a a $a + h$, es $f(a + h) - f(a)$. La variación de y por unidad de variación de x tiene un nombre especial, la *tasa media de variación de f en el intervalo* $[a, a + h]$, y vale

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{4.9}$$

Nótese que esta fracción es el cociente de Newton de f. Tomando límite cuando h tiende a 0 se obtiene la derivada de f en a. Por tanto:

La **tasa instantánea de variación** de f en a es $f'(a)$	(4.10)

Este concepto, muy importante, aparece cuando se estudian cantidades que cambian. Cuando la variable independiente es el tiempo, usamos un punto para designar derivación respecto a él. Por ejemplo, si $x(t) = t^2$, escribimos $\dot{x}(t) = 2t$.

A veces nos interesa estudiar la razón $f'(a)/f(a)$. Inventamos un nombre para ella:

> La **tasa proporcional de variación** de f en a es $f'(a)/f(a)$. (4.11)

En economía, se ven muy a menudo tasas proporcionales de variación. A veces se las llama **tasas relativas de variación**. Normalmente se dan en tantos por ciento —o, cuando el tiempo es la variable independiente, en porcentajes *anuales*. A menudo diremos cosas como, por ejemplo, que una variable crece un 3% anual si tiene una tasa proporcional de variación de 3/100 cada año.

Ejemplo 4.4

Sea $N(t)$ el número de individuos de una población (de personas, animales, o plantas) en el instante t. Si t aumenta a $t+h$, la variación de la población es de $N(t+h) - N(t)$ individuos. Así $[N(t+h) - N(t)]/h$ es *la tasa media de variación*. Tomando límite cuando h tiende a 0 se tiene $\dot{N}(t) = dN/dt$, que significa *la tasa de variación de la población en el instante* t. (Al final de esta sección, trataremos el problema que surge cuando $N(t)$ toma sólo valores enteros.)

El Ejemplo 6 de la Sección 2.5 se basaba en el caso en que P, el número de habitantes de Europa (en millones), venía dado por la fórmula

$$P = 6{,}4\,t + 641 \tag{1}$$

En ella, t es el número de años, calculados a partir de 1960. En este caso, la tasa de variación es la misma para todo t:

$$\frac{dP}{dt} = 6{,}4 \text{ millones por año}$$

Interpretaciones económicas

Ejemplo 4.5

Consideremos una empresa que produce un bien en un período dado. Sea

$C(x)$ = coste de producción de x unidades

$R(x)$ = ingreso por venta de x unidades

$\pi(x) = R(x) - C(x)$ = beneficio de producción (y venta) de x unidades

Llamamos a $C'(x)$ el **coste marginal** (en x), a $R'(x)$ el **ingreso marginal** y a $\pi'(x)$ el **beneficio marginal**. Los economistas usan a menudo la palabra **marginal** de esta manera con el significado de derivada.

Damos a continuación otros ejemplos del uso de derivadas en economía. La **propensión marginal al consumo** es la derivada de la función de consumo respecto al ingreso; análogamente, el **producto marginal del trabajo** (o **productividad marginal del trabajo**) derivada de la función de producción respecto al trabajo.

Según la definición, el coste marginal es igual a

$$C'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h} \qquad \textbf{(coste marginal)} \tag{4.12}$$

Como, normalmente, una empresa produce muchas unidades de x, entonces se puede considerar que $h = 1$ es un número cercano a 0 y obtenemos la aproximación

$$C'(x) \approx \frac{C(x+1) - C(x)}{1} = C(x+1) - C(x)$$

Así el coste marginal es aproximadamente igual al **incremento de coste** $C(x+1) - C(x)$, que es el *coste adicional de producir una unidad más de* x.

En cursos elementales de economía se define a menudo el coste marginal como la diferencia $C(x+1) - C(x)$, porque no se pueden usar aún los conceptos adecuados de cálculo diferencial.

Ejemplo 4.6

Sea $K(t)$ el stock de capital de una economía en un instante t. La tasa de variación $\dot{K}(t)$ de $K(t)$ se llama la **tasa de inversión** en el instante t y se le designa por $I(t)$. Así,

$$\dot{K}(t) = I(t) \tag{4.13}$$

Derivabilidad y funciones empíricas

La propia definición de derivada presupone que se pueden tomar incrementos arbitrariamente pequeños en la variable independiente. En los problemas prácticos es normalmente imposible el implementar (o aun medir) estos cambios. Por ejemplo, cantidades económicas que dependen del tiempo (como el precio de un bien o el producto nacional de un país) se miden en intervalos de días, semanas o años. Más aún, las funciones de costes del tipo de las que tratamos en el Ejemplo 4.5 se suelen definir para valores enteros de x. En todos esos casos, las variables toman valores discretos.

Las gráficas de esas funciones estarán, por tanto, formadas por un conjunto discreto de puntos. Para funciones de este tipo, en las cuales tiempo y números varían de forma discreta, el concepto de derivada no está definido. Para remediar eso, se sustituye la función correspondiente por una función derivable que sea una "buena aproximación" de ella.

Por ejemplo, la Figura 4.9 muestra las observaciones del número de parados registrados en Noruega para cada mes de los años 1928–1929.

En la Figura 4.10 tenemos la gráfica de una función derivable que aproxima los puntos de la Figura 4.9. (La gráfica de la Figura 4.10 se ha dibujado usando un programa de computador.)

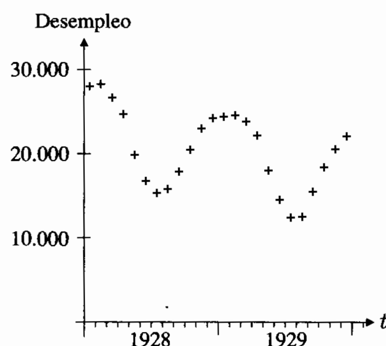


FIGURA 4.9 Desempleo en Noruega (1928–1929).

FIGURA 4.10 Una curva lisa que aproxima los puntos de la Figura 4.9

Problemas

1 Sea $C(x) = x^2 + 3x + 100$ la función de costes de una empresa. Probar que la tasa media de variación, cuando x varía de 100 a $100 + h$, es

$$\frac{C(100+h) - C(100)}{h} = 203 + h \qquad (h \neq 0)$$

¿Cuál es el coste marginal $C'(100)$? Usar (4.8) para hallar $C'(x)$ y, en particular, $C'(100)$.

2 Si la función de costes de una empresa es $C(x) = kx + I$, dar la interpretación económica de los parámetros k e I.

3 Si el ahorro total de un país es una función $S(Y)$ del producto nacional Y, entonces $S'(Y)$ se llama la *propensión marginal al ahorro* (PMA). Hallar la PMA para las funciones siguientes:

(a) $S(Y) = a + bY$ (b) $S(Y) = 100 + 10Y + 2Y^2$

4 Si el impuesto que paga una familia es una función $T(y)$ de su renta y, entonces $dT(y)/dy$ se llama la *tasa marginal del impuesto*. Determinar la tasa marginal para:

$$T(y) = ty \qquad (t \text{ es una constante} \in (0,1))$$

5 Tómense como base las definiciones dadas en el Ejemplo 4.5. Calcular el ingreso marginal, el coste marginal y el beneficio marginal en los dos casos que siguen (p, a, b, a_1, b_1, c_1 son constantes positivas). En cada caso, hallar el valor de x para el que el beneficio marginal es 0:

(a) $R(x) = px, \qquad C(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$

(b) $R(x) = ax^2 - bx^2, \qquad C(x) = a_1x + b_1$

4.4 UNA PINCELADA SOBRE LÍMITES

En la Sección anterior hemos definido la derivada de una función basándonos en el concepto de límite. Este concepto también es importante por otras razones, luego debemos darle una ojeada desde más cerca.

Vamos a dar aquí una definición preliminar y algunas reglas importantes para el cálculo de límites. En el Capítulo 6 discutiremos más a fondo el concepto de límite, así como el de continuidad, que está íntimamente relacionado con él.

Por ejemplo, consideremos la fórmula

$$F(x) = \frac{x^2 - 16}{4\sqrt{x} - 8}$$

Nótese que, si $x = 4$, la fracción se convierte en la expresión sin sentido "0/0." Así, la función F no está definida para $x = 4$, pero nos podemos preguntar qué pasa con $F(x)$ cuando x está próximo a 4. Usando una calculadora (excepto cuando $x = 4$), encontramos los valores de la Tabla 4.1.

TABLA 4.1 *Valores de $F(x) = (x^2 - 16)/(4\sqrt{x} - 8)$ cuando x está próximo a 4*

x	3,9	3,99	3,999	3,9999	4,0	4,0001	4,001	4,01	4,1
F(x)	7,850	7,985	7,998	8,000	*	8,000	8,002	8,015	8,150

**No definida.*

Parece obvio, a partir de la tabla que, cuando x se aproxima a 4, la fracción $F(x)$ se aproxima a 8. Parece razonable decir que $F(x)$ tiende al límite 8 cuando x tiende a 4. En este caso escribimos

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{4\sqrt{x} - 8} = 8 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2 - 16}{4\sqrt{x} - 8} \to 8 \quad \text{cuando} \quad x \to 4$$

Hemos representado en la Figura 4.11 un trozo de la gráfica de F. La función F está definida para todo $x \geq 0$, excepto para $x = 4$. También se escribe $\lim_{x \to 4} F(x) = 8$. (Se usa un círculo pequeño para indicar que el punto $(4, 8)$ no está en la gráfica de F.)

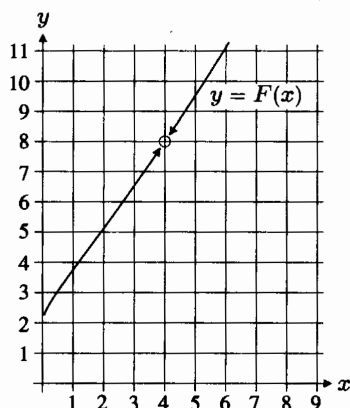


FIGURA 4.11 $y = F(x) = \dfrac{x^2 - 16}{4\sqrt{x} - 8}$

Una definición preliminar del concepto de límite

Supongamos, en general, que una función f está definida para todo x próximo a a pero no necesariamente para $x = a$. *Entonces decimos que $f(x)$ tiene el límite A cuando x tiende a a, si $f(x)$ tiende a A cuando x tiende a a (pero no es igual a a).* Escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{ó} \quad f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

Es posible que $f(x)$ no tienda a ningún número concreto cuando x tiende a a. En este caso decimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ *no existe*, o que $f(x)$ *no tiene límite cuando x tiende a a.*

Ejemplo 4.7

Usar una calculadora para estudiar los límites siguientes:

$$\textbf{(a)} \ \lim_{x \to 3} (3x - 2) \qquad \textbf{(b)} \ \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} \qquad \textbf{(c)} \ \lim_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2}$$

Solución:

(**a**) Cuando x es un número próximo a 3, obtenemos la Tabla 4.2. En ella se ve que $3x - 2$ parece tender a 7 cuando $x \to 3$, luego que $\lim_{x\to 3}(3x - 2) = 7$. (Si $x = 3$ entonces $3x - 2$ es igual a 7. Sin embargo, la definición de $\lim_{x\to 3}(3x - 2)$ no usa para nada el valor de $3x - 2$ en $x = 3$.)

TABLA 4.2 *Valores de $3x - 2$ cuando x está próximo a 3*

x	2,9	2,95	2,99	2,999	3,001	3,01	3,05	3,1
$3x - 2$	6,7	6,85	6,97	6,997	7,003	7,03	7,15	7,3

(**b**) Tomando valores próximos a 0 para h se construye la Tabla 4.3. La tabla sugiere que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+1}-1}{h} = 0{,}5$$

TABLA 4.3 *Valores de $(\sqrt{h+1} - 1)/h$ cuando h está próximo a 0*

h	−0,5	−0,2	−0,1	−0,01	0,0	0,01	0,1	0,2	0,5
$\frac{\sqrt{h+1}-1}{h}$	0,586	0,528	0,513	0,501	*	0,499	0,488	0,477	0,449

**No definido.*

(**c**) Eligiendo valores de x próximos a -2 construimos la Tabla 4.4. Cuando x se aproxima a -2, vemos que el valor de la fracción se hace muy grande. Ampliando la tabla de valores es claro, por ejemplo, que para $x = -2{,}0001$ y $x = -1{,}9999$, el valor de la fracción es 100 millones. Así concluimos que $1/(x + 2)^2$ no tiende a ningún límite cuando x tiende a -2. Puesto que la fracción se hace cada vez mayor cuando x se va acercando a -2, decimos que tiende a infinito y escribimos $\lim_{x\to -2} 1/(x + 2)^2 = \infty$.

TABLA 4.4 *Valores de $1/(x + 2)^2$ cuando x está próximo a -2*

x	−1,8	−1,9	−1,99	−1,999	−2,0	−2,001	−2,01	−2,1	−2,2
$\frac{1}{(x+2)^2}$	25	100	10.000	1.000.000	*	1.000.000	10.000	100	25

**No definido.*

Los límites que hemos calculado anteriormente estaban todos basados en fundamentos numéricos poco rigurosos. Por ejemplo, considerando el Ejemplo 4.7(**b**), ¿podemos estar seguros de que nuestra intuición es correcta? ¿No podría ocurrir que, eligiendo valores de h aún más próximos a 0, la fracción no tendiese a un límite distinto de 0,5, o quizás no tuviese límite? Ulteriores cálculos numéricos van a apoyar nuestra creencia de que la intuición inicial es correcta, pero nunca podremos construir una tabla que contenga a *todos* los valores de h próximos a 0, luego los cálculos numéricos no van a poder, por sí solos, determinar con certeza un límite. Esto pone de relieve la necesidad de tener un procedimiento riguroso de cálculo de límites. En primer lugar se requiere una definición matemática precisa del concepto de límite. En la Sección 6.7 daremos esta definición. Mientras tanto damos una preliminar,

> Escribir que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ significa que podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a A tanto como queramos para todo x suficientemente próximo a a, pero no igual a él. (4.14)

Recalcamos que:

1. El número $\lim_{x \to a} f(x)$ depende de los valores de $f(x)$ para valores de x próximos a a, pe no de cómo f se comporta justamente en el valor $x = a$. Para hallar el $\lim_{x \to a} f(x)$ no n interesa el valor $f(a)$, ni siquiera el hecho de que f esté o no definida en a.
2. Cuando se calcula $\lim_{x \to a} f(x)$ se deben tomar en cuenta valores de x a la izquierda y a l derecha de a.

El siguiente Ejemplo ilustra geométricamente el concepto de límite.

Ejemplo 4.8

La Figura 4.12 muestra la gráfica de una función particular f, definida en el intervalo cerrad $[0, 9]$. Hallar el $\lim_{x \to a} f(x)$ para $a = 2$, 3, 4 y 6. (El punto al final de cada flecha no form parte de la gráfica, pero es el límite de puntos de la gráfica.)

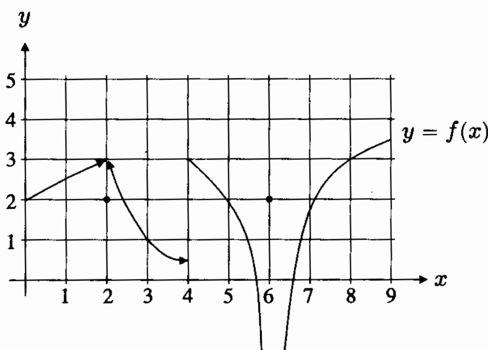


FIGURA 4.12

Solución: Vemos que $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$. Nótese que $f(2) = 2$. También $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ Aquí $f(3) = 1$. El límite $\lim_{x \to 4} f(x)$ no existe. Para x próximo a 4 y $x < 4$, $f(x)$ tiende a 1/2; para x próximo a 4 y $x > 4$, $f(x)$ tiende a 3. Así, $f(x)$ no tiende a *un* número concret cuando x tiende a 4. Finalmente, $\lim_{x \to 6} f(x)$ no existe. Cuando x tiende a 6, $f(x)$ decrece indefinidamente; escribimos $\lim_{x \to 6} f(x) = -\infty$.

Reglas para los límites

Desde luego, no se pueden determinar realmente los límites mediante cálculos numéricos. En luga de eso, vamos a usar unas reglas sencillas cuya validez se podrá demostrar una vez que hayamos dado una definición precisa del concepto de límite. Esas reglas son muy claras, e incluso hemos usado algunas ya en la sección anterior. Estudiemos brevemente algunas de ellas. Supongamos que f y g son funciones definidas en un entorno de a (pero no necesariamente en a). Entonces se tienen las reglas del recuadro de la página siguiente.

Es fácil dar una explicación intuitiva de esas reglas. Si $\lim_{x \to a} f(x) = A$ y $\lim_{x \to a} g(x) = B$, sabemos que, cuando x está próximo a a, entonces $f(x)$ está próximo a A y $g(x)$ lo está a B. Así $f(x) + g(x)$ debe estar próximo a $A + B$, el producto $f(x)g(x)$ a $A \cdot B$ y así sucesivamente.

Las reglas de (4.15) se pueden usar repetidamente para obtener otras más generales, como

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + \cdots + \lim_{x \to a} f_n(x) \qquad (4.16)$$

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \cdots \lim_{x \to a} f_n(x) \qquad (4.17)$$

Reglas para límites

Si $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, entonces

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = A + B \\
&\text{(ii)} \quad \lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = A - B \\
&\text{(iii)} \quad \lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = A \cdot B \\
&\text{(iv)} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \qquad \text{(siempre que } B \neq 0) \\
&\text{(v)} \quad \lim_{x\to a} [f(x)]^{p/q} = A^{p/q} \qquad \text{(si } A^{p/q} \text{ está definido)}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

En palabras decimos que *el límite de una suma es la suma de los límites y que el límite de un producto es el producto de los límites.*

Supongamos que la función $f(x)$ es constante igual a c para todo x. Entonces

$$\lim_{x\to a} c = c \qquad \text{(para todo punto } a) \tag{4.18}$$

Es también evidente que, si $f(x) = x$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a \qquad \text{(para todo punto } a) \tag{4.19}$$

Combinando estos dos límites sencillos con las reglas generales (4.15)–(4.17) se pueden calcular fácilmente límites de ciertas combinaciones de funciones.

Ejemplo 4.9

Calcular los límites siguientes:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to -2} (x^2 + 5x) \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 4} \frac{2x^{3/2} - \sqrt{x}}{x^2 - 15} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to a} Ax^n$$

Solución: Usando las reglas (4.15)–(4.17), obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \lim_{x\to -2} (x^2 + 5x) &= \lim_{x\to -2} (x \cdot x) + \lim_{x\to -2} (5 \cdot x) \\
&= \big(\lim_{x\to -2} x\big)\big(\lim_{x\to -2} x\big) + \big(\lim_{x\to -2} 5\big)\big(\lim_{x\to -2} x\big) \\
&= (-2)(-2) + 5 \cdot (-2) = -6
\end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{x\to 4} \frac{2x^{3/2} - \sqrt{x}}{x^2 - 15} = \frac{2 \lim_{x\to 4} x^{3/2} - \lim_{x\to 4} \sqrt{x}}{\lim_{x\to 4} x^2 - 15} = \frac{2 \cdot 4^{3/2} - \sqrt{4}}{4^2 - 15} = 14$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{x\to a} Ax^n = \big(\lim_{x\to a} A\big)\big(\lim_{x\to a} x^n\big) = A \cdot \big(\lim_{x\to a} x\big)^n = A \cdot a^n$$

No ha sido difícil hallar los límites en este ejemplo usando las reglas (4.15)–(4.19). El ejemplo con el que comenzó esta sección y el 4.7(b) presentan mayores dificultades. En ellos hay una fracción cuyo numerador y denominador tienden simultáneamente a 0. La regla (4.15)(iv) no se

puede aplicar directamente es estos casos. Sin embargo, una sencilla observación puede ayudarnos a calcular el límite, siempre que éste exista. Puesto que $\lim_{x\to a} f(x)$ depende solamente de los valores de f cuando x está próximo a a, pero no es igual a a, se tiene lo siguiente:

> Si las funciones f y g coinciden para todo x próximo a a (pero no necesariamente en $x = a$), entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ cuando cualquiera de los dos límites existe. (4.20)

Damos unos ejemplos de cómo funciona esta regla.

Ejemplo 4.10

Calcular los límites siguientes:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 2} \frac{3x^2+3x-18}{x-2} \qquad \text{(b)}\ \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+1}-1}{h} \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8}$$

Solución:

(a) Vemos que tanto numerador como denominador tienden a 0 cuando x tiende a 2. Como el numerador $3x^2 + 3x - 18$ es igual a 0 para $x = 2$, es divisible por $x - 2$. En efecto, $3x^2 + 3x - 18 = 3(x-2)(x+3)$. Por tanto,

$$f(x) = \frac{3x^2+3x-18}{x-2} = \frac{3(x-2)(x+3)}{x-2}$$

Como sólo nos interesan valores $x \neq 2$, se puede simplificar $x - 2$ del numerador y denominador obteniéndose $3(x+3)$. Las funciones $f(x)$ y $g(x) = 3(x+3)$ coinciden para todo $x \neq 2$. Según (4.20), esto implica que

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+3x-18}{x-2} = \lim_{x\to 2} 3(x+3) = 3(2+3) = 15$$

(b) De nuevo numerador y denominador tienden a 0 cuando h tiende a 0. Ahora tenemos que usar un pequeño artificio. Si multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{h+1}+1$ obtenemos

$$\frac{\sqrt{h+1}-1}{h} = \frac{\left(\sqrt{h+1}-1\right)\left(\sqrt{h+1}+1\right)}{h\left(\sqrt{h+1}+1\right)} = \frac{h+1-1}{h\left(\sqrt{h+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{h+1}+1}$$

donde se ha simplificado por h. Para todo $h \neq 0$ (y $h \geq -1$), la función dada coincide con $1/(\sqrt{h+1}+1)$, que tiende a $1/2$ cuando h tiende a 0. Así deducimos que el límite de la función dada es igual a $1/2$, lo que confirma el resultado del Ejemplo 4.7(b).

(c) Debemos tratar de simplificar la fracción porque $x = 4$ da $0/0$. De nuevo usamos un artificio para factorizar la fracción. Se tiene:

$$\frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8} = \frac{(x+4)(x-4)}{4\left(\sqrt{x}-2\right)} = \frac{(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{4\left(\sqrt{x}-2\right)} \qquad (*)$$

Hemos usado la factorización $x - 4 = \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$, que es válida para $x \geq 0$. Podemos simplificar por $\sqrt{x}-2$ en la última fracción de $(*)$ cuando $\sqrt{x}-2 \neq 0$ —esto

es, cuando $x \neq 4$. Usando (4.20) de nuevo se tiene

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{4}(x+4)(\sqrt{x}+2) = \frac{1}{4}(4+4)(\sqrt{4}+2) = 8$$

Esto confirma la afirmación que hicimos en la introducción a esta sección. La Sección 7.5 trata más sistemáticamente los límites de fracciones del tipo de las estudiadas en el Ejemplo 4.10.

Problemas

1 Determinar los límites siguientes usando las reglas para el cálculo de límites:

(a) $\lim_{x\to 0} (3+2x^2)$ (b) $\lim_{x\to -1} \frac{3+2x}{x-1}$ (c) $\lim_{x\to 2} (2x^2+5)^3$

(d) $\lim_{t\to 8} \left(5t+t^2-\frac{1}{8}t^3\right)$ (e) $\lim_{y\to 0} \frac{(y+1)^5-y^5}{y+1}$ (f) $\lim_{z\to -2} \frac{1/z+2}{z}$

2 Considérese el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+7x-8}{x-1}$$

(a) Estudiarlo numéricamente haciendo una tabla de valores de la fracción cuando x está próximo a 1.

(b) Calcularlo usando (4.20).

3 Para la función h cuya gráfica está representada en la Figura 4.13, estudiar $\lim_{t\to a} h(t)$ para $a = -1$, 0, 2, 3 y 4.

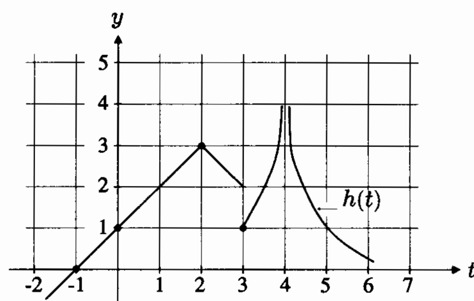


FIGURA 4.13

4 Calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{x\to 2} (x^2+3x-5)$ (b) $\lim_{y\to -3} \frac{1}{y+8}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x-1}{x^5-x^2-1}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2-2x}{x}$ (e) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ $(h \neq 0)$

5 Calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{h\to 2} \frac{1/3-2/3h}{h-2}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^2}$ (c) $\lim_{t\to 3} \sqrt[3]{\frac{32t-96}{t^2-2t-3}}$

(d) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+3}-\sqrt{3}}{h}$ (e) $\lim_{t\to -2} \frac{t^2-4}{t^2+10t+16}$ (f) $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$

6 Calcular los límites siguientes, si $f(x) = x^2+2x$:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (c) $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

(d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (e) $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (f) $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

7 Usando una calculadora, calcular numéricamente los límites siguientes:

(a) $\lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h}$ (b) $\lim_{h\to 0} \frac{3^h-1}{h}$ (c) $\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h}$

Problemas avanzados

8 Calcular los límites siguientes (*Indicación:* Para la parte (b), efectuar la sustitución $\sqrt[3]{27+h}=u$.)

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^3-8}$ (b) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+h}-3}{h}$ (c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ (n es un número natural)

4.5 REGLAS SENCILLAS DE DERIVACIÓN

En la Sección 4.2, definimos la derivada de una función f por la fórmula

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{$*$}$$

Si existe este límite, decimos que f es **derivable** en x. El proceso de hallar la derivada de una función se llama **derivación**. Es práctico pensar que esto es una operación que transforma una función f en otra f'. La función f' está entonces definida para los valores de x para los que existe el límite en $(*)$. Si $y = f(x)$, se pueden usar los símbolos y' y dy/dx en lugar de $f'(x)$.

En los ejemplos y problemas de la Sección 4.2 hemos usado la fórmula $(*)$ y la regla (4.5) para hallar las derivadas de algunas funciones sencillas. Sin embargo, el aplicar la definición directamente suele ser difícil. En el próximo capítulo se usa sistemáticamente la regla (4.5) para deducir otras con las que se pueden calcular derivadas de funciones muy complicadas. Aquí consideramos solamente unas reglas muy sencillas

Si f es una función constante $f(x) = A$, su derivada $f'(x)$ es igual a 0:

$$f(x) = A \Longrightarrow f'(x) = 0 \tag{4.21}$$

Este resultado se ve muy bien geométricamente. La gráfica de $f(x) = A$ es una recta paralela al eje x. La tangente a la gráfica tiene pendiente 0 en cada punto (véase Figura 4.14.)

Se aconseja aplicar la definición de $f'(x)$ para obtener el mismo resultado.

Las constantes aditivas desaparecen al derivar:

$$y = A + f(x) \Longrightarrow y' = f'(x) \tag{4.22}$$

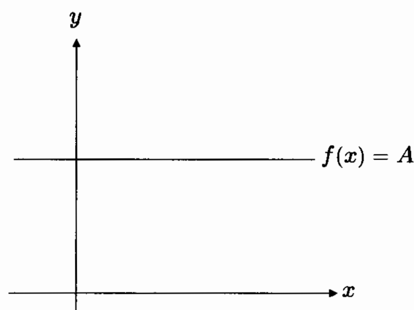


FIGURA 4.14 La derivada de una constante es 0.

Las constantes multiplicativas se conservan al derivar:

$$y = Af(x) \Longrightarrow y' = Af'(x) \tag{4.23}$$

La regla (4.22) se ilustra gráficamente en la Figura 4.15. La gráfica de $A + f(x)$ se obtiene de la de $f(x)$ trasladándola A unidades en la dirección del eje y. Por tanto, las gráficas de $f(x)$ y $f(x) + A$ son paralelas y las tangentes a las dos curvas en cada valor de x deben tener la misma pendiente. Úsese de nuevo la definición de $f'(x)$ para dar una demostración formal de esta afirmación.

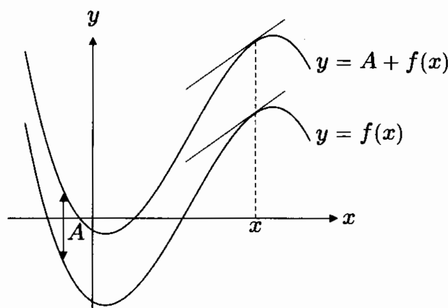


FIGURA 4.15 Las gráficas de las funciones son paralelas, las funciones tienen la misma derivada.

Vamos a demostrar la regla (4.23) usando la definición de derivada. Si $g(x) = Af(x)$, entonces $g(x+h) - g(x) = Af(x+h) - Af(x) = A[f(x+h) - f(x)]$ y así

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = A \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = Af'(x)$$

En notación de Leibniz, los tres resultados se escriben así:

$$\frac{d}{dx}A = 0, \qquad \frac{d}{dx}[A + f(x)] = \frac{d}{dx}f(x), \qquad \frac{d}{dx}[Af(x)] = A\frac{d}{dx}f(x)$$

Ejemplo 4.11

Supongamos que se conoce $f'(x)$. Usando las reglas (4.22) y (4.23), hallar las derivadas de

$$\textbf{(a)}\ 5 + f(x) \quad \textbf{(b)}\ f(x) - 1/2 \quad \textbf{(c)}\ 3f(x) \quad \textbf{(d)}\ -\frac{f(x)}{5} \quad \textbf{(e)}\ \frac{Af(x) + B}{C}$$

Solución: Usando notación mixta, tenemos lo siguiente:

$$\text{(a)}\ \frac{d}{dx}[5+f(x)] = f'(x)$$

$$\text{(b)}\ \frac{d}{dx}[f(x)-1/2] = \frac{d}{dx}[(-1/2)+f(x)] = f'(x)$$

$$\text{(c)}\ \frac{d}{dx}[3f(x)] = 3f'(x)$$

$$\text{(d)}\ \frac{d}{dx}\left[-\frac{f(x)}{5}\right] = \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{5}f(x)\right] = -\frac{1}{5}f'(x)$$

$$\text{(e)}\ \frac{d}{dx}\left[\frac{Af(x)+B}{C}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{A}{C}f(x)+\frac{B}{C}\right] = \frac{A}{C}f'(x)$$

Regla de la potencia

Pocas reglas de derivación son más útiles que la siguiente:

Regla de la potencia

$$f(x) = x^a \Longrightarrow f'(x) = ax^{a-1} \quad (a \text{ es una constante arbitraria}) \tag{4.24}$$

Hemos demostrado ya esta regla en la Sección 4.2 para $a = 2$ y $a = 3$. Se puede generalizar el método que se usó en estos ejemplos, como vamos a ver.

Demostración de (4.24) cuando a es un número natural n:

Escribimos $f(x) = x^n$ y formamos el cociente de Newton

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \tag{*}$$

Desarrollemos $(x+h)^n = (x+h)(x+h)\cdots(x+h)$. La expresión resultante debe contener al término x^n que resulta de tomar x de cada uno de los n factores. También contendrá términos del tipo $x^{n-1}h$. Hay n de tales términos, que se obtienen eligiendo $n-1$ de las x y *una* h. Todos los términos restantes deben contener al menos dos factores h, luego

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + (\text{téminos que contienen a } h^2 \text{ como factor})$$

Por tanto,

$$(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + (\text{términos que contienen a } h^2 \text{ como factor})$$

Por tanto, cuando $h \neq 0$, tenemos

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + (\text{términos que contienen a } h \text{ como factor})$$

Ahora hagamos que h tienda a 0. Cada término que contiene a h como factor va a tender a 0 y la suma de todos ellos tenderá a 0. Así, el miembro de la derecha tiende a $nx^{n-1} + 0 = nx^{n-1}$.

Puesto que la fracción de $(*)$ tiende a nx^{n-1} cuando h tiende a 0, la regla (4.24) *se verifica* cuando a es un número natural, por definición de $f'(x)$.

Ejemplo 4.12

Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

$$\text{(a) } y = x^5 \qquad \text{(b) } y = 3x^8 \qquad \text{(c) } y = \frac{x^{100}}{100}$$

Solución:

$$\text{(a) } y = x^5 \Longrightarrow y' = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$\text{(b) } y = 3x^8 \Longrightarrow y' = 3 \cdot 8x^{8-1} = 24x^7$$

$$\text{(c) } y = \frac{x^{100}}{100} = \frac{1}{100}x^{100} \Longrightarrow y' = \frac{1}{100}100x^{100-1} = x^{99}$$

La demostración anterior es válida sólo cuando a es un número natural. Sin embargo, el resultado de (4.24) es válido también si a es un número negativo, o incluso si a es un número racional, positivo o negativo. Más aún, (4.24) es cierta también si a es un número irracional. Consideraremos más tarde todos esos casos.

Ejemplo 4.13

Calcular las derivadas siguientes:

$$\text{(a) } \frac{d}{dx}\left(x^{-0{,}33}\right) \qquad \text{(b) } \frac{d}{dr}(-5r^{-3}) \qquad \text{(c) } \frac{d}{dp}(Ap^{\alpha} + B) \qquad \text{(d) } \frac{d}{dx}\left(\frac{A}{\sqrt{x}}\right)$$

Solución:

$$\text{(a) } \frac{d}{dx}\left(x^{-0{,}33}\right) = -0{,}33x^{-0{,}33-1} = -0{,}33x^{-1{,}33}$$

$$\text{(b) } \frac{d}{dr}(-5r^{-3}) = (-5)(-3)r^{-3-1} = 15r^{-4}$$

$$\text{(c) } \frac{d}{dp}(Ap^{\alpha} + B) = A\alpha p^{\alpha-1}$$

$$\text{(d) } \frac{d}{dx}\left(\frac{A}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}(Ax^{-1/2}) = A\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1/2-1} = -\frac{A}{2}x^{-3/2} = \frac{-A}{2x\sqrt{x}}$$

Problemas

1 Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $y = 5$ (b) $y = x^4$ (c) $y = 9x^{10}$ (d) $y = \pi^7$

2 Supongamos que conocemos $g'(x)$. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $2g(x) + 3$ (b) $-\frac{1}{6}g(x) + 8$ (c) $\dfrac{g(x) - 5}{3}$

3 Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(a) x^6 (b) $3x^{11}$ (c) x^{50} (d) $-4x^{-7}$

(e) $\dfrac{x^{12}}{12}$ (f) $-\dfrac{2}{x^2}$ (g) $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ (h) $-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$

4 Hallar las derivadas siguientes:

(a) $\dfrac{d}{dr}(4\pi r^2)$ (b) $\dfrac{d}{dy}\left(Ay^{b+1}\right)$ (c) $\dfrac{d}{dA}\left(\dfrac{1}{A^2\sqrt{A}}\right)$

5 Explicar por qué

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Usar esta ecuación para calcular $f'(a)$ cuando $f(x) = x^2$.

6 Para cada una de las funciones siguientes, hallar una función $F(x)$ que tenga a $f(x)$ como derivada. (Nótese que no se pide $f'(x)$.)

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = 2x + 3$ (c) $f(x) = x^a \quad (a \neq -1)$

Problemas avanzados

7 Los límites siguientes están escritos en la forma $\lim_{h \to 0}[f(a+h) - f(a)]/h$. Usar el conocimiento de derivadas que se tenga para hallar los límites.

(a) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h}$ (b) $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{(s+1)^5 - 1}{s}$ (c) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^2 + 10 - 5x^2 - 10}{h}$

4.6 DERIVACIÓN DE SUMAS, PRODUCTOS Y COCIENTES

Si conocemos $f'(x)$ y $g'(x)$, ¿cuáles son las derivadas de $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $f(x)/g(x)$? Probablemente el lector se hará una idea clara de cuáles son las dos primeras, pero esto es menos probable en el caso de las dos últimas (a menos que ya se sepan las respuestas).

Sumas y diferencias

Supongamos que f y g son funciones definidas sobre un mismo conjunto A de números reales. La función F definida por la fórmula $F(x) = f(x) + g(x)$ se llama la *suma* de f y g y se escribe $F = f + g$. La función G definida por $G(x) = f(x) - g(x)$ se llama la *diferencia* entre f y g y se escribe $G = f - g$. Las reglas de derivación siguientes son importantes.

Derivación de sumas y diferencias

Si f y g son derivables en un punto x, también lo son la suma $F = f + g$ y la diferencia $G = f - g$, y

$$F(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow F'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{4.25}$$

$$G(x) = f(x) - g(x) \Longrightarrow G'(x) = f'(x) - g'(x) \tag{4.26}$$

Lo anterior se escribe así en notación de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Demostración: Probemos (4.25). El cociente de Newton de F es

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Cuando $h \to 0$, las dos últimas fracciones tienden a $f'(x)$ y $g'(x)$, respectivamente, y así la suma de las fracciones tiende a $f'(x)+g'(x)$. Por tanto,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

La demostración de (4.26) es semejante —solamente los signos cambian, de la manera obvia.

Ejemplo 4.14

Calcular

$$\frac{d}{dx}\left(3x^8 + \frac{x^{100}}{100}\right) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\left(3x^8 - \frac{x^{100}}{100}\right)$$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(3x^8 + \frac{x^{100}}{100}\right) = \frac{d}{dx}(3x^8) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}\right) = 24x^7 + x^{99}$$

donde hemos usado (4.25) y resultados del Ejemplo 4.12. De manera análoga,

$$\frac{d}{dx}\left(3x^8 - \frac{x^{100}}{100}\right) = 24x^7 - x^{99}$$

Ejemplo 4.15

En el Ejemplo 4.5, hemos definido $\pi(x) = R(x) - C(x)$ y así (4.26) implica que $\pi'(x) = R'(x) - C'(x)$. En particular, $\pi'(x) = 0$ cuando $R'(x) = C'(x)$. En palabras: *El beneficio marginal es 0 cuando el ingreso marginal es igual al coste marginal.*

Se puede extender la regla (4.25) a la suma de un número arbitrario de términos:

La derivada de una suma es la suma de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}\left[f_1(x) + \cdots + f_n(x)\right] = \frac{d}{dx}f_1(x) + \cdots + \frac{d}{dx}f_n(x)$$

Las reglas que se han dado previamente se pueden usar ahora para calcular la derivada de cualquier polinomio.

Ejemplo 4.16

Hallar la derivada de un polinomio general de grado n.

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\right)$$
$$= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$$

Normalmente no hay razón para emplear una fórmula tan general porque es muy fácil aplica resultados anteriores a cada caso concreto.

Productos

Si f y g están definidas sobre un mismo conjunto A, la función F definida por la fórmula $F(x) =$ $f(x) \cdot g(x)$ se llama *el producto* de f y g y escribimos $F = f \cdot g$ (ó $F = fg$). Por ejemplo si $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, entonces $(f \cdot g)(x) = x^3$. En este caso, $f'(x) = 1$, $g'(x) = 2x$ y $(f \cdot g)'(x) = 3x^2$. Vemos, por tanto, que la derivada de $(f \cdot g)(x)$ *no* es igual a $f'(x) \cdot g'(x) = 2x$. La regla correcta para derivar un producto es algo más complicada.

La derivada de un producto

Si f y g son derivables en el punto x, la función $F = f \cdot g$ lo es también y (4.27)

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) \Longrightarrow F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

En palabras sencillas: *La derivada de un producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda, más la primera por la derivada de la segunda.* La fórmula es más fácil de comprender que la frase.

En notación de Leibniz, la regla del producto se expresa como:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x)$$

Antes de dar una demostración de (4.27) ponemos dos ejemplos:

Ejemplo 4.17

Hallar $h'(x)$ cuando $h(x) = (x^3 - x) \cdot (5x^4 + x^2)$.

Solución: Vemos que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ con $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = 5x^4 + x^2$. En este caso, $f'(x) = 3x^2 - 1$ y $g'(x) = 20x^3 + 2x$. Así

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= (3x^2 - 1) \cdot (5x^4 + x^2) + (x^3 - x) \cdot (20x^3 + 2x) \end{aligned}$$

Usualmente (pero no siempre), se puede simplificar la respuesta, desarrollando el resultado, para obtener un polinomio. Un cálculo sencillo da

$$h'(x) = 35x^6 - 20x^4 - 3x^2$$

Se puede operar de otra manera: desarrollando primero y luego derivando. Así

$$h(x) = (x^3 - x)(5x^4 + x^2) = 5x^7 - 4x^5 - x^3$$

y la derivada de este polinomio nos da la misma respuesta que antes.

Ejemplo 4.18

Pondremos un ejemplo de la regla de derivación de un producto considerando la extracción de petróleo de un pozo. Supongamos que la cantidad de petróleo que se extrae por unidad de tiempo y el precio unitario cambian con el tiempo t. Definimos

$$x(t) = \text{tasa de extracción en barriles al día en el instante } t \quad (1)$$

$$p(t) = \text{precio en dólares por barril en el instante } t \tag{2}$$

Entonces obtenemos una expresión para el ingreso en dólares por día, que es la siguiente:

$$R(t) = p(t)x(t) \tag{3}$$

Según la regla del producto (recordando que se usan a menudo "puntos" para indicar derivación con respecto al tiempo),

$$\dot{R}(t) = \dot{p}(t)x(t) + p(t)\dot{x}(t) \tag{4}$$

Se puede interpretar como sigue el miembro de la derecha de (4). Supongamos que $p(t)$ y $x(t)$ crecen con el tiempo por la inflación y porque la compañía petrolera propietaria del pozo aumenta la capacidad del equipo de extracción. Entonces $R(t)$ crece por dos razones. Primeramente, $R(t)$ aumenta porque el precio lo hace. Este aumento es proporcional a la cantidad extraída $x(t)$ y es igual a $\dot{p}(t)x(t)$. También $R(t)$ crece porque la extracción aumenta. Su contribución a la tasa de variación de $R(t)$ debe ser proporcional al precio y es igual a $p(t)\dot{x}(t)$. La ecuación (4) expresa el simple hecho de que $\dot{R}(t)$, la tasa total de variación de $R(t)$, es la suma de esas dos partes.

Nótese también que la tasa proporcional de crecimiento del ingreso se calcula dividiendo (4) por (3), obteniéndose

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{p}x + p\dot{x}}{px} = \frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{x}}{x}$$

En palabras: *la tasa proporcional de crecimiento del ingreso es la suma de las tasas proporcionales de variación de precio y cantidad.*

Acabamos de ver cómo derivar productos de dos funciones. ¿Qué ocurre con los productos de más de dos funciones? Por ejemplo, supongamos que

$$y = f(x)g(x)h(x)$$

¿Qué es y'? Generalizamos la técnica anterior partiendo de la expresión $y = [f(x)g(x)]h(x)$. La regla del producto da

$$\begin{aligned} y' &= [f(x)g(x)]'\, h(x) + [f(x)g(x)]\, h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\, h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

Si ninguna de las tres funciones es igual a 0, podemos escribir el resultado de la manera siguiente:

$$\frac{(fgh)'}{fgh} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h}$$

Por analogía, es fácil escribir la derivada del producto de n funciones.

Demostración de (4.27):

Supongamos que f y g son derivables en x, luego que los dos cocientes de Newton

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \tag{1}$$

tienden a los límites $f'(x)$ y $g'(x)$, respectivamente, cuando h tiende a 0. Tenemos que probar que el cociente de Newton de F tiende también a un límite, que es $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. El cociente de Newton de F es

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \tag{2}$$

Para poder seguir tenemos que transformar la expresión anterior, de tal manera que aparezcan los cocientes de Newton de f y g.

Usamos un artificio: El numerador del miembro de la derecha de (2) no cambia si se le suma y resta $f(x)g(x+h)$. Por tanto, con una reordenación conveniente de los términos, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] g(x+h)+f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\end{aligned} \tag{3}$$

Cuando h tiende a 0, los dos cocientes de Newton entre corchetes tienden a $f'(x)$ y $g'(x)$, respectivamente. Para $h \neq 0$ podemos escribir $g(x+h)$ en la forma,

$$g(x+h)=\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] h+g(x)$$

que tiende $g'(x)\cdot 0+g(x)=g(x)$ cuando h tiende a 0. De aquí se deduce que el cociente de Newton de F en (3) tiende a $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ cuando h tiende a 0.

Cocientes

Sean f y g funciones derivables en x y escribamos $F(x)=f(x)/g(x)$. Naturalmente, suponemos que $g(x)\neq 0$, luego que F está definida en x. La función F se llama el *cociente* de f y g y se escribe $F=f/g$. Queremos encontrar una fórmula para $F'(x)$. Si nos acordamos de la complicación de la fórmula de la derivada de un producto, deberíamos ser reacios a tratar de dar una intuición rápida de cómo es la fórmula de $F'(x)$.

De hecho, es muy fácil hallar la fórmula de $F'(x)$ si *suponemos* que $F(x)$ *es* derivable. Como $F(x)=f(x)/g(x)$ implica que $f(x)=F(x)g(x)$, la regla del producto da

$$f'(x)=F'(x)\cdot g(x)+F(x)\cdot g'(x)$$

Resolviendo esta ecuación en $F'(x)$, en términos de las otras funciones, se obtiene

$$F'(x)=\frac{f'(x)-F(x)g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)-[f(x)/g(x)]g'(x)}{g(x)}$$

Multiplicando numerador y denominador de la última fracción por $g(x)$ da

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

El teorema se puede enunciar formalmente así:

La derivada de un cociente

Si f y g son derivables en x y $g(x)\neq 0$, entonces $F=f/g$ es derivable en x, y

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow F'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \tag{4.28}$$

En palabras: *La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador dividido por el denominador al cuadrado.* (Para

probar que F *es* derivable en x, bajo las hipótesis anteriores, hay que estudiar el cociente de Newton de F como hicimos en la regla del producto, véase Problema 12). Con notación más sencilla se tiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Nota: En la fórmula del producto, las dos funciones aparecen simétricamente, luego es muy fácil de recordar. En cambio, en la fórmula de la derivada de un cociente, las expresiones del numerador deben estar en el orden adecuado. La siguiente sugerencia sirve para comprobar que se ha escrito la fórmula correctamente. Escríbase la fórmula que se cree correcta. Considérese el caso en que $g \equiv 1$. Entonces $g' \equiv 0$ y la fórmula escrita debería dar f'. Si se obtiene $-f'$, hay que cambiar de signo al numerador.

Ejemplo 4.19

Calcular $F'(x)$ y $F'(4)$ cuando $F(x) = (3x - 5)/(x - 2)$.

Solución: Aplicamos (4.28) con $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = x - 2$. Entonces, $f'(x) = 3$ y $g'(x) = 1$. Así obtenemos, para $x \neq 2$:

$$F'(x) = \frac{3 \cdot (x-2) - (3x-5) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x + 5}{(x-2)^2} = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

Para $F'(4)$, ponemos $x = 4$ en la fórmula de $F'(x)$ y así se obtiene $F'(4) = -1/(4-2)^2 = -1/4$.

Ejemplo 4.20

Sea $C(Q)$ el coste total de producir Q unidades de un bien (véase Ejemplo 3.3.) La cantidad $C(Q)/Q$ se llama el *coste medio* de producir Q unidades. Hallar la expresión de

$$\frac{d}{dQ}[C(Q)/Q]$$

Solución:

$$\frac{d}{dQ}\left[\frac{C(Q)}{Q}\right] = \frac{QC'(Q) - C(Q)}{Q^2} = \frac{1}{Q}\left[C'(Q) - \frac{C(Q)}{Q}\right]$$

Nótese que, para niveles positivos de la producción Q, el coste marginal $C'(Q)$ es mayor que el coste medio $C(Q)/Q$ si y sólo si la tasa de variación del coste medio es positiva. (De manera análoga, si un equipo de baloncesto ficha a un nuevo jugador, la altura media del equipo aumenta si y sólo si la altura del nuevo jugador excede de la media anterior.)

La fórmula de la derivada de un cociente es más fácil de entender si consideramos tasas proporcionales de variación (véase (4.11).) Usando (4.28), un cálculo sencillo prueba que

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} \tag{4.29}$$

La tasa proporcional de variación de un cociente es igual a la tasa proporcional de variación del numerador menos la del denominador.

Una aplicación económica de la regla (4.29) es como sigue. Sea $W(t)$ la tasa nominal de salario y $P(t)$ el índice de precios en el instante t. Entonces $w(t) = W(t)/P(t)$ se llama **tasa de**

salario real. Según (4.29),

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \frac{\dot{W}(t)}{W(t)} - \frac{\dot{P}(t)}{P(t)}$$

La tasa proporcional de variación del salario real es igual a la diferencia entre las tasas proporcionales de variación del salario nominal y del índice de precios. Así, si el salario nominal aumenta un 5% anual pero los precios lo hacen en un 6%, entonces el salario real disminuye un 1%. (Recuérdese de la Sección 4.3 que éstas son tasas proporcionales de variación.)

Problemas

En los problemas 1–4, derivar las funciones que se indican.

1 (a) $x+1$ (b) $x+x^2$ (c) $3x^5+2x^4+5$
(d) $8x^4+2\sqrt{x}$ (e) $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x^2+5x^3$ (f) $1-3x^7$

2 (a) $\frac{3}{5}x^2-2x^7+\frac{1}{8}-\sqrt{x}$ (b) $(2x^2-1)(x^4-1)$ (c) $\left(x^5+\dfrac{1}{x}\right)(x^5+1)$

3 (a) $\dfrac{1}{x^6}$ (b) $x^{-1}(x^2+1)\sqrt{x}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ (d) $\dfrac{x+1}{x-1}$
(e) $\dfrac{x+1}{x^5}$ (f) $\dfrac{3x-5}{2x+8}$ (g) $3x^{-11}$ (h) $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}$

4 (a) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (b) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x^2+2)(x+3)}$ (c) $(3x+1)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)$
(d) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (e) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ (f) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)(1+x^{-2})$

5 Si $D(P)$ designa la demanda de un producto cuando el precio unitario es P, entonces la función de ingresos $R(P)$ viene dada por $R(P)=PD(P)$. Hallar la expresión de $R'(P)$.

6 Para cada una de las siguientes funciones, determinar el(los) valor(es) de x para los que $f'(x)=0$.
(a) $f(x)=3x^2-12x+13$ (b) $f(x)=\frac{1}{4}(x^4-6x^2)$
(c) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ (d) $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{2(x+1)}$

7 Hallar las ecuaciones de las tangentes a las gráficas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:
(a) $y=3-x-x^2$ en $x=1$ (b) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ en $x=1$
(c) $y=\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)(x^2-1)$ en $x=2$ (d) $y=\dfrac{x^4+1}{(x^2+1)(x+3)}$ en $x=0$

8 Derivar las siguientes funciones de t:
(a) $\dfrac{at+b}{ct+d}$ (b) $t^n\left(a\sqrt{t}+b\right)$ (c) $\dfrac{1}{at^2+bt+c}$

9 Calcular lo siguiente:
(a) $\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{Ap^2+B}{Cp^2+D}\right)$ (b) $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y^2+2}{y^8}\right)$ (c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$

10 Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f(x) \cdot f(x) = x$. Usar la regla del producto para hallar una fórmula de $f'(x)$. Comparar esto con el resultado del Problema 8 de la Sección 4.2.

11 Demostrar la regla de la potencia (4.24) para $a = -n$, donde n es un número natural, usando la relación $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$ y la regla (4.28) del cociente.

Problemas avanzados

12 Sea $F(x) = f(x)/g(x)$. Escribir el cociente de Newton de F y probar que tiende a la derivada $F'(x)$ dada por la fórmula (4.28). *Indicación:* El cociente de Newton de F es igual a

$$\frac{1}{g(x)g(x+h)}\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

Usar la misma idea que en la demostración de (4.27).

4.7 DERIVADAS DE SEGUNDO ORDEN Y DE ORDEN SUPERIOR

Se suele llamar **derivada primera** de f a la derivada de una función f. Si f' es también derivable, podemos derivarla a su vez. De hecho, llamamos a $(f')'$ la **derivada segunda** de f. Escribimos f'' en lugar de $(f')'$ y usamos $f''(x)$ para designar a la derivada segunda de f evaluada en el punto x.

Ejemplo 4.21

Hallar $f'(x)$ y $f''(x)$ cuando $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x$.

Solución: Usando las reglas para derivar polinomios, derivamos primero $2x^5 - 3x^3 + 2x$, obteniéndose

$$f'(x) = 10x^4 - 9x^2 + 2$$

Luego derivamos $10x^4 - 9x^2 + 2$ para obtener

$$f''(x) = 40x^3 - 18x$$

Las diferentes formas de notación para la derivada segunda son análogas a las de la derivada primera. Por ejemplo, escribimos $y'' = f''(x)$ para designar a la derivada segunda de $y = f(x)$. También se usa la notación de Leibniz para la derivada segunda. En la notación dy/dx ó $df(x)/dx$ para la primera derivada habíamos interpretado el símbolo d/dx como un operador que indica que hay que derivar lo que sigue respecto de x. La derivada segunda se obtiene usando el operador d/dx dos veces: $f''(x) = (d/dx)(d/dx)f(x)$. Esto se interpreta, normalmente, como $f''(x) = (d/dx)^2 f(x)$ y así escribimos:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = d^2 f(x)/dx^2 \qquad \text{ó} \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = d^2 y/dx^2$$

Póngase mucha atención en dónde se coloca el superíndice 2.

Desde luego, la notación para la derivada segunda debe cambiar si la variable tiene otro nombre.

Ejemplo 4.22

(a) Hallar Y'' si $Y = AK^a$ es función de K $(K > 0)$ y A, a son constantes.

(b) Hallar d^2L/dt^2 si $L = t/(t+1)$ y $t \geq 0$.

Solución:

(a) Derivando $Y = AK^a$ con respecto a K da

$$Y' = AaK^{a-1}$$

Derivando otra vez con respecto a K produce

$$Y'' = Aa(a-1)K^{a-2}$$

(b) Usamos la regla del cociente para calcular la derivada primera:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{t+1}\right) = \frac{1\cdot(t+1)-t\cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{1}{t^2+2t+1}$$

Usando de nuevo la regla del cociente obtenemos

$$\frac{d^2L}{dt^2} = \frac{0\cdot(t^2+2t+1)-1\cdot(2t+2)}{(t^2+2t+1)^2} = \frac{-2(t+1)}{(t+1)^4} = -2\frac{1}{(t+1)^3}$$

Más adelante daremos a las dos primeras derivadas interpretaciones geométricas y económicas importantes. No hay interpretaciones tan simples para las derivadas de orden superior, pero se usan de vez en cuando.

Derivadas de orden superior

La derivada de $y'' = f''(x)$ se llama la **derivada tercera** y usamos la notación $y''' = f'''(x)$ para ella. Como notación, es farragoso continuar usando primas para indicar derivación, luego la **derivada cuarta** se designa usualmente por $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$ (debemos poner entre paréntesis el número 4 para que no se confunda con y^4, la cuarta potencia de y). Se puede denotar la misma derivada por d^4y/dx^4. En general,

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) \quad \text{ó} \quad d^ny/dx^n \quad \text{designa la } \textbf{derivada } n\textbf{-ésima} \text{ de } f \text{ en } x$$

El número n se llama el **orden** de la derivada. Por ejemplo, $f^{(6)}(x_0)$ designa a la derivada sexta de f, evaluada en x_0, que se calcula derivando seis veces.

Ejemplo 4.23

Calcular todas las derivadas, hasta el orden 4 inclusive, de

$$f(x) = 3x^{-1} + 6x^3 - x^2 \qquad (x \neq 0)$$

Solución: Derivando sucesivamente se tiene

$$f'(x) = -3x^{-2} + 18x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 6x^{-3} + 36x - 2$$
$$f'''(x) = -18x^{-4} + 36$$
$$f^{(4)}(x) = 72x^{-5}$$

De la misma manera que una función no tiene por qué ser derivable en x_0, no tiene por qué existir en x_0 una derivada de orden superior. Si existen todas las derivadas $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$ diremos que f es *derivable n veces* en x_0. Si $f^{(n)}(x_0)$ es continua, entonces se dice que f es *continuamente derivable hasta el orden n* en x_0 —o, más brevemente, una **función C^n** en x_0.

Ejemplo 4.24

Derivar $f(x) = 3x^{11/3}$ cuatro veces.

Solución:

$$f'(x) = 11x^{8/3}$$
$$f''(x) = (88/3)x^{5/3}$$
$$f'''(x) = (440/9)x^{2/3}$$
$$f^{(4)}(x) = (880/27)x^{-1/3}$$

Nótese que $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, pero $f^{(4)}(0)$ no existe. Por tanto, f es derivable tres veces en todo punto, pero no es derivable cuatro veces en el 0.

Problemas

1 Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y = x^5 - 3x^4 + 2$ (b) $y = \sqrt{x}$ (c) $y = \dfrac{x}{x+1}$

2 Hallar d^2y/dx^2 cuando $y = x^a + x^{-a}$.

3 Calcular lo siguiente:

(a) y'' para $y = 3x^3 + 2x - 1$ (b) Y''' para $Y = 1 - 2x^2 + 6x^3$

(c) d^3z/dt^3 para $z = 120t - (1/3)t^3$ (d) $f^{(4)}(1)$ para $f(z) = 100z^{-4}$

4 Hallar $g''(2)$ cuando $g(t) = t^2/(t-1)$.

5 Hallar fórmulas para y'' e y''' donde $y = f(x)g(x)$.

6 Si n es un número natural, definamos $n!$ (leído "n factorial") por la relación

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Por ejemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Probar, usando inducción matemática, que

$$y = x^n \Longrightarrow y^{(n)} = n!$$

Problemas avanzados

7 Hallar una función que sea derivable cinco veces, pero no seis en $x = 0$. (*Indicación:* véase el Ejemplo 4.24.)

5

Más sobre derivación

Aunque pueda parecer paradójico, toda la cienci[a]
está dominada por la idea de aproximación
—Bertrand Russel

En este capítulo se estudian las técnicas de derivación que más se usan. Se empieza con la regla generalizada de la potencia y luego se estudia la regla de la cadena, que es enormemente útil. En muchos modelos económicos se definen funciones implícitamente mediante una ecuación o más. En algunos casos sencillos, pero económicamente relevantes, enseñamos a calcular las derivadas de estas funciones. Después tratamos las diferenciales y las aproximaciones lineales, cuadráticas o de orden superior, que aparecen en muchas aplicaciones matemáticas o económicas. Se termina el capítulo con una discusión del concepto económico de elasticidad, que es muy importante.

5.1 LA REGLA GENERALIZADA DE LA POTENCIA

A menudo es necesario derivar expresiones del tipo

$$y = [g(x)]^a$$

donde g es una función derivable y a es una constante. Si $a = 1$, la derivada es $g'(x)$. Si $a = 2$, podemos usar la regla del producto como sigue:

$$y = [g(x)]^2 = g(x) \cdot g(x) \Longrightarrow y' = g'(x) \cdot g(x) + g(x) \cdot g'(x) = 2g(x) \cdot g'(x)$$

Para $a = 3$, podemos combinar el resultado anterior con la regla del producto, como sigue:

$$\begin{aligned} y = [g(x)]^3 = [g(x)]^2 \cdot g(x) \Longrightarrow y' &= 2[g(x) \cdot g'(x)] \cdot g(x) + [g(x)]^2 \cdot g'(x) \\ &= 3[g(x)]^2 \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Vea el lector si puede encontrar un patrón. En general, tenemos la regla siguiente (donde a es un número real arbitrario):

La regla generalizada de la potencia

$$y = [g(x)]^a \Longrightarrow y' = a[g(x)]^{a-1} \cdot g'(x) \tag{5.1}$$

Fíjese bien el lector en esta fórmula importante. Si $g(x) = x$, entonces $g'(x) = 1$ y (5.1) se reduce a $y = x^a \Rightarrow y' = ax^{a-1}$, que es la regla de la potencia de la Sección 4.5. En la Sección 5.2 se probará una generalización de (5.1). Mientras tanto, el estudiante despierto puede tratar de probar (5.1) por inducción matemática en el caso en que a sea un número natural (véase Problema 10).

Ejemplo 5.1

Derivar las funciones:

$$\text{(a)}\ y = (x^3 + x^2)^{50} \qquad \text{(b)}\ y = \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{1/3} \qquad \text{(c)}\ y = \sqrt{x^2+1}$$

Solución: La clave para aplicar la regla generalizada de la potencia es determinar cómo la función dada se puede expresar como una potencia. En el primer problema esto es bien obvio:

(a) $y = (x^3 + x^2)^{50} = [g(x)]^{50}$ donde $g(x) = x^3 + x^2$. Derivando directamente se obtiene $g'(x) = 3x^2 + 2x$ y así la fórmula (5.1) da

$$y' = 50[g(x)]^{50-1} \cdot g'(x) = 50(x^3 + x^2)^{49}(3x^2 + 2x)$$

(b) Aquí también es obvio cómo aplicar (5.1):

$$y = \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{1/3} = [g(x)]^{1/3}$$

donde $g(x) = (x-1)/(x+3)$. En este caso, la regla del cociente implica que

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x+3) - (x-1) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$$

Por tanto, (5.1) da

$$y' = \frac{1}{3}[g(x)]^{(1/3)-1} \cdot g'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{-2/3} \cdot \frac{4}{(x+3)^2} = \frac{4}{3}(x+3)^{-4/3}(x-1)^{-2/3}$$

(c) Aquí observamos primero que $y = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2}$. Por tanto se tiene $y = [g(x)]^{1/2}$, donde $g(x) = x^2 + 1$. Así,

$$y' = \frac{1}{2}[g(x)]^{(1/2)-1} \cdot g'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

La regla generalizada de la potencia se puede formular, en notación de Leibniz así:

La regla generalizada de la potencia (notación de Leibniz)

Si $u = g(x)$ es una función de x, entonces

$$y = u^a \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = au^{a-1}\frac{du}{dx} \tag{5.2}$$

A menudo hay que combinar la regla generalizada de la potencia con las otras reglas de derivación estudiadas anteriormente. Damos un ejemplo tomado de la economía.

Ejemplo 5.2

Supongamos que la relación entre la renta bruta Y y el total del impuesto T sobre la renta para los contribuyentes con renta entre 80.000$ y 120.000$ está dada por la ecuación

$$T = a(bY + c)^p + kY \tag{$*$}$$

donde a, b, c, p y k son constantes positivas.

(**a**) Hallar una expresión del *tipo marginal del impuesto*, dT/dY.

(**b**) Un estudio empírico dedujo las siguientes estimaciones de las constantes en $(*)$:

$$a = 0{,}000338, \qquad b = 0{,}81, \qquad c = 6.467, \qquad p = 1{,}61, \qquad k = 0{,}053$$

Usar esos números para hallar los valores de T y dT/dY cuando $Y = 100.000$.

Solución:

(**a**) Sea $z = (bY + c)^p = u^p$ donde $u = bY + c$. Entonces (5.2) da

$$\frac{dz}{dY} = pu^{p-1}\frac{du}{dY} = p(bY + c)^{p-1}b$$

Puesto que $T = az + kY$, derivando $(*)$ se obtiene

$$\frac{dT}{dY} = a\frac{dz}{dY} + k = apb(bY + c)^{p-1} + k$$

(**b**) Tenemos

$$T = 0{,}000338(0{,}81 \cdot 100.000 + 6.467)^{1{,}61} + 0{,}053 \cdot 100.000 \approx 35.869{,}33$$

y

$$\frac{dT}{dY} = 0{,}000338 \cdot 0{,}81 \cdot 1{,}61 \cdot (0{,}81 \cdot 100.000 + 6.467)^{0{,}61} + 0{,}053 \approx 0{,}51$$

Así, el tipo marginal del impuesto sobre una renta de 100.000$ es aproximadamente del 51%.

Problemas

1 Calcular $f'(x)$ cuando $f(x) = (3x^2 + 1)^2$ (a) desarrollando el cuadrado primero y derivando después; (b) usando (5.1). Comparar las respuestas.

2 Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $(2x + 1)^3$ (b) $(1 - x)^5$ (c) $(x^2 - 2x + 2)^2$

(d) $\dfrac{(x + 1)^5}{x}$ (e) $(3x - 4)^{-7}$ (f) $(2x^2 + 3x - 4)^{-2}$

3 Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $(1 + x)^{1/2}$ (b) $\sqrt{x^3 + 1}$ (c) $\left(\dfrac{2x + 1}{x - 1}\right)^{1/2}$

(d) $(1 - x^2)^{33}$ (e) $x^3\sqrt{1 - x}$ (f) $\sqrt[3]{1 + x} \cdot \sqrt[5]{1 - x}$

4 Hallar las derivadas de las siguientes funciones de t (a, b y n constantes):

(a) $(at^2+1)^{-3}$ (b) $(at+b)^n$ (c) $\left(\dfrac{at+b}{nt}\right)^{a+1}$

5 Si f es derivable en x, hallar las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $x+f(x)$ (b) $[f(x)]^2-x$ (c) $[f(x)]^4$

(d) $x^2f(x)+[f(x)]^3$ (e) $xf(x)$ (f) $\sqrt{f(x)}$

(g) $\dfrac{x^2}{f(x)}$ (h) $\dfrac{[f(x)]^2}{x^3}$ (i) $\left\{f(x)+[f(x)]^3+x\right\}^{1/3}$

6 Sea $x=(Ap+B)^r$ y $p=at^2+bt+c$. Hallar dx/dt.

7 Hallar dy/dv cuando $y=A(av^p+b)^q$.

Problemas avanzados

8 Supongamos que se ha probado (5.1) para todo número natural a. Probar que (5.1) es también cierta cuando $a=-n$, siendo n un número natural. (*Indicación:* Hágase $y=[g(x)]^{-n}=1/[g(x)]^n$ y úsese la regla del cociente.)

9 Sean a, b, m, n números fijos, donde $a<b$ y m, n son positivos. Se define la función f por $f(x)=(x-a)^m\cdot(x-b)^n$, para todo x. Hallar una solución x_0 de la ecuación $f'(x)=0$ que esté entre a y b.

10 Probar por inducción que (5.1) se verifica para todo número natural a.

11 Probar que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^m[g(x)]^n=\left[mf'(x)g(x)+nf(x)g'(x)\right][f(x)]^{m-1}[g(x)]^{n-1}$$

¿Qué se obtiene si $m=n=1$? ¿Y si $m=-n=1$?

5.2 FUNCIONES COMPUESTAS Y REGLA DE LA CADENA

Si y es una función de u y u es una función de x, entonces y es una función de x. En este caso, se dice que y es una **función compuesta** de x. (En la sección anterior hemos estudiado el caso particular en que y era u^a.) Supongamos que x varía. Esto producirá una variación de u y, por tanto, de y. Por consiguiente, una variación de x produce una "reacción en cadena". Si sabemos las tasas de variación du/dx y dy/du, ¿cuál es la tasa de variación dy/dx? Se tiene que la relación entre esas tasas de variación es sencillamente:

La regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{5.3}$$

Una formulación algo más detallada de la regla dice que *si y es una función de u, derivable, y si u es una función de x, también derivable, entonces y es una función derivable de x*, y se verifica (5.3).

La regla de la cadena es una generalización ulterior de la regla generalizada de la potencia que estudiamos en la Sección anterior. En el caso particular en que $y=u^a$, se tiene $dy/du=au^{a-1}$ y, sustituyendo esta expresión en (5.3), se obtiene la fórmula (5.2).

Es muy fácil recordar la regla de la cadena cuando se usa la notación de Leibniz. El miembro de la izquierda de (5.3) es el resultado que obtendríamos si "simplificáramos por" du a la derecha. Desde luego, puesto que dy/du y du/dx no son fracciones (sino meramente símbolos de derivadas) y du no es un número, no tiene sentido simplificar por él.

Cuando interpretamos las derivadas de (5.3) como tasas de variación, la regla de la cadena se torna algo intuitivo, como se ve en el siguiente ejemplo tomado de la economía.

Ejemplo 5.3

La demanda x de un bien depende de su precio p. Supongamos que el precio p no es constante, sino que depende del tiempo t. Entonces x es una función compuesta de t y, según la regla de la cadena,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} \tag{$*$}$$

Supongamos, por ejemplo, que la demanda de mantequilla baja 5.000 kilos si el precio sube 1$ por kilo. Así, $dx/dp \approx -5.000$. Supongamos además que el precio por kilo sube 0,05$ por semana, luego $dp/dt \approx 0{,}05$. ¿Cuánto disminuye la demanda en kilos por semana?

Solución: Puesto que el precio por kilo aumenta $0,05 por semana y la demanda desciende 5.000 kilos por cada dólar de aumento del precio, la demanda *disminuirá* en $5.000 \cdot 0{,}05 \approx 250$ kilos por semana. Esto significa que $dx/dt \approx -250$ (medida en kilos por semana). Nótese cómo este razonamiento confirma ($*$) "grosso-modo".

La regla de la cadena es muy potente. Para adquirir soltura al aplicarla hay que tener mucha práctica.

Ejemplo 5.4

(**a**) Hallar dy/dx si $y = u^5$ y $u = 1 - x^3$.
(**b**) Hallar dy/dx si

$$y = \frac{10}{(x^2 + 4x + 5)^7}$$

Solución:

(**a**) Se puede usar directamente (5.3). Puesto que $dy/du = 5u^4$ y $du/dx = -3x^2$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4(-3x^2) = -15x^2u^4 = -15x^2(1 - x^3)^4$$

(**b**) En este caso no es obvio inmediatamente cómo aplicar la regla de la cadena. Sin embargo, escribiendo y en la forma $y = 10(x^2 + 4x + 5)^{-7}$, podemos poner

$$y = 10u^{-7}$$

con $u = x^2 + 4x + 5$. Así,

$$\frac{dy}{du} = 10(-7)u^{-7-1} = -70u^{-8} \quad , \text{ y } \quad \frac{du}{dx} = 2x + 4$$

Por tanto, usando (5.3) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -70u^{-8} \cdot (2x + 4) = -140(x + 2)/(x^2 + 4x + 5)^8$$

Nota 1: Con un poco de entrenamiento, el paso intermedio es innecesario. Por ejemplo, para derivar

$$y = (\underbrace{1 - x^3}_{u})^5$$

podemos *imaginar* y como $y = u^5$, donde $u = 1-x^3$. Así podemos derivar u^5 y $1-x^3$ mentalmente y escribir inmediatamente $y' = 5(1-x^3)^4(-3x^2)$.

Nota 2: Por supuesto, siempre se podría derivar $y = x^5/5$ por la regla del cociente, mejor que escribir y como $y = (1/5)x^5$ para obtener $y' = (1/5)5x^4 = x^4$. Por supuesto, este último método es más fácil. De la misma manera, es innecesariamente farragoso derivar la función del Ejemplo 5.4(b) por la regla del cociente. La regla de la cadena es mucho más eficaz.

El ejemplo siguiente muestra un caso en que la regla de la cadena se usa varias veces.

Ejemplo 5.5

Hallar $x'(t)$ para $x(t) = 5\left(1+\sqrt{t^3+1}\right)^{25}$

Solución: El paso inicial es fácil: Ponemos $x(t) = 5u^{25}$, con $u = 1+\sqrt{t^3+1}$. Así tenemos

$$x'(t) = 5 \cdot 25u^{24}\,\frac{du}{dt} = 125u^{24}\,\frac{du}{dt} \tag{1}$$

La novedad de este ejemplo es que no podemos calcular inmediatamente du/dt. Este cálculo requiere aplicar la regla de la cadena otra vez. Escribamos $u = 1+\sqrt{v} = 1+v^{1/2}$, donde $v = t^3+1$. Entonces

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}v^{(1/2)-1}\cdot\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}v^{-1/2}\cdot 3t^2 = \frac{1}{2}(t^3+1)^{-1/2}\cdot 3t^2 \tag{2}$$

De (1) y (2), se obtiene finalmente

$$x'(t) = 125\left(1+\sqrt{t^3+1}\right)^{24}\cdot\tfrac{1}{2}(t^3+1)^{-1/2}\cdot 3t^2$$

Supongamos, como en el último ejemplo, que x es función de u, u es función de v, y v es función de t. Entonces x es una función compuesta de t y, en este caso, se puede usar la regla de la cadena dos veces, obteniéndose

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}$$

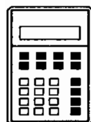
Ésta es justamente la fórmula que hemos usado en el último ejemplo. La notación es de nuevo intuitiva, porque el miembro de la izquierda es igual a lo que se obtiene "simplificando" por du y dv a la derecha.

Una formulación alternativa de la regla de la cadena

Aunque la notación de Leibniz permite recordar fácilmente la regla de la cadena, tiene el defecto de que no especifica dónde se evalúa cada derivada. Esto se remedia introduciendo nombres para las funciones. Sea $y = f(u)$ y $u = g(x)$; podemos escribir y en la forma

$$y = f\big(g(x)\big)$$

Nótese que, para calcular $f\big(g(x)\big)$, se halla *primero* $g(x)$ y *después*, se aplica f al resultado. Así diremos que tenemos una **función compuesta**, donde $g(x)$ es el **núcleo** y f la **función exterior**.



La mayoría de las calculadoras científicas vienen con varias funciones ya implementadas. Si introducimos un número x_0 y apretamos la tecla de la función f obtenemos $f(x_0)$. Cuando calculamos una función compuesta de f y g, y tratamos de obtener el valor de $f\big(g(x)\big)$, se procede de forma análoga: se introduce el número x_0, se pulsa la tecla de g para obtener $g(x_0)$ y luego se pulsa la tecla de f para obtener $f\big(g(x_0)\big)$. Supongamos que la calculadora tiene las funciones $\boxed{1/x}$ y

$\boxed{\sqrt{x}}$. Introducimos el número 9, luego pulsamos la tecla $\boxed{1/x}$ seguida de $\boxed{\sqrt{x}}$ y obtenemos $1/3 = 0{,}33\ldots$. El cálculo efectuado es como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} & \boxed{1/x} & & \boxed{\sqrt{x}} & \\ 9 & \longrightarrow & 1/9 & \longrightarrow & 1/3 \end{array}$$

Usando notación funcional, $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 1/x$, luego $f\big(g(x)\big) = f(1/x) = \sqrt{1/x} = 1/\sqrt{x}$. En particular, $f\big(g(9)\big) = 1/\sqrt{9} = 1/3$.

La regla de la cadena

Si g es derivable en x_0 y f es derivable en $u_0 = g(x_0)$, entonces $F(x) = f\big(g(x)\big)$ es derivable en x_0 y

$$F'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0) \tag{5.4}$$

Dicho en palabras: *para derivar una función compuesta, derívese primero la función exterior y sustitúyase en esta derivada el valor del núcleo. Multiplíquese todo por la derivada del núcleo.*

Es importante observar que las derivadas f' y g' de la fórmula (5.4) se evalúan en puntos *distintos*: g' se evalúa en x_0, mientras que f' se evalúa en $g(x_0)$.

Ejemplo 5.6

Hallar la derivada de $F(x) = f(g(x))$ en $x_0 = -3$ si $f(u) = u^3$ y $g(x) = 2 - x^2$.

Solución: En este caso, $f'(u) = 3u^2$ y $g'(x) = -2x$. Así (5.4) da

$$F'(-3) = f'(g(-3))\,g'(-3)$$

Ahora bien, $g(-3) = 2 - (-3)^2 = 2 - 9 = -7$, $g'(-3) = 6$ y $f'(g(-3)) = f'(-7) = 3(-7)^2 = 3 \cdot 49 = 147$. Por tanto $F'(-3) = f'(g(-3))\,g'(-3) = 147 \cdot 6 = 882$.

Nota: La función que lleva x sobre $f\big(g(x)\big)$ se designa por $f \circ g$, y se lee "f de g" o "f compuesta con g". Correspondientemente, $g \circ f$ designa la función que lleva x sobre $g\big(f(x)\big)$. Así se tiene

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \qquad \text{y} \qquad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

En general, $f \circ g$ y $g \circ f$ son funciones completamente diferentes. Por ejemplo, para las funciones del Ejemplo 5.6 se tiene $(f \circ g)(x) = (2 - x^2)^3$, mientras que $(g \circ f)(x) = 2 - (x^3)^2 = 2 - x^6$, y los dos polinomios son distintos.

Es fácil confundir $f \circ g$ con $f \cdot g$, especialmente en la tipografía. Sin embargo, estas dos funciones están definidas de manera completamente distinta. Cuando evaluamos $f \circ g$ en x, calculamos primero $g(x)$ y luego evaluamos f en $g(x)$. Por otra parte, el producto $f \cdot g$ de f y g es la función cuyo valor en un número particular x es sencillamente el producto de $f(x)$ y $g(x)$, luego $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Demostración de la regla de la cadena:

Para hallar la derivada de $F(x) = f(g(x))$ en $x = x_0$, debemos considerar el límite del siguiente cociente de Newton cuando h tiende a 0:

$$N = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h}$$

La variación de x desde x_0 hasta x_0+h origina que el valor de g cambie en la cantidad $k = g(x_0+h) - g(x_0)$. Cuando h tiende a 0, también $k = \{[g(x_0+h) - g(x_0)]/h\} \cdot h$ tiende a $g'(x_0) \cdot 0 = 0$. *Supongamos que* $k \neq 0$ *cuando* $h \neq 0$ *es lo suficientemente pequeño*. Puesto que $g(x_0+h) = g(x_0) + k$, podemos escribir el cociente de Newton en la forma

$$N = \frac{f(g(x_0)+k) - f(g(x_0))}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{f(g(x_0)+k) - f(g(x_0))}{k} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

Cuando $h \to 0$ también $k \to 0$ y las dos fracciones últimas tienden a $f'(g(x_0))$ y $g'(x_0)$, respectivamente. Esto prueba nuestra fórmula.

Como no podemos dividir por 0, el razonamiento falla si $g(x_0+h) = g(x_0)$, para valores de h arbitrariamente pequeños, porque entonces $k = 0$. Para tratar este caso necesitamos una demostración más complicada.

Problemas

1 Usar la regla de la cadena (5.3) para hallar dy/dx en los casos siguientes:

(a) $y = 5u^4$ y $u = 1 + x^2$ (b) $y = u - u^6$ y $u = \dfrac{1}{x} + 1$

2 Calcular lo siguiente:

(a) dY/dt para $Y = -3(V+1)^5$ y $V = \frac{1}{3}t^3$.

(b) dK/dt para $K = AL^a$ y $L = bt + c$ (A, a, b y c son constantes positivas).

3 Hallar las derivadas de las funciones siguientes, donde a, p, q, b son constantes:

(a) $y = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^5}$ (b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ (c) $y = x^a(px+q)^b$

4 Si Y es función de K y K función de t, hallar la fórmula de la derivada de Y respecto a t en $t = t_0$.

5 Si $Y = F(K)$ y $K = h(t)$, hallar la fórmula de dY/dt.

6 Hallar dx/dp para la función de demanda

$$x = b - \sqrt{ap - c} \qquad (a, b \text{ y } c \text{ son constantes positivas})$$

donde x es el número de unidades demandadas y p es el precio unitario, con $p \geq c/a$.

7 Si $h(x) = f(x^2)$, hallar $h'(x)$.

8 Sea $s(t)$ la distancia en kilómetros que recorre un automóvil en t horas. Sea $B(s)$ el número de litros de combustible que gasta el automóvil para recorrer s kilómetros.

(a) Interpretar la función $b(t) = B(s(t))$.

(b) Hallar e interpretar la fórmula de $b'(t)$.

9 Si $a(t)$ y $b(t)$ son funciones de t, derivables, y si A, α, β son constantes, hallar las expresiones de $\dot{x}/x$ donde:

(a) $x = [a(t)]^2 b(t)$ (b) $x = \dfrac{[(a(t)]^5}{b(t)}$

(c) $x = A\left\{[a(t)]^\alpha + [b(t)]^\beta\right\}^{\alpha+\beta}$ (d) $x = A\,[a(t)]^\alpha\,[b(t)]^\beta$

10 Supongamos que $f(x) = 3x + 7$. Hallar $f(f(x))$. Hallar x tal que $f(f(x)) = 100$.

11 Expresar (de una forma al menos) las siguientes funciones como composiciones de funciones más sencillas, y hallar $h'(x)$ en cada caso:

(a) $h(x) = (1 + x + x^2)^{1/2}$ (b) $h(x) = 1/(x^{100} + 28)$

12 Supongamos que $C = 20q - 4q\left(25 - \frac{1}{2}x\right)^{1/2}$, donde q es constante y $x < 50$. Hallar dC/dx.

13 Derivar cada una de las funciones siguientes de dos formas distintas:

(a) $y = (x^4)^5 = x^{20}$ (b) $y = (1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

14 Si $p(x) = (x - a)^2 q(x)$ y q es derivable para $x = a$, demostrar que $p'(a) = 0$.

15 Si $R = S^{\alpha}$, $S = 1 + \beta K^{\gamma}$, y $K = At^p + B$, hallar la expresión de dR/dt.

16 Si $F(x) = f\left(x^n g(x)\right)$, hallar $F'(x)$.

5.3 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Sabemos cómo derivar funciones dadas explícitamente por ciertas fórmulas. Estudiamos ahora cómo derivar funciones definidas implícitamente por una ecuación.

Un ejemplo introductorio

En el Ejemplo 2.7 de la Sección 2.3 estudiamos la siguiente ecuación:

$$x\sqrt{y} = 2 \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{$*$}$$

Nótese que $y = 4$ si $x = 1$, $y = 1$ si $x = 2$, $y = 1/4$ si $x = 4$ e $y = 1/9$ si $x = 6$. En general, para todo número positivo x, existe un único número y tal que el par (x, y) verifica la ecuación. En este caso decimos que la ecuación $(*)$ *define a y como función implícita de x*. La gráfica de la ecuación $(*)$, que es la de la Figura 5.1, reproduce la de la Figura 2.14.

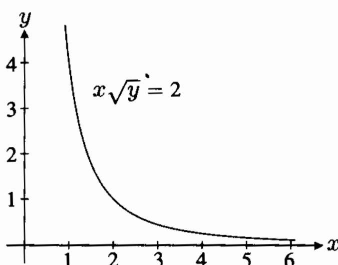


FIGURA 5.1 $x\sqrt{y} = 2$.

Es natural preguntarse cuál es la pendiente de la tangente en un punto arbitrario de la gráfica o, en otras palabras, cuál es la derivada de y como función de x. La respuesta se halla por derivación implícita de la ecuación $(*)$. Llamemos f a la función definida implícitamente por la ecuación $(*)$. Sustituyendo y por $f(x)$ da

$$x\sqrt{f(x)} = 2 \qquad (\text{para todo } x > 0)$$

La derivada del miembro de la izquierda de esta igualdad debe ser igual a la derivada del de la derecha, para todo $x > 0$. Si usamos la regla del producto para derivar $x\sqrt{f(x)} = 2$ respecto de x

tenemos que

$$1 \cdot \sqrt{f(x)} + x \frac{d}{dx} \sqrt{f(x)} = 0 \qquad (**)$$

Por la regla de la cadena es

$$\frac{d}{dx} \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

Sustituyendo esta expresión en $(**)$ y reordenando se obtiene

$$\frac{x}{2\sqrt{f(x)}} f'(x) = -\sqrt{f(x)}$$

Cuando $x > 0$, despejando $f'(x)$ se tiene

$$f'(x) = \frac{-2f(x)}{x}$$

Para $x = 2$ tenemos $f(2) = 1$ y así $f'(2) = -1$, lo que está de acuerdo con la Figura 5.1.

Normalmente no damos un nombre a y como función de x. En su lugar, derivamos directamente usando el razonamiento que se expone a continuación. Derivando $(*)$ con respecto a x, y recordando que y es una función derivable de x, tenemos

$$1 \cdot \sqrt{y} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} y' = 0$$

Despejando y' se obtiene

$$y' = -\frac{2y}{x} \qquad (***)$$

Hay otra manera de hallar la respuesta en este ejemplo particular. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación $(*)$ se obtiene $x^2 y = 4$, y así $y = 4/x^2 = 4x^{-2}$ para $x > 0$. Derivando respecto de x se obtiene $y' = 4(-2)x^{-3} = -8/x^3$. Nótese que, sustituyendo y por $4/x^2$ en $(***)$ da $y' = -8/x^3$ de nuevo.

Se puede resumir este método de la forma siguiente:

El método de la derivación implícita

Si dos variables x e y están relacionadas por una ecuación, para hallar dy/dx:

1. Derívese cada miembro de la ecuación respecto de x, considerando a y como función de x. (Usualmente, se necesitará la regla de la cadena.)
2. Despéjese dy/dx de la ecuación resultante.

Ejemplos adicionales

Es muy importante para los economistas dominar la técnica de la derivación implícita, luego damos unos ejemplos adicionales.

Ejemplo 5.7

Supongamos que y es la función de x, derivable, dada por

$$x + y^3 = y^5 - x^2 + 2y \qquad (1)$$

para todo x de un intervalo dado I. Hallar y'. La gráfica de la ecuación (1) pasa por $(x, y) = (1, 1)$. Hallar y' en este punto.

Solución: Es imposible resolver la ecuación en y en este caso. Sin embargo es posible hallar una expresión de y'. Supongamos que y se sustituye por una función (no especificada) de x. Entonces, tanto $x + y^3$ como $y^5 - x^2 + 2y$ son funciones de x, y estas expresiones deben coincidir para todo x de I. Esto implica que sus derivadas deben coincidir también. Según la regla de la cadena, la derivada de y^3 respecto de x es $3y^2y'$ y la de y^5 es $5y^4y'$. Así,

$$1 + 3y^2y' = 5y^4y' - 2x + 2y'$$

Para hallar y', se pasan a la derecha todos los términos que contienen y' y se dejan a la izquierda los restantes. El resultado es

$$1 + 2x = (5y^4 + 2 - 3y^2)y'$$

Despejando en y' se tiene

$$y' = \frac{2x + 1}{5y^4 - 3y^2 + 2}$$

Puesto que no disponemos de una expresión explícita de y como función de x, no podemos expresar y' explícitamente como función de x. En $(x, y) = (1, 1)$ se tiene, sin embargo, $y' = 3/4$.

Ejemplo 5.8

Consideremos el siguiente modelo macroeconómico estándar para determinar la renta nacional en una economía cerrada:

$$(1)\ Y = C + I \qquad (2)\ C = f(Y)$$

Aquí (2) es la función de consumo que vimos en el Ejemplo 2.18 de la Sección 2.5, mientras que (1) dice que la renta nacional Y se gasta o en consumo C o en inversión I. Suponemos que $f'(Y)$, *la propensión marginal al consumo*, está entre 0 y 1.

(**a**) Supóngase primero que $C = f(Y) = 95{,}05 + 0{,}712\,Y$ (véase Ejemplo 2.18), y úsense las ecuaciones (1) y (2) para hallar Y en términos de I. Hallar la variación ΔY de Y si I cambia ΔI unidades.

(**b**) Las ecuaciones (1) y (2) definen a Y como una función derivable de I. Hallar la expresión de dY/dI.

Solución:

(**a**) En este caso tenemos que $Y = 95{,}05 + 0{,}712\,Y + I$. Despejando la Y se tiene

$$Y = (95{,}05 + I)/(1 - 0{,}712) \approx 3{,}47\,I + 330{,}03 \tag{3}$$

Supongamos ahora que I varía ΔI. La variación correspondiente ΔY de Y verifica

$$Y + \Delta Y \approx 3{,}47(I + \Delta I) + 330{,}03 \tag{4}$$

Restando (3) de (4) se obtiene

$$\Delta Y \approx 3{,}47\,\Delta I \tag{5}$$

En particular, si I varía una unidad (por ejemplo, 10^9\$ dólares), luego $\Delta I = 1$, la variación correspondiente del producto nacional es $\Delta Y \approx 3{,}47$ ($\times 10^9$\$).

(**b**) Sustituyendo en (1) el valor de C dado por (2) se obtiene

$$Y = f(Y) + I \tag{6}$$

Supongamos que esta ecuación define a Y como función derivable de I. Derivando (6) respecto de I, y usando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{dY}{dI} = f'(Y)\frac{dY}{dI} + 1 \qquad \text{ó} \qquad \frac{dY}{dI}[1 - f'(Y)] = 1$$

Despejando dY/dI se obtiene

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - f'(Y)} \tag{7}$$

Por ejemplo, si $f'(Y) = 1/2$, entonces $dY/dI = 2$. También $f'(Y) = 0{,}712$ da $dY/dI \approx 3{,}47$. En general vemos que, puesto que $f'(Y)$ está entre 0 y 1, también $1 - f'(Y)$ está entre 0 y 1. Por tanto, $1/\left[1 - f'(Y)\right]$ es siempre mayor que 1. En este modelo, por tanto, mil millones de dólares de aumento de la inversión conllevarán siempre un aumento mayor en el producto nacional. Cuanto mayor sea la propensión marginal al consumo $f'(Y)$, mayor será dY/dI.

Ejemplo 5.9

En el modelo lineal de oferta y demanda del Ejemplo 2.19, Sección 2.5, supongamos que se crea un impuesto de t por unidad a los consumidores. Entonces

$$D = a - b(P + t), \qquad S = \alpha + \beta P \tag{1}$$

donde a, b, α y β son constantes positivas. El precio de equilibrio se determina igualando oferta y demanda, de tal manera que

$$a - b(P + t) = \alpha + \beta P \tag{2}$$

(**a**) La ecuación (2) define implícitamente el precio P como función del impuesto unitario t. Calcular dP/dt por derivación implícita . ¿Qué signo tiene? Comprobar el resultado resolviendo primero la ecuación (2) en P y luego calculando explícitamente dP/dt.

(**b**) Calcular el ingreso derivado del impuesto T como función de t. ¿Para qué valor de t alcanza su máximo la función cuadrática T?

(**c**) Generalizar el modelo precedente suponiendo que

$$D = f(P + t) \qquad \text{y} \qquad S = g(P)$$

donde f y g son funciones derivables con $f' < 0$ y $g' > 0$. La condición de equilibrio

$$f(P + t) = g(P) \tag{3}$$

define implícitamente a P como función derivable de t. Hallar una expresión de dP/dt por derivación implícita.

Solución: (**a**) Derivando (2) con respecto a t da $-b(dP/dt + 1) = \beta\, dP/dt$. Despejando dP/dt se obtiene

$$\frac{dP}{dt} = \frac{-b}{b + \beta}$$

Vemos que dP/dt es negativa. Puesto que P es el precio que recibe el productor, este precio bajará si el tipo del impuesto t aumenta. Por otra parte, $P + t$ es el precio que paga el consumidor. Puesto que

$$\frac{d}{dt}(P + t) = \frac{dP}{dt} + 1 = \frac{-b}{b + \beta} + 1 = \frac{-b + b + \beta}{b + \beta} = \frac{\beta}{b + \beta} > 0$$

se deduce que $0 < d(P+t)/dt < 1$. Así crecen los precios al público, pero menos que el aumento de impuestos.

Si resolvemos (2) en P tenemos

$$P = \frac{a - \alpha - bt}{b + \beta} = \frac{a - \alpha}{b + \beta} - \frac{b}{b + \beta}t$$

Esta ecuación prueba que el precio de equilibrio es una función lineal del impuesto unitario, de pendiente $-b/(b+\beta)$.

(**b**) El ingreso total derivado del impuesto es $T = St = (\alpha + \beta P)t$, donde P el precio de equilibrio. Así,

$$T = \left[\alpha + \beta\left(\frac{-bt}{b+\beta} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right)\right]t = \frac{-b\beta t^2}{b+\beta} + \frac{(a\beta + \alpha b)t}{b+\beta}$$

Esta función cuadrática tiene un máximo en $t = (\alpha b + \beta a)/2b\beta$.

(**c**) Derivando (3) respecto de t se obtiene que $f'(P+t)\,(dP/dt + 1) = g'(P)\,dP/dt$ y, despejando dP/dt, que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{f'(P+t)}{g'(P) - f'(P+t)}$$

Puesto que $f' < 0$ y $g' > 0$, vemos que dP/dt es también negativa en este caso. Más aún,

$$\frac{d}{dt}(P+t) = \frac{dP}{dt} + 1 = \frac{f'(P+t)}{g'(P) - f'(P+t)} + 1 = \frac{g'(P)}{g'(P) - f'(P+t)}$$

lo que implica que $0 < d(P+t)/dt < 1$ también aquí.

La derivada segunda de funciones definidas implícitamente

Los siguientes ejemplos indican cómo calcular la derivada segunda de una función definida implícitamente por una ecuación.

Ejemplo 5.10

Calcular y'' cuando y está definida como una función implícita de x por la ecuación

$$x\sqrt{y} = 2 \tag{1}$$

Solución: Vimos en el primer ejemplo de esta sección que $y' = -2y/x$, lo que calculábamos por derivación implícita. Derivando esta ecuación con respecto a x por la regla del cociente, y teniendo en cuenta que y es función de x, obtenemos

$$y'' = -\frac{2y'x - 2y \cdot 1}{x^2}$$

Sutituyendo y' en esta expresión por el valor $-2y/x$ que habíamos hallado tenemos

$$y'' = -\frac{2(-2y/x)x - 2y}{x^2} = \frac{6y}{x^2} \tag{2}$$

En este caso podemos comprobar directamente la respuesta. Elevando al cuadrado en (1) y despejando y obtenemos $y = 4/x^2$. Sustituyendo en (2) este valor de y tenemos $y'' = 24/x^4$. Por otra parte, derivando directamente $y = 4/x^2 = 4x^{-2}$ obtenemos que $y' = -8x^{-3}$ e $y'' = 24x^{-4} = 24/x^4$.

Ejemplo 5.11

Hallar d^2Y/dI^2 para $Y = f(Y) + I$.

Solución: En el Ejemplo 5.8 vimos que $dY/dI = 1/[1 - f'(Y)] = [1 - f'(Y)]^{-1}$. Derivando respecto de I por la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d^2Y}{dI^2} = (-1)[1 - f'(Y)]^{-2} \cdot [-f''(Y)]\frac{dY}{dI} = f''(Y)[1 - f'(Y)]^{-2}\frac{dY}{dI}$$

(Hemos tenido que derivar $1 - f'(Y)$ respecto de I, lo que da $0 - f''(Y)(dY/dI)$.) Teniendo en cuenta la expresión anterior de dY/dI, obtenemos

$$\frac{d^2Y}{dI^2} = f''(Y)[1 - f'(Y)]^{-3} = \frac{f''(Y)}{[1 - f'(Y)]^3}\,.$$

Problemas

1 Hallar dy/dx, por derivación implícita, en las ecuaciones siguientes:

(a) $xy = 1$ (b) $x - y + 3xy = 2$ (c) $y^6 = x^5$

Comprobar resolviendo cada ecuación en y y derivando luego.

2 Supongamos que y es una función de x, derivable, que verifica la ecuación

$$2x^2 + 6xy + y^2 = 18$$

Hallar y' por derivación implícita. El punto $(x, y) = (1, 2)$ pertenece a la gráfica de la ecuación; hallar y' en ese punto.

3 Se da una curva en el plano uv por la ecuación

$$u^2 + uv - v^3 = 0$$

Hallar dv/du por derivación implícita. Hallar el punto (u, v) de la curva para el que $dv/du = 0$ y $u \neq 0$.

4 Para cada una de las siguientes ecuaciones, hallar y' si $y = f(x)$ es una función derivable (a es una constante positiva).

(a) $x^2 + y^2 = a^2$ (b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (c) $x^4 - y^4 = x^2y^3$

5 Según Wold, la demanda Q de mantequilla en Estocolmo en el periodo 1925–1937 estaba relacionada con el precio P mediante la ecuación

$$Q \cdot P^{1/2} = 38$$

Hallar dQ/dP por derivación implícita. Comprobar la respuesta usando un método distinto de cálculo de la derivada.

6 Supongamos que f y g son dos funciones definidas en un intervalo abierto I.

(a) Si $f(x_0) = g(x_0)$ para un cierto $x_0 \in I$, ¿qué se puede decir de $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$?

(b) Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, y si $x_0 \in I$, ¿qué se puede decir de $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$?

7 Un modelo estándar para la determinación de la renta en una economía abierta es

(1) $Y = C + I + \bar{X} - M$ (2) $C = f(Y)$ (3) $M = g(Y)$

donde $0 < f'(Y) < 1$. En esas expresiones, $\bar{X}$ es una constante exógena que designa las exportaciones mientras que M designa el volumen de las importaciones. La función g de (3) se llama la *función de importación*. Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene una ecuación que define a Y como función de la inversión exógena I. Hallar la expresión de dY/dI por derivación implícita. ¿Cuál es posiblemente el signo de $g'(Y)$? Discutir el signo de dY/dI.

8 Si $a = m/n$, donde m y n son enteros, la regla de la potencia (4.24) implica

$$y = x^{m/n} \Longrightarrow y' = (m/n)x^{(m/n)-1}$$

Suponer que y *es* derivable y comprobar este resultado derivando implícitamente $y^n = x^m$ respecto a x.

9 Si f y g son derivables y $g(f(x)) = x$ para todo x, hallar una expresión de $f'(x)$ en términos de la derivada de g.

5.4 APROXIMACIONES LINEALES Y DIFERENCIALES

Cuando es difícil trabajar con una función complicada, tratamos a veces de hallar una función más sencilla que, en un cierto sentido, aproxime la dada. Es fácil trabajar con funciones lineales y, por tanto, es natural tratar de hallar primeramente una "aproximación lineal" de la función dada.

Consideremos una función $f(x)$ derivable en $x = a$. La ecuación de la tangente a la gráfica en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ (Véase (4.4), Sección 4.2). Si aproximamos la gráfica de f por su tangente en $x = a$, como en la Figura 5.2, la aproximación que resulta tiene un nombre especial.

La **aproximación lineal** de f en un entorno de a es

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (x \text{ próximo a } a) \tag{5.5}$$

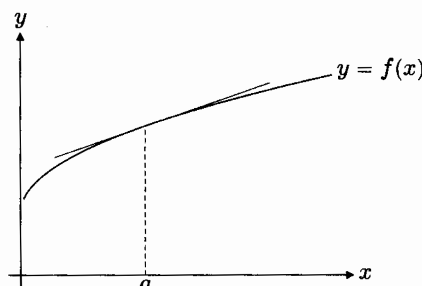


FIGURA 5.2 La aproximación de una función por su tangente.

Nótese que, si $p(x)$ es la función lineal $f(a) + f'(a)(x - a)$ de x, entonces f y p tienen el mismo valor y la misma derivada en $x = a$.

Ejemplo 5.12

Hallar la aproximación lineal a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en un entorno de $a = 1$.

Solución: Como $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, es $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ y $f'(1) = 1/3$. Como $f(1) = 1$, la relación (5.5) da

$$\sqrt[3]{x} \approx 1 + \tfrac{1}{3}(x - 1) \qquad (x \text{ próximo a } 1)$$

Por ejemplo, $\sqrt[3]{1{,}03} \approx 1 + \frac{1}{3}(1{,}03 - 1) = 1 + \frac{1}{3}(0{,}03) = 1{,}01$. El valor con cuatro cifras decimales exactas es 1,0099.

Ejemplo 5.13

En un artículo de los economistas Samuelson y Swamy, los autores estudiaban el comportamiento de la función siguiente en un entorno de $\varepsilon = 0$:

$$f(\varepsilon) = \left(1 + \tfrac{3}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)^{1/2}$$

Hallar la aproximación lineal de $f(\varepsilon)$ en un entorno de $\varepsilon = 0$.

Solución: Como $f'(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \varepsilon\right)$ es $f'(0) = \frac{3}{4}$. Como $f(0) = 1$, la relación (5.5) da

$$\left(1 + \tfrac{3}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)^{1/2} \approx 1 + \tfrac{3}{4}\varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ próximo a } 0)$$

La diferencial de una función

Consideremos una función derivable $f(x)$ y designemos por dx una variación arbitraria de la variable x. Con esta notación, "dx" no es el producto de d y x, sino un único símbolo que representa la variación del valor de x. La expresión $f'(x)\,dx$ se llama la **diferencial** de $y = f(x)$, y se designa por dy (o df), de tal forma que

$$dy = f'(x)\,dx \tag{5.6}$$

Nótese que dy es proporcional a dx, con factor de proporcionalidad $f'(x)$.

Ahora bien, si x varía en dx, la variación correspondiente de $y = f(x)$ es

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \tag{5.7}$$

Usando las definiciones de dy y Δy, sustituyendo x por $x + dx$ y a por x, la aproximación (5.5) toma la forma

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx$$

El error cometido al usar dy en lugar de Δy se ilustra geométricamente en la Figura 5.3.

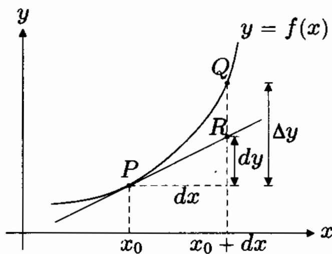


FIGURA 5.3 Representación geométrica de la diferencial.

La diferencial dy no es el incremento de y cuando x cambia a $x + dx$, sino la variación que y tendría si continuase variando a la tasa fija $f'(x)$ cuando x cambia a $x + dx$. La Figura 5.3 muestra la diferencia entre Δy e dy. Consideremos primero el movimiento de P a Q a lo largo de la curva $y = f(x)$: cuando x varía en dx, la variación de altura vertical del punto es Δy. Supongamos, por otra parte, que se nos permite movernos solamente a lo largo de la tangente a la gráfica en P. Cuando vamos de P a R a lo largo de la tangente, el cambio de altura que corresponde a dx es dy.

Nótese que, al igual que en la Figura 5.3, la aproximación $\Delta y \approx dy$ es normalmente mejor si dx es pequeña en valor absoluto, puesto que la longitud del segmento rectilíneo RQ que representa la diferencia entre Δy y dy tiende a 0 cuando dx tiende a 0.

Reglas de diferenciación

La notación $(d/dx)(\quad)$ significa derivar la expresión entre paréntesis respecto de x. De la misma manera designamos por $d(\quad)$ la diferencial de cualquier cosa que se introduzca entre los paréntesis.

Ejemplo 5.14

Calcular las diferenciales siguientes:

(a) $d(Ax^a + B)$ $\quad$ (A, B y a son constantes)

(b) $d(f(K))$ $\quad$ (f es una función de K, derivable)

Solución:

(a) Escribiendo $f(x) = Ax^a + B$ tenemos que $f'(x) = Aax^{a-1}$, luego $d(Ax^a + B) = Aax^{a-1}\,dx$.

(b) $d(f(K)) = f'(K)\,dK$.

Todas las reglas usuales de derivación se pueden expresar en términos de diferenciales. Si f y g son dos funciones de x, derivables, se verifica lo siguiente:

Reglas de diferenciación

$$\begin{aligned} d(af + bg) &= a\,df + b\,dg \qquad (a \text{ y } b \text{ son constantes}) \\ d(fg) &= g\,df + f\,dg \\ d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\,df - f\,dg}{g^2} \qquad (g \neq 0) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Damos una demostración de la segunda de esas fórmulas:

$$d(fg) = (fg)'\,dx = (f'g + fg')\,dx = gf'\,dx + fg'\,dx = g\,df + f\,dg$$

Se recomienda al lector demostrar las otras fórmulas de manera análoga.

Supongamos que $y = f(x)$ y $x = g(t)$ es una función de t. Entonces $y = h(t) = f(g(t))$ es una función de t. La diferencial de $y = h(t)$ es $dy = h'(t)\,dt$. Según la regla de la cadena, $h'(t) = f'(g(t))\,g'(t)$, de tal manera que $dy = f'(g(t))g'(t)\,dt$. Puesto que $x = g(t)$, la diferencial de x es igual a $dx = g'(t)\,dt$, luego

$$dy = f'(x)\,dx$$

Esto prueba que, si $y = f(x)$, entonces la diferencial de y es igual a $dy = f'(x)\,dx$, tanto si x depende de otra variable como si no.

Los economistas usan diferenciales frecuentemente en sus modelos. Un ejemplo típico es el que sigue.

Ejemplo 5.15

Consideremos de nuevo el modelo del Ejemplo 5.8, Sección 5.3:

$$(1)\; Y = C + I \qquad (2)\; C = f(Y)$$

Hallar la diferencial dY en términos de dI. Si, además de (1) y (2), se supone que el empleo $N = g(Y)$ es función de Y, hallar también la diferencial dN en términos de dI.

Solución: Diferenciando (1) y (2) obtenemos

$$(3)\ dY = dC + dI \qquad (4)\ dC = f'(Y)\,dY$$

Sustituyendo dC de (4) en (3) y despejando dY se tiene

$$dY = \frac{1}{1 - f'(Y)}\,dI \tag{5}$$

que corresponde a la relación (7) del Ejemplo 5.8. De $N = g(Y)$, obtenemos $dN = g'(Y)\,dY$, luego

$$dN = \frac{g'(Y)}{1 - f'(Y)}\,dI \tag{6}$$

Siempre que $g'(Y) > 0$ y $f'(Y)$, la propensión marginal al consumo, esté entre 0 y 1, vemos en (6) que, si la inversión crece, entonces crece el empleo.

Problemas

1 Probar que $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, para x próximo a 0, e ilustrar esta aproximación dibujando las gráficas de $y = 1 + \frac{1}{2}x$ e $y = \sqrt{1+x}$ en el mismo sistema de coordenadas.

2 Usar (5.5) para hallar la aproximación lineal de $f(x) = (5x+3)^{-2}$ en un entorno de $x_0 = 0$.

3 Hallar las aproximaciones lineales de las siguientes funciones en un entorno de $x_0 = 0$:

(a) $f(x) = (1+x)^{-1}$ (b) $f(x) = (1+x)^5$ (c) $f(x) = (1-x)^{1/4}$

4 Hallar la aproximación lineal de $F(K) = AK^{\alpha}$ en un entorno de $K_0 = 1$.

5 Probar que $(1+x)^m \approx 1+mx$, para x próximo a 0, y usar esta aproximación para hallar aproximaciones de los números siguientes:

(a) $\sqrt[3]{1{,}1} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{1/3}$ (b) $\sqrt[5]{33} = 2\left(1 + \frac{1}{32}\right)^{1/5}$ (c) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1}$

(d) $(1{,}02)^{25}$ (e) $\sqrt{37} = \sqrt{36+1}$ (f) $(26{,}95)^{1/3} = \left(27 - \frac{5}{100}\right)^{1/3}$

6 Hallar $\Delta y = f(x+dx) - f(x)$ y la diferencial $dy = f'(x)\,dx$ en los siguientes casos:

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ cuando (i) $x = 2$, $dx = 1/10$ y (ii) $x = 2$, $dx = 1/100$.

(b) $f(x) = 1/x$ cuando (i) $x = 3$, $dx = -1/10$ y (ii) $x = 3$, $dx = -1/100$.

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ cuando (i) $x = 4$, $dx = 1/20$ y (ii) $x = 4$, $dx = 1/100$.

7 El radio de una esfera aumenta de 2 a 2,03. Estimar el aumento del volumen usando una aproximación lineal. Compárese con el aumento real del volumen. (*Indicación:* Véase Apéndice D.)

Problemas avanzados

8 Hallar la aproximación lineal de la función

$$g(\mu) = A(1+\mu)^{a/(1+b)} - 1 \qquad (A,\ a,\ \text{y } b \text{ son constantes positivas})$$

en un entorno del punto $\mu = 0$.

5.5 APROXIMACIONES POLINÓMICAS

En la sección anterior hemos estudiado aproximaciones de funciones de una variable por funciones lineales. En particular, en el Ejemplo 5.12 se dio la aproximación

$$\sqrt[3]{x} \approx 1 + \tfrac{1}{3}(x-1) \qquad (x \text{ próximo a } 1) \tag{1}$$

En este caso las funciones $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = 1 + \frac{1}{3}(x-1)$ tienen el mismo valor, 1, y la misma derivada, $1/3$, en $x = 1$.

Si la aproximación por funciones lineales no es suficientemente precisa, es natural ensayar con aproximaciones cuadráticas, o con aproximaciones mediante polinomios de orden superior.

Aproximaciones cuadráticas

Comenzamos demostrando cómo se puede aproximar una función dos veces derivable $y = f(x)$, en un entorno de $x = a$, por un polinomio cuadrático.

$$f(x) \approx p(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2$$

Hay que determinar tres coeficientes A, B y C. Por tanto, tenemos libertad para imponer tres condiciones al polinomio. Estas condiciones van a ser el suponer que $f(x)$ y $p(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2$ tienen el mismo valor, la misma derivada primera y la misma derivada segunda en $x = a$. Dicho en símbolos, requerimos que $f(a) = p(a)$, $f'(a) = p'(a)$ y $f''(a) = p''(a)$. Ahora bien,

$$p'(x) = B + 2C(x-a), \qquad p''(x) = 2C$$

Por tanto, haciendo $x = a$ en las expresiones de $p(x)$, $p'(x)$, y $p''(x)$, se tiene que $A = p(a)$, $B = p'(a)$ y $C = \frac{1}{2}p''(a)$. Por tanto,

La **aproximación cuadrática** de $f(x)$ en un entorno de $x = a$ es

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \qquad (x \text{ próximo a } a) \tag{5.9}$$

En el caso particular en que $a = 0$ obtenemos lo siguiente:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 \qquad (x \text{ próximo a } 0) \tag{5.10}$$

Ejemplo 5.16

Hallar la aproximación cuadrática de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en un entorno de $a = 1$.

Solución: En este caso $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ y $f''(x) = \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})x^{-5/3}$. Entonces $f'(1) = \frac{1}{3}$ y $f''(1) = -\frac{2}{9}$. Puesto que $f(1) = 1$, usando (5.9) se tiene

$$\sqrt[3]{x} \approx 1 + \tfrac{1}{3}(x-1) - \tfrac{1}{9}(x-1)^2 \qquad (x \text{ próximo a } 1)$$

Por ejemplo, $\sqrt[3]{1{,}03} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}03 - \frac{1}{9}(0{,}03)^2 = 1 + 0{,}01 - 0{,}0001 = 1{,}0099$, que es correcto hasta el cuarto decimal.

Ejemplo 5.17

Hallar la aproximación cuadrática de $f(x) = (5x+3)^{-2}$ en un entorno de $x = 0$.

Solución: En este caso $f'(x) = -10(5x+3)^{-3}$ y $f''(x) = 150(5x+3)^{-4}$, de tal forma que $f(0) = 1/9$, $f'(0) = -10/27$ y $f''(0) = 50/27$. Usando (5.10) tenemos

$$\frac{1}{(5x+3)^2} \approx \frac{1}{9} - \frac{10}{27}x + \frac{25}{27}x^2 \tag{$*$}$$

Ejemplo 5.18

Hallar la aproximación cuadrática de $y = y(x)$ en un entorno de $x = 0$ donde y está definida implícitamente como función de x en un entorno de $(x, y) = (0, 1)$ por la ecuación

$$xy^3 + 1 = y \tag{1}$$

Solución: Derivando implícitamente (1) respecto de x se obtiene

$$y^3 + 3xy^2y' = y' \tag{2}$$

Haciendo $x = 0$ e $y = 1$ en (2) se tiene $y' = 1$. Derivando (2) respecto a x tenemos

$$3y^2y' + (3y^2 + 6xyy')y' + 3xy^2y'' = y''$$

Haciendo $x = 0$, $y = 1$ e $y' = 1$ en esa expresión se tiene que $y'' = 6$. Por tanto, según (5.10),

$$y(x) \approx y(0) + y'(0)x + \tfrac{1}{2}y''(0)x^2 = 1 + x + 3x^2$$

Aproximaciones de orden superior

Hasta ahora hemos considerado aproximaciones lineales y cuadráticas. Podemos hallar aproximaciones mejores en un entorno de un punto usando polinomios de grado superior. Supongamos que queremos aproximar una función $f(x)$ en un intervalo de centro $x = a$ por un polinomio de grado n de la forma

$$p(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \cdots + A_n(x-a)^n \tag{1}$$

Como $p(x)$ tiene $n+1$ coeficientes, podemos imponer las siguientes $n+1$ condiciones a este polinomio:

$$f(a) = p(a), \qquad f'(a) = p'(a), \qquad \ldots, \qquad f^{(n)}(a) = p^{(n)}(a) \tag{2}$$

Lo que estas condiciones exigen es que $p(x)$ y sus n primeras derivadas coincidan con $f(x)$ y sus n primeras derivadas, para $x = a$. Estudiemos el caso de $n = 3$. En esta situación,

$$p(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3$$

y hallamos que

$$\begin{aligned} p'(x) &= A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 \\ p''(x) &= 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x-a) \\ p'''(x) &= 2 \cdot 3A_3 \end{aligned}$$

Así, cuando $x = a$, tenemos[1]

$$p(a) = A_0, \qquad p'(a) = 1!\,A_1, \qquad p''(a) = 2!\,A_2, \qquad p'''(a) = 3!\,A_3$$

Esto determina la siguiente aproximación:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3$$

El caso general sigue el mismo patrón. Si $p(x)$ viene dado por (1), derivándola sucesivamente se obtiene

$$\begin{aligned}
p'(x) &= A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \cdots + nA_n(x-a)^{n-1} \\
p''(x) &= 2A_2 + 3\cdot 2A_3(x-a) + \cdots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2} \\
p'''(x) &= 3\cdot 2A_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)A_n(x-a)^{n-3} \\
p^{(4)}(x) &= 4\cdot 3\cdot 2A_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)A_n(x-a)^{n-4} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1A_n
\end{aligned} \tag{3}$$

Haciendo $x = a$ en (3) se tiene

$$p'(a) = 1!\,A_1, \quad p''(a) = 2!\,A_2, \quad p'''(a) = 3!\,A_3, \quad \ldots, \qquad p^{(n)}(a) = n!\,A_n \tag{4}$$

Esto conduce a la siguiente aproximación de $f(x)$ por un polinomio de grado n.

Aproximación de $f(x)$ en un entorno de $x = a$:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.11}$$

El polinomio del miembro de la derecha de (5.11) se llama el **Polinomio de Taylor de orden n** de f en un entorno de $x = a$.

La función f y su polinomio de Taylor de orden n tienen un grado de contacto tan alto en $x = a$ que es razonable esperar que la aproximación de (5.11) sea buena sobre un intervalo de centro $x = a$, posiblemente pequeño. En la Sección 7.4 se analiza el error que resulta de usar estas aproximaciones polinómicas. En el caso en que la misma f sea un polinomio de grado menor o igual que n, la fórmula es exacta, sin ningún error de aproximación en ningún punto.

Ejemplo 5.19

Hallar la aproximación de Taylor, de tercer orden, de $f(x) = \sqrt{1+x}$ en un entorno de $a = 0$.

Solución: Tenemos que $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$, $f'(x) = (1/2)(1+x)^{-1/2}$, $f''(x) = (1/2)(-1/2)(1+x)^{-3/2}$ y $f'''(x) = (1/2)(-1/2)(-3/2)(1+x)^{-5/2}$. Haciendo $x = 0$ en estas expresiones se obtiene $f(0) = 1$, $f'(0) = 1/2$, $f''(0) = (1/2)(-1/2) = -1/4$ y, finalmente, $f'''(0) = (1/2)(-1/2)(-3/2) = 3/8$. Por tanto, por (5.11) para $n = 3$,

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{8}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

[1] Véase en el Problema 6 de la Sección 4.7 la definición de $n!$.

Problemas

1 Hallar las aproximaciones cuadráticas de las funciones siguientes en un entorno de los puntos que se indican:

(a) $f(x) = (1+x)^5, \ a = 0$ (b) $F(K) = AK^\alpha, \ K_0 = 1$

(c) $f(\varepsilon) = \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)^{1/2}, \ \varepsilon_0 = 0$ (d) $H(x) = (1-x)^{-1}, \ a = 0$

2 En relación con un estudio de actitudes ante el riesgo, se llega a la aproximación que se indica de una función de utilidad de un consumidor. Explicar cómo deducir esta aproximación.

$$U(y + M - s) \approx U(y) + U'(y)(M - s) + \tfrac{1}{2}U''(y)(M - s)^2$$

3 Hallar la aproximación cuadrática en un entorno de $x = 0$, $y = 1$ de y definida implícitamente como una función de x por la ecuación $1 + x^3y + x = y^{1/2}$.

4 Sea dada la función $x(t)$ por las condiciones $x(0) = 1$ y

$$\dot{x}(t) = tx(t) + 2[x(t)]^2$$

Determinar el polinomio de Taylor de segundo orden para $x(t)$ en un entorno de $t = 0$.

5 Deducir la aproximación

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \approx 1 + n\frac{p}{100} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{p}{100}\right)^2$$

6 La función h está definida, para todo $x > 0$, por

$$h(x) = \frac{x^p - x^q}{x^p + x^q} \qquad (p > q > 0)$$

Hallar el polinomio de Taylor de primer orden, en un entorno de $x = 1$, para $h(x)$.

5.6 ELASTICIDADES

¿Por qué usan los economistas frecuentemente elasticidades en lugar de derivadas? Supongamos que estudiamos cómo la demanda de un cierto bien reacciona a las variaciones de precio. Podemos preguntarnos en cuántas unidades variará la cantidad demandada cuando el precio aumenta 1$. Obtenemos de esta forma un número concreto de unidades. Sin embargo, hay varios aspectos insatisfactorios en esta manera de medir la sensibilidad de la demanda a las variaciones de precio. Por ejemplo, un aumento de precio de 1$ en un kilo de café puede ser considerable, mientras que el mismo aumento en el precio de automóvil puede ser insignificante.

Este problema surge porque la sensibilidad de la demanda a las variaciones de precio se mide en las mismas unidades (arbitrarias) por las que se miden las cantidades demandadas y los precios. Se eliminan las dificultades si se usan variaciones relativas. Así nos podemos preguntar cuál es la variación porcentual de la cantidad demandada cuando el precio aumenta un 1%. El número que se obtiene de esta forma será independiente de las unidades en que se midan cantidades y precios. Se llama **elasticidad de la demanda** o **precio de la demanda** , medida en el precio dado.

En 1960, se calculó que la elasticidad de la mantequilla en un cierto país era -1, aproximadamente. Esto significa que un aumento del precio de la mantequilla en un 1% conllevaría una disminución del 1% en la cantidad demandada, siempre y cuando todos los otros factores que influyen en la demanda permanezcan constantes. El mismo año, se calculó que la elasticidad de la demanda de patatas era $-0{,}2$. ¿Qué significa esto? ¿Cuál piensa el lector que es la razón de que el valor absoluto de esta elasticidad sea mucho menor que en el caso de la mantequilla?

Supongamos que la demanda de un bien se puede describir por la función

$$x = D(p) \tag{1}$$

Cuando el precio varía de p a $p + \Delta p$, la cantidad demandada, x, varía asimismo. La variación absoluta de x es $\Delta x = D(p + \Delta p) - D(p)$, y la *relativa* (o proporcional) es

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{D(p + \Delta p) - D(p)}{D(p)}$$

La razón entre la variación relativa de la cantidad demandada y la variación relativa del precio es

$$\frac{\Delta x}{x} \Big/ \frac{\Delta p}{p} = \frac{p}{x}\frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{p}{D(p)}\frac{D(p + \Delta p) - D(p)}{\Delta p} \tag{2}$$

Cuando $\Delta p = p/100$, de tal forma que p aumenta un 1%, entonces (2) se transforma en $(\Delta x/x)\cdot 100$, que es la variación porcentual de la cantidad demandada. La razón en (2) se llama la *elasticidad media de x en el intervalo* $[p, p + \Delta p]$.

Obsérvese que el número definido en (2) depende a la vez del precio p y de su variación Δp, pero no de las unidades. Así, no hay diferencia entre que las cantidades estén medidas en toneladas, kilogramos o libras ni entre que los precios estén medidos en dólares, libras o pesetas.

Queremos definir la elasticidad de D en p de tal forma que no dependa de cuánto aumente p. Podemos hacerlo si D es una función derivable de p. En efecto, es natural definir la elasticidad de D en p como el límite de la razón en (2) cuando Δp tiende a 0. Puesto que el cociente de Newton $[D(p + \Delta p) - D(p)]/\Delta p$ tiende a $D'(p)$ cuando Δp tiende a 0, tenemos:

$$\textit{la elasticidad de } D(p) \textit{ con respecto a } p \textit{ es } \quad \frac{p}{D(p)}\frac{dD(p)}{dp}$$

Usualmente obtenemos una buena aproximación de la elasticidad haciendo $\Delta p/p = 1/100 = 1\%$ y calculando $p\,\Delta x/x\,\Delta p$.

Ejemplo 5.20

Supongamos que la cantidad de la demanda de un cierto bien viene regida por la fórmula

$$D(p) = 8.000p^{-1,5}$$

Hallar la elasticidad de $D(p)$ y el porcentaje exacto de variación de la cantidad demandada cuando el precio aumenta un 1% a partir de $p = 4$.

Solución: Tenemos que

$$\frac{dD(p)}{dp} = 8.000 \cdot (-1{,}5)p^{-1,5-1} = -12.000p^{-2,5}$$

luego que la elasticidad de $D(p)$ con respecto a p es

$$\frac{p}{D(p)} \cdot \frac{dD(p)}{dp} = \frac{p}{8.000 \cdot p^{-1,5}} \cdot (-12.000)p^{-2,5} = -\frac{12.000}{8.000}\frac{p \cdot p^{-2,5}}{p^{-1,5}} = -1{,}5$$

La elasticidad es una constante igual a $-1{,}5$, luego un aumento del precio en un 1% conlleva que la cantidad demandada baja, aproximadamente, en un 1,5%.

En este caso podemos calcular exactamente la disminución de la demanda. Cuando el precio es 4, la cantidad demandada es $D(4) = 8.000 \cdot 4^{-1,5} = 1.000$. Si el precio $p = 4$ crece

un 1%, el nuevo precio será $4 + 4/100 = 4{,}04$, luego la *variación* de la demanda será

$$D(4{,}04) - D(4) = 8.000 \cdot 4{,}04^{-1{,}5} - 1.000 = -14{,}81$$

La variación porcentual de la demanda a partir de $D(4) = 1.000$ es aproximadamente

$$-(14{,}81/1.000) \cdot 100 = -1{,}481$$

La definición general de elasticidad

Supongamos que la función f es derivable en x. Si $f(x) \neq 0$, definimos

La **elasticidad** de f con respecto a x es

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) \tag{5.12}$$

Además de $\mathrm{El}_x f(x)$, se usan otras notaciones para la elasticidad de $y = f(x)$ como $\mathrm{El}_x y$ y ε_{yx}.

Ejemplo 5.21

Hallar la elasticidad de $f(x) = ax^b$ (a y b son constantes y $a \neq 0$).

Solución: En este caso, $f'(x) = abx^{b-1}$. Por tanto,

$$\mathrm{El}_x\left(ax^b\right) = \frac{x}{ax^b} abx^{b-1} = b$$

Ejemplo 5.22

Designemos por $D(p)$ la función de demanda de un producto. Vendiendo $D(p)$ unidades al precio p, el productor tiene unos ingresos $R(p)$ dados por

$$R(p) = pD(p)$$

Por la regla del producto,

$$R'(p) = D(p) + pD'(p) = D(p)\left[1 + \frac{p}{D(p)} D'(p)\right]$$

luego

$$R'(p) = D(p)\left[1 + \mathrm{El}_p D(p)\right]$$

y así

$$\mathrm{El}_p R(p) = \frac{pR'(p)}{R(p)} = \frac{R'(p)}{D(p)} = 1 + \mathrm{El}_p D(p)$$

Obsérvese que, si $\mathrm{El}_p D(p) = -1$, entonces $R'(p) = 0$. Cuando la elasticidad (precio) de la demanda en un punto es igual a -1, una pequeña variación en el precio no tendrá (casi) influencia en el ingreso. Más generalmente, el ingreso marginal generado por una variación de precio es positivo si la elasticidad (precio) de la demanda es mayor que -1, y negativo si la elasticidad es menor que -1. Además la elasticidad del ingreso con respecto al precio es exactamente una unidad mayor que la elasticidad (precio) de demanda.

Hay fórmulas para las elasticidades de sumas, productos, cocientes y funciones compuestas que son útiles en ocasiones. Se recomienda al lector que deduzca esas reglas en el Problema 7.

Problemas

1 Hallar las elasticidades de las funciones definidas por las fórmulas siguientes:

(a) $3x^{-3}$ (b) $-100x^{100}$ (c) $\sqrt{x}$ (d) $\dfrac{A}{x\sqrt{x}}$ (A constante)

2 Un estudio de economía del transporte usa la relación $T = 0{,}4K^{1{,}06}$, donde K es el gasto de hacer carreteras y T es una medida del volumen de tráfico. Hallar la elasticidad de T con respecto a K. Un aumento de un 1% en el gasto corresponde en este modelo a un aumento del volumen de tráfico. ¿Cuál es su porcentaje aproximado?

3 Un estudio de los Ferrocarriles Estatales de Noruega revela que, para trayectos de hasta 60km, la elasticidad del volumen de tráfico es aproximadamente $-0{,}4$.

(a) Según este estudio, ¿cuáles son las consecuencias de un aumento de tarifas de un 10%?

(b) Se calculó que la elasticidad correspondiente para trayectos de más de 300 km es de, aproximadamente, $-0{,}9$. ¿Puede el lector imaginar una razón de por qué esta elasticidad es mayor en valor absoluto que la anterior?

4 Usar la definición (5.12) para calcular $\mathrm{El}_x f(x)$ para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = A$ (A constante) (b) $f(x) = x + 1$ (c) $f(x) = (1 - x^2)^{10}$

5 Demostrar que $\mathrm{El}_x f(x)^p = p\mathrm{El}_x f(x)$ (p constante).

6 Hallar $\mathrm{El}_x Af(x)$ y $\mathrm{El}_x[A + f(x)]$ (A constante).

Problemas avanzados

7 Probar que, si f y g son funciones de x, derivables, y A es una constante, se verifican las reglas siguientes (escribimos, por ejemplo, $\mathrm{El}_x f$ en lugar de $\mathrm{El}_x f(x)$).

(a) $\mathrm{El}_x A = 0$ (b) $\mathrm{El}_x(fg) = \mathrm{El}_x f + \mathrm{El}_x g$

(c) $\mathrm{El}_x \left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathrm{El}_x f - \mathrm{El}_x g$ (d) $\mathrm{El}_x(f + g) = \dfrac{f\,\mathrm{El}_x f + g\,\mathrm{El}_x g}{f + g}$

(e) $\mathrm{El}_x(f - g) = \dfrac{f\,\mathrm{El}_x f - g\,\mathrm{El}_x g}{f - g}$ (f) $\mathrm{El}_x\, f(g(x)) = \mathrm{El}_u\, f(u)\mathrm{El}_x u$ (donde $u = g(x)$)

8 Usar la reglas del Problema 7 para calcular las siguientes:

(a) $\mathrm{El}_x 3x^{-3}$. (b) $\mathrm{El}_x(x + x^2)$ (c) $\mathrm{El}_x(x^3 + 1)^{10}$

(d) $\mathrm{El}_x\mathrm{El}_x 5x^2$ (e) $\mathrm{El}_x(1 + x^2)$ (f) $\mathrm{El}_x \left(\dfrac{x - 1}{x^5 + 1}\right)$

9 Supongamos que f es una función derivable tal que $f(x) \neq 0$. Hallar las elasticidades de las siguientes funciones:

(a) $x^5 f(x)$ (b) $(f(x))^{3/2}$ (c) $x + \sqrt{f(x)}$ (d) $1/f(x)$

10 Hallar la elasticidad de y con respecto a x en los casos siguientes:

(a) $y^6 = x^5$ (b) $\dfrac{y}{x} = (x + 1)^a(y - 1)^b$ (a y b son constantes)

6

Límites, continuidad y series

Podríamos, por supuesto, rechazar la demostración rigurosa por superflua: si un teorema es geométricamente obvio, ¿por qué demostrarlo? Ésta era exactamente la actitud que se tomó en el siglo XVIII. El resultado, en el siglo XIX, fue caos y confusión: porque la intuición, sin el soporte de la Lógica, supone habitualmente que todo se comporta mejor de lo que realmente ocurre.
—*I. Stewart* (1975)

Este capítulo trata de límites, continuidad y series —ideas clave en matemáticas y también muy importantes en la aplicación de las matemáticas a problemas económicos. El estudio previo de límites hecho en la Sección 4.4 era necesariamente muy esquemático. En este capítulo estudiamos con más detalle este concepto y lo extendemos en varias direcciones.

Sin los límites, el sistema de los números reales estaría seriamente incompleto. Sólo tendríamos aquellos números que se pudiesen calcular de manera exacta en un número finito de pasos—por ejemplo, números enteros y racionales. Para afirmar que la ecuación $x^2 - 2 = 0$ tiene una solución positiva $x = \sqrt{2}$ y, quizás más importante, para poder dar aproximaciones de $\sqrt{2}$ con precisión arbitraria, necesitamos definir $\sqrt{2}$ como límite. Esto es lo que hacemos implícitamente cuando escribimos $\sqrt{2} \approx 1{,}41421\ldots$ Estamos imaginando una sucesión indefinida de expresiones decimales, que empiezan en 1, 1,4, 1,41, 1,414, ..., y que se acercan más y más al *límite* $\sqrt{2}$. De esta manera se considera a $\sqrt{2}$ como el límite de una sucesión de números racionales. Lo mismo vale para todos los números irracionales. También aparecen los límites en el estudio de las series infinitas, que es otro de los temas de este capítulo.

Recuérdese también que la derivada de una función, que mide su tasa de variación, se define mediante límites. En efecto, en la Sección 4.2, definimos la derivada de f en a como $f'(a) = \lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)]/h$. Además, hay una íntima conexión entre el concepto de límite y la idea

de *continuidad*, que estudiaremos también. El capítulo se termina con una sección optativa en la que se da una definición precisa de límite.

6.1 LÍMITES

En la Sección 4.4 hicimos un estudio preliminar de los límites. Complementamos ahora este estudio con algunos conceptos y resultados adicionales, manteniéndonos aún en un nivel intuitivo. La razón de hacer un estudio gradual es que es importante y bastante fácil adquirir un conocimiento operativo de los límites. Sin embargo, la experiencia señala que la definición precisa es bastante difícil de entender, como lo son las demostraciones basadas en esa definición.

Límites que no existen: límites laterales

Supongamos que f está definida para todo x próximo a a, pero no necesariamente en a. Según la Sección 4.4, la función $f(x)$ tiene límite A cuando x tiende a a, si $f(x)$ se pueda aproximar a A tanto como se quiera, con tal de que x esté suficientemente próximo a a, pero no sea igual a él. Cuando esto es así escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \qquad \text{ó} \qquad f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

Decimos en este caso que el límite existe. Las gráficas de las Figuras 6.1 y 6.2 muestran dos casos en los que $f(x)$ *no* tiende a ningún límite cuando x tiende a a.

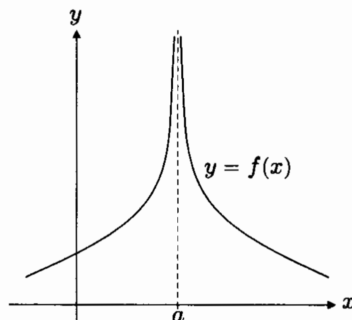


FIGURA 6.1 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

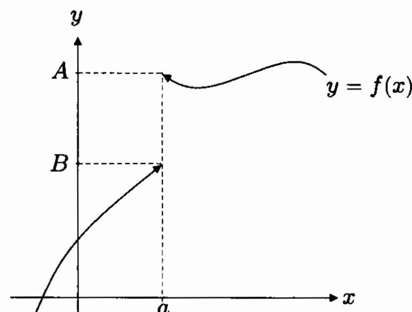


FIGURA 6.2 No existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

La Figura 6.1 contiene la gráfica de una función como $f(x) = 1/|x-a|$ ó $f(x) = 1/(x-a)^2$, que crece infinitamente cuando x tiende a a (tanto por la derecha como por la izquierda). En este caso escribimos $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, ó $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Puesto que $f(x)$ no tiende a un número concreto cuando x tiende a a, decimos que el límite no existe (en cierto sentido hay un límite infinito, pero seguimos la práctica matemática estándar de requerir que los límites sean números *finitos*). La recta $x = a$ se llama una **asíntota vertical** de la gráfica de f.

La función representada en la Figura 6.2 tampoco tiene límite cuando x tiende a a. Sin embargo parece como si la figura indicase que, si x tiende a a por debajo (es decir para valores menores que a), entonces $f(x)$ tendería al número B. Por tanto decimos que el *límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por debajo es B* y escribimos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = B \qquad \text{ó} \qquad f(x) \to B \quad \text{cuando} \quad x \to a^-$$

De forma análoga, refiriéndonos también a la Figura 6.2, decimos que el *límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por arriba es A* y escribimos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A \quad \text{ó} \quad f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to a^+$$

A estos límites se les llama *límites laterales*, el primero por debajo y el segundo por arriba. Se les llama también *límites a izquierda* y *límites a derecha*, respectivamente.

La condición necesaria y suficiente para que exista el límite (ordinario) es que existan y sean iguales los dos límites laterales de f en a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = A \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = A \tag{6.1}$$

En esta situación debe estar ya claro lo que significa la notación

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \ (\text{ó} - \infty) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \ (\text{ó} \ -\infty)$$

En estos casos decimos que los límites no existen, a pesar de la notación

Ejemplo 6.1

La Figura 6.3 reproduce la Figura 4.12 de la Sección 4.4, que contiene la gráfica de una función f definida en $[0, 9]$. Usando la figura, comprobar (grosso-modo) lo siguiente:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1/2, \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 9^-} f(x) = 3{,}5$$

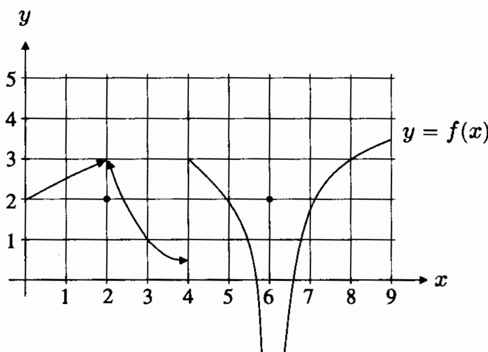


FIGURA 6.3

Ejemplo 6.2

Explicar el porqué de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{\sqrt{x-2}} = -\infty$$

Solución: Si x es negativo y próximo a 0, entonces $1/x$ es un número negativo de valor absoluto grande. Por ejemplo, $1/(-0{,}001) = -1.000$. De hecho, $1/x$ decrece infinitamente cuando x tiende a cero por debajo y es razonable decir que $1/x$ tiende a menos infinito cuando x tiende a 0 por debajo.

El segundo límite es análogo, excepto que $1/x$ es grande y positivo cuando x es positivo y próximo a 0.

Si x es ligeramente inferior a 2, entonces $2-x$ es positivo, luego $\sqrt{2-x}$ está próximo a 0 y $1/\sqrt{2-x}$ es un número positivo grande. Por ejemplo, $1/\sqrt{2-1{,}9999} = 1/\sqrt{0{,}0001} = 100$. Cuando x tiende a 2^-, entonces $1/\sqrt{2-x}$ tiende a ∞.

El cuarto límite es similar, porque cuando x es ligeramente mayor que 2, entonces $\sqrt{x-2}$ está próximo a 0, $x-2$ es positivo y $\sqrt{x-2}$ está próximo a 0.

Límites en el infinito

Podemos también usar el lenguaje de límites para describir el comportamiento de una función cuando su argumento se hace infinitamente grande para valores positivos o negativos. Supongamos que f está definida para números positivos x arbitrariamente grandes. Decimos que $f(x)$ *tiene límite* A *cuando* x *tiende a infinito* si se puede lograr que $f(x)$ esté arbitrariamente próximo a A haciendo x suficientemente grande. Escribimos, en este caso

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad \text{ó} \qquad f(x)\to A \quad \text{cuando} \quad x\to\infty$$

De manera análoga

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = B \qquad \text{ó} \qquad f(x)\to B \quad \text{cuando} \quad x\to-\infty$$

significa que se puede lograr que $f(x)$ esté tan próximo a B como se quiera, haciendo x negativo y suficientemente grande en valor absoluto. La Figura 6.4 nos muestra estos límites. La recta $y = A$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f cuando x tiende a ∞, mientras que $y = B$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f cuando x tiende a $-\infty$.

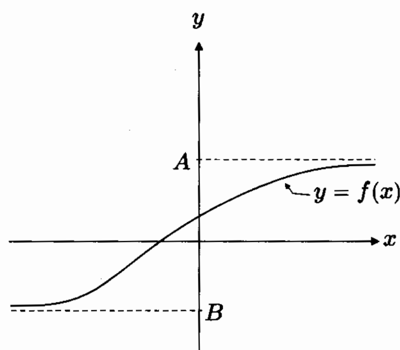


FIGURA 6.4 ***y = A, y = B* son asíntotas horizontales.**

Ejemplo 6.3

Estudiar el comportamiento de las siguientes funciones cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$:

(**a**)

$$f(x) = \frac{3x^2+x-1}{x^2+1}$$

(**b**)

$$g(x) = \frac{1-x^5}{x^4+x+1}$$

Solución:

(**a**) Un razonamiento no demasiado refinado es el siguiente: si x es un número, positivo o negativo, de valor absoluto grande, entonces el término $3x^2$ "domina" al numerador, mien-

tras que x^2 domina al denominador. Así, si $|x|$ es grande, $f(x)$ se comporta como la fracción $3x^2/x^2 = 3$. De aquí se deduce que $f(x)$ tiende a 3 cuando $|x|$ tiende a ∞.

Razonamos más formalmente como sigue. Primeramente dividimos cada término del numerador y denominador por la mayor potencia de x, que es x^2, y obtenemos

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = \frac{3 + (1/x) - (1/x^2)}{1 + (1/x^2)}$$

Si x es grande en valor absoluto, entonces $1/x$ y $1/x^2$ estarán próximos a 0. Así $f(x)$ está arbitrariamente próximo a 3 si $|x|$ es suficientemente grande y, por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

(b) Un primer razonamiento grosero es que, si $|x|$ es grande, entonces $g(x)$ se comporta como la fracción $-x^5/x^4 = -x$. Por tanto, $g(x) \to -\infty$ cuando $x \to \infty$, mientras que $g(x) \to \infty$ cuando $x \to -\infty$. De la otra forma,

$$g(x) = \frac{1 - x^5}{x^4 + x + 1} = \frac{(1/x^4) - x}{1 + (1/x^3) + 1/x^4}$$

Se recomienda al lector terminar el razonamiento, para este caso, de manera análoga a la parte (a).

Advertencias

Hemos extendido la definición original de límite en varias direcciones diferentes. Las reglas de la Sección 4.4 siguen siendo válidas para estas nuevas nociones de límite. Por ejemplo, todos los resultados de (4.15) sobre sumas, productos y cocientes de límites cuando $x \to a$ valen si sólo se consideran límites a izquierda (o sea, $x \to a^-$), o a derecha (o sea, $x \to a^+$). También siguen siendo válidas las propiedades mencionadas si sustituimos $x \to a$ por $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$ en (4.15).

Si $f(x)$ y $g(x)$ tienden a ∞ cuando $x \to a$ (o cuando $x \to a^-$ ó $x \to a^+$), debemos tener mucho cuidado. Puesto que $f(x)$ y $g(x)$ son arbitrariamente grandes si x está suficientemente próximo a a, entonces $f(x) + g(x)$ y $f(x) \cdot g(x)$ también lo son. Sin embargo no podemos decir nada, en general, de los límites de $f(x) - g(x)$ y $f(x)/g(x)$. Esos límites van a depender de "cómo de rápido" tiendan a infinito $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, cuando x tiende a a. Lo anterior se resume en:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty \implies \begin{cases} \lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty \\ \lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty \\ \lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \,? \\ \lim_{x\to a} [f(x)/g(x)] = \,? \end{cases}$$

Los dos signos de interrogación significan que no podemos determinar los límites de $f(x) - g(x)$ y $f(x)/g(x)$ sin tener mayor información sobre f y g. No sabemos ni siquiera si esos límites existen. El siguiente ejemplo señala algunas de las posibilidades.

Ejemplo 6.4

Sea $f(x) = 1/x^2$ y $g(x) = 1/x^4$. Cuando $x \to 0$, es $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$. Hallar los límites, cuando $x \to 0$, de las siguientes funciones:

(a) $f(x) - g(x)$, **(b)** $g(x) - f(x)$, **(c)** $f(x)/g(x)$, **(d)** $g(x)/f(x)$

Solución:
(**a**) $f(x) - g(x) = \frac{x^2-1}{x^4} \to -\infty$ cuando $x \to 0$
(**b**) $g(x) - f(x) = \frac{1-x^2}{x^4} \to \infty$ cuando $x \to 0$
(**c**) $f(x)/g(x) = x^2 \to 0$ cuando $x \to 0$.
(**d**) $g(x)/f(x) = 1/x^2 \to \infty$ cuando $x \to 0$.

Estos ejemplos prueban que los límites infinitos requieren un cuidado extremo. Consideremos otros ejemplos poco evidentes.

Supongamos que estudiamos el producto $f(x) \cdot g(x)$ de dos funciones, donde $g(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a a. ¿Tenderá a cero el producto $f(x) \cdot g(x)$ cuando x tienda a a? No necesariamente. Si $f(x)$ tiende al límite A, entonces la regla (4.15)(iii) de la Sección 4.4 nos dice que $f(x) \cdot g(x)$ tiende a $A \cdot 0 = 0$. Por otra parte, si $f(x)$ tiende a $\pm\infty$, es fácil construir ejemplos en los que el producto $f(x) \cdot g(x)$ no tienda a 0. (Se recomienda al lector que trate de construir algunos ejemplos por sí mismo antes de ir al Problema 4.)

Las reglas para límites de (4.15) son fundamentales. Sin embargo, se debe tener cuidado de no leer en ellas más de lo que dicen. Si $f(x)$ tiende a A y $g(x)$ tiende a B cuando x tiende a a entonces, por (4.15)(i), vemos que $f(x) + g(x)$ tiende a $A + B$ cuando x tiende a a. Pero la suma $f(x) + g(x)$ podría muy bien tender a un límite aun cuando $f(x)$ y $g(x)$ no lo tuvieran. Lo mismo se verifica para la fracción $f(x)/g(x)$.

Ejemplo 6.5

Sea $f(x) = 3 + 1/x$ y $g(x) = 5 - 1/x$. Calcular los límites cuando $x \to 0$ de
(**a**) $f(x) + g(x)$
(**b**) $f(x)/g(x)$.

Solución: Tenemos que

(**a**) $f(x) + g(x) = 8 \to 8$ cuando $x \to 0$

(**b**) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+1}{5x-1} \to -1$ cuando $x \to 0$

Pero en este caso ni $f(x)$ ni $g(x)$ tienen límite cuando x tiende a 0. En efecto, $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$, mientras que $f(x) \to -\infty$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^-$.

Problemas

1 Calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \to 0^+} (x^2 + 3x - 4)$ (b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{x + |x|}{x}$ (c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x + |x|}{x}$

(d) $\lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ (e) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x}{x-3}$ (f) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x}{x-3}$

2 Calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x-3}{x^2+1}$ (b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{2+3x}{x-1}}$ (c) $\lim_{x \to \infty} \frac{(ax-b)^2}{(a-x)(b-x)}$

3 Una función f definida para $x > b$ tiene la gráfica de la Figura 6.5.

(a) Determinar los límites siguientes:

(i) $\lim_{x \to b^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

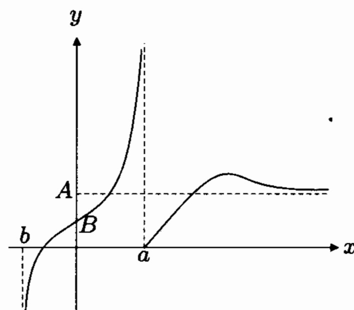


FIGURA 6.5

(b) Sólo uno de los límites siguientes está definido. ¿Cuál?

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to 0} f(x), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

4 Sea $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ y $f_4(x) = 1/x$. Calcular $\lim_{x \to \infty} f_i(x)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Estudiar después los límites de las funciones siguientes cuando $x \to \infty$:

(a) $f_1(x) + f_2(x)$ (b) $f_1(x) - f_2(x)$ (c) $f_1(x) - f_3(x)$ (d) $f_1(x)/f_2(x)$

(e) $f_1(x)/f_3(x)$ (f) $f_1(x) \cdot f_2(x)$ (g) $f_1(x) \cdot f_4(x)$ (h) $f_3(x) \cdot f_4(x)$

5 La recta no vertical $y = ax + b$ se llama una **asíntota** de la curva $y = f(x)$ cuando $x \to \infty$ (ó $x \to -\infty$) si

$$f(x) - (ax + b) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \ (\text{ó } x \to -\infty)$$

Esta condición significa que la distancia vertical entre el punto $(x, f(x))$ de la curva y el punto $(x, ax+b)$ de la recta tiende a 0 cuando $x \to \pm\infty$ (véase Figura 6.6).

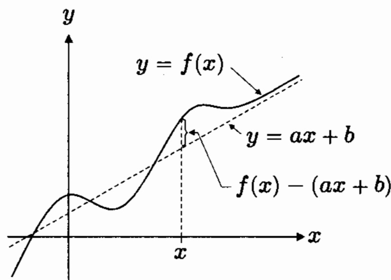


FIGURA 6.6

Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional, donde el grado del polinomio $P(x)$ es *una unidad mayor* que el del polinomio $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota que se puede calcular por división de los polinomios $P(x) \div Q(x)$ e ignorando el resto. Usar este método para hallar las asíntotas a las gráficas de cada una de las funciones siguientes:

(a) $\dfrac{x^2}{x+1}$ (b) $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 6}{x^2 + 1}$ (c) $\dfrac{3x^2 + 2x}{x - 1}$ (d) $\dfrac{5x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 - 1}$

6 Considérese la siguiente función de costes definida por

$$C(x) = A\frac{x(x+b)}{x+c} + d$$

para $x \geq 0$, donde A, b, c y d son constantes positivas. Hallar las asíntotas.

6.2 CONTINUIDAD

La palabra *continuo* es común en el lenguaje ordinario. La usamos, en particular, para caracterizar las variaciones que son graduales, no bruscas. Esta forma de uso está estrechamente relacionada con la idea de función continua. Hablando grosso -modo, una función es continua si variaciones pequeñas de la variable independiente dan lugar a variaciones pequeñas de los valores de la función. Geométricamente hablando, *una función es continua si su gráfica es conexa —esto es, si no tiene rupturas*. En la Figura 6.7 damos un ejemplo de función continua.

En otras palabras, una función es continua si se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. Sin embargo, si la gráfica da un salto o más, decimos que f es *discontinua*. Así, la función representada en la Figura 6.8 es discontinua en $x = a$, pero es continua en todos los otros puntos del intervalo que constituye su dominio.

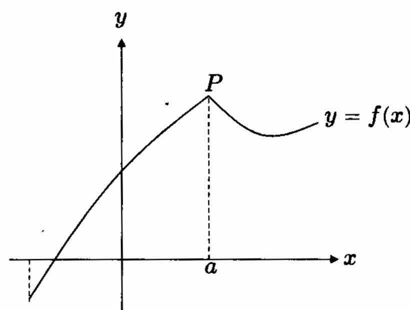


FIGURA 6.7 Una función continua.

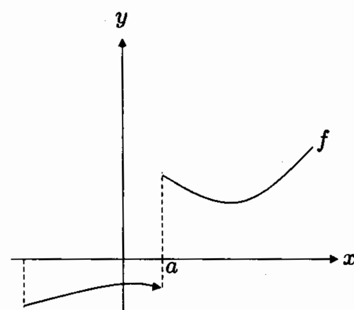


FIGURA 6.8 Una función discontinua.

¿Por qué ese interés en distinguir entre funciones continuas y discontinuas? Una razón muy importante es que vamos a tener que trabajar muy a menudo con aproximaciones numéricas. Por ejemplo, si nos dan una función f y queremos calcular $f(\sqrt{2})$, normalmente damos por descontado que basta calcular $f(1{,}4142)$ para obtener una buena aproximación de $f(\sqrt{2})$. Con esta forma de proceder estamos suponiendo implícitamente que f es continua. En efecto, estamos diciendo que, puesto que $1{,}4142$ está próximo a $\sqrt{2}$, el valor $f(1{,}4142)$ debe estar próximo a $f(\sqrt{2})$.

En las aplicaciones de las matemáticas a las ciencias naturales y a la economía, una función representa usualmente la variación en el tiempo de un cierto fenómeno. La continuidad de la función va a reflejar entonces la continuidad del fenómeno, en el sentido de una evolución gradual sin cambios súbitos. Por ejemplo, podemos considerar la temperatura corporal de una persona como función del tiempo. Razonablemente se puede suponer que cambia continuamente, esto es que no salta de unos valores a otros sin pasar por los intermedios. En el otro extremo de la escala, si consideramos el precio del barril de petróleo en un cierto mercado como una función del tiempo, esta función será discontinua. Una razón es que el precio (medido en cualquier unidad monetaria) debe ser siempre un número racional. Una segunda razón, más interesante, para que haya saltos ocasionales del precio es la llegada repentina de noticias o rumores que afecten significativamente las funciones de oferta o demanda.

El concepto de continuidad que acabamos de describir de manera informal debe precisarse antes de poder operar con él como un concepto matemático. En otras palabras, debemos buscar una definición de continuidad que no se base solamente en ideas geométricas intuitivas.

Funciones continuas

Hemos dicho anteriormente que una función es continua si su gráfica es una curva "conexa". En particular, decimos que f es continua en un punto a si la gráfica de f no tiene una ruptura en a.

¿Cómo se puede definir esto con precisión? Es evidente que debemos considerar valores f en puntos x próximos a a. Si la gráfica de f no tiene una ruptura en a, entonces $f(x)$ no puede diferir mucho de $f(a)$ cuando x esté próximo a a. Dicho de otra forma, si x está próximo a a, entonces $f(x)$ debe estar próximo a $f(a)$. Esto da lugar a la siguiente definición:

Supongamos que el dominio de f contiene un intervalo abierto de centro a. Se dirá que f es **continua** en $x = a$ si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $f(a)$:

$$f \text{ es } \textbf{continua} \text{ en } x = a \text{ si } \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{6.2}$$

Aquí se ve que, para que f sea continua en $x = a$, se deben verificar las tres condiciones siguientes:

1. La función f debe estar definida en $x = a$
2. Debe existir el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a
3. Este límite debe ser igual a $f(a)$

Si alguna de las tres condiciones anteriores no se verifica decimos que f es **discontinua** en a. La Figura 6.9 nos muestra dos de los tipos importantes de discontinuidad posibles. La función es discontinua en $x = a$ porque $f(x)$ no tiene límite cuando x tiende a a. Por tanto, la condición 2 no se satisface. A esta discontinuidad se le llama "inevitable". Por otra parte, existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a b y vale A. Sin embargo, como $A \neq f(b)$, no se satisface la condición 3, luego f es discontinua en b. Ésta es una discontinuidad "evitable" porque se le puede hacer desaparecer redefiniendo f de tal forma que $f(b) = A$.

Ejemplo 6.6

Sea $f(x) = 3x - 2$. En el Ejemplo 4.7 (**a**) de la Sección 4.4 vimos cómo $f(x)$ tiende a 7 cuando x tiende a 3. Como $f(3) = 7$, esto significa que f es continua en $a = 3$. De hecho, esta función es continua en todo punto a porque $f(x) = 3x-2$ tiende a $3a-2 = f(a)$ cuando x tiende a a.

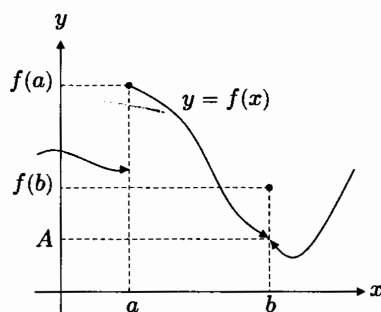


FIGURA 6.9 ***f*** **tiene dos puntos de discontinuidad. *x* = *a* es una discontinuidad inevitable y *x* = *b* es una discontinuidad evitable.**

Propiedades de las funciones continuas

Muchos de los resultados centrales del análisis matemático se verifican sólo para funciones continuas. Por tanto es importante poder averiguar cuándo una función dada es continua o no. Las reglas para el cálculo de límites que dimos en la Sección 4.4 facilitan el comprobar la continuidad de muchos

tipos de funciones. En particular, las relaciones (4.18) y (4.19) prueban que

$$f(x) = c \quad \text{y} \quad f(x) = x \text{ son continuas en todo punto} \tag{6.3}$$

Así todo ocurre como estaba previsto, porque las gráficas de estas funciones son rectas. Usando la definición (6.2) y la reglas de (4.15), tenemos lo siguiente:

Resultados sobre funciones continuas

Si f y g son continuas en a, entonces

a. $f + g$ y $f - g$ son continuas en a
b. $f \cdot g$ es continua en a
c. f/g es continua en a si $g(a) \neq 0$
d. $[f(x)]^{p/q}$ es continua en a si $[f(a)]^{p/q}$ está definida

(6.4)

La demostración de esas propiedades es mecánica si se usan la reglas para el cálculo de límites de la Sección 4.4. Por ejemplo, para probar (**b**), si f y g son continuas en a, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Según (4.15)(iii), $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = f(a)g(a)$, lo que significa que $f \cdot g$ es continua en a.

Por ejemplo, combinando (6.3) y (6.4), se deduce que $h(x) = x + 8$ y $k(x) = 3x^3 + x + 8$ son continuas. En general un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es una función continua en todo punto porque es suma de funciones continuas. Además, una función racional

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (P(x) \text{ y } Q(x) \text{ son polinomios})$$

es continua en todos los x tales que $Q(x) \neq 0$.

Consideremos una función compuesta $f(g(x))$, donde f y g son continuas. Si x está próximo a a, por la continuidad de g en a, $g(x)$ está próximo a $g(a)$. A su vez $f(g(x))$ está próximo a $f(g(a))$ porque f es continua en $g(a)$, y así $f(g(x))$ es continua en a. Una demostración más formal de este resultado requiere la definición $\varepsilon\delta$ de límite (véase Sección 6.7). Enunciamos lo siguiente para futuras referencias:

Las funciones compuestas de funciones continuas son continuas:

Si g es continua en $x = a$ y f es continua en $g(a)$, entonces $f(g(x))$ es continua en $x = a$. (6.5)

Usando los resultados que acabamos de ver, bastará usualmente echar una mirada a la fórmula que define una función para determinar los puntos en que es continua. En general:

Toda función que se construya a partir de funciones continuas por medio de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división (excepto por cero, naturalmente) y composición será continua en todos los puntos donde esté definida. (6.6)

Ejemplo 6.7

Determinar en qué valores de x las siguientes funciones son continuas:

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{(b)}\ g(x) = (x^2+2)(x^3+1/x)^4 + 1/\sqrt{x+1}$$

Solución:

(**a**) Se trata de una función racional que es continua para todo x excepto para los que anulan al denominador. Como $(x-1)(x+2) = 0$ implica que $x = 1$ ó $x = -2$, f es continua para todo x distinto de 1 y -2.

(**b**) Esta función está definida para todo $x \neq 0$ y $x+1 > 0$, o sea, para todo $x \neq 0$ y $x > -1$. Por tanto, g es continua en el dominio $(-1, 0) \cup (0, \infty)$.

El saber dónde es continua una función simplifica el cálculo de muchos límites. Por ejemplo, demostramos en el Ejemplo 4.9(a), usando las reglas para los límites, que $\lim_{x \to -2}(x^2 + 5x) = -6$. Pero esto mismo se hace ahora inmediatamente: puesto que $f(x) = x^2 + 5x$ es una función continua sabemos que $\lim_{x \to -2}(x^2 + 5x)$ es sencillamente $f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) = 4 - 10 = -6$. Así se calcula el límite evaluando $f(x) = x^2 + 5x$ en $x = -2$.

Las funciones que están definidas "a trozos", o sea mediante fórmulas distintas en distintos intervalos, son frecuentemente discontinuas en los puntos de unión. Por ejemplo, el precio de los sellos para una carta es una función discontinua de su peso. (Mientras se sigan usando sellos, sería incluso inconveniente que esta función fuese continua, ni siquiera aproximadamente.) Por otra parte, la función que determina el impuesto sobre la renta a partir de la renta neta es esencialmente continua, aunque mucha gente no se lo crea. La Figura 6.13 al final de la Sección 6.3 muestra el caso de esta función para los EE.UU.

Ejemplo 6.8

¿Para qué valores de a la siguiente función es continua en todo punto?

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4x - 1, & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 3, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución: La función es evidentemente continua en todo $x \neq 1$. Para $x = 1$, la función está definida por la fórmula de arriba, luego $f(1) = a + 3$. Si x es ligeramente mayor que 1, entonces $f(x) = -x + 3$ está próximo a 2, luego $f(x) \to 2$ cuando $x \to 1^+$. Para que f sea continua en $x = 1$, se debe tener $f(1) = a + 3 = 2$, luego $a = -1$. Así, para $a = -1$ la función es continua en todo x, incluso en $x = 1$. Si $a \neq -1$, la función es discontinua en $x = 1$, pero es continua en cualquier otro punto. (Dibújese la gráfica de f para $a = 1$ y para $a = -1$.)

Continuidad lateral

En la Sección 6.1 definimos los límites laterales. Con ellos podemos definir la continuidad lateral. Supongamos que f está definida en $(c, a]$. Si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a^-, decimos que f es **continua por la izquierda** en a. Análogamente, si f está definida en un dominio que incluye el intervalo semiabierto $[a, d)$, decimos que f es **continua por la derecha** en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a^+. Por ejemplo, la función f de la Figura 6.8 es continua por la derecha en a. Aunque f tiene límite cuando x tiende a a por la izquierda, f no es continua por la izquierda en a, porque el límite es distinto de $f(a)$.

Usando (6.1) de la Sección 6.1 vemos que una función f es continua en a si y sólo si f es continua en a por la izquierda y por la derecha.

Si una función f está definida en un intervalo $[a, b]$ cerrado y acotado, decimos que f es continua en $[a, b]$ si lo es en cada punto de (a, b) y, además, es continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b. Ya queda claro cómo definir la continuidad en intervalos semiabiertos. La continuidad en todos los puntos del intervalo es muy a menudo un requerimiento mínimo que se debe imponer para poder hablar de funciones que se "comportan bien".

Problemas

1 ¿Cuáles de las funciones siguientes del tiempo pueden ser continuas?

(a) El precio de la onza de oro en el mercado de Zürich.

(b) La altura de un niño en la edad del crecimiento.

(c) La altura de un avión durante un vuelo.

(d) La distancia recorrida por un automóvil.

2 Considérense las funciones definidas por las seis gráficas de la Figura 6.10.

(a) ¿Son continuas en a esas funciones?

(b) ¿Cuáles de esas funciones tendrán límite cuando x tiende a a?

(c) Determinar en cada caso el límite de $f(x)$ cuando $x \to a^-$ y $x \to a^+$.

(d) ¿Cuáles de esas funciones son continuas por la izquierda en a y cuáles lo son por la derecha?

(e) ¿Cuál puede ser el límite de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ en los casos (v) y (vi)?

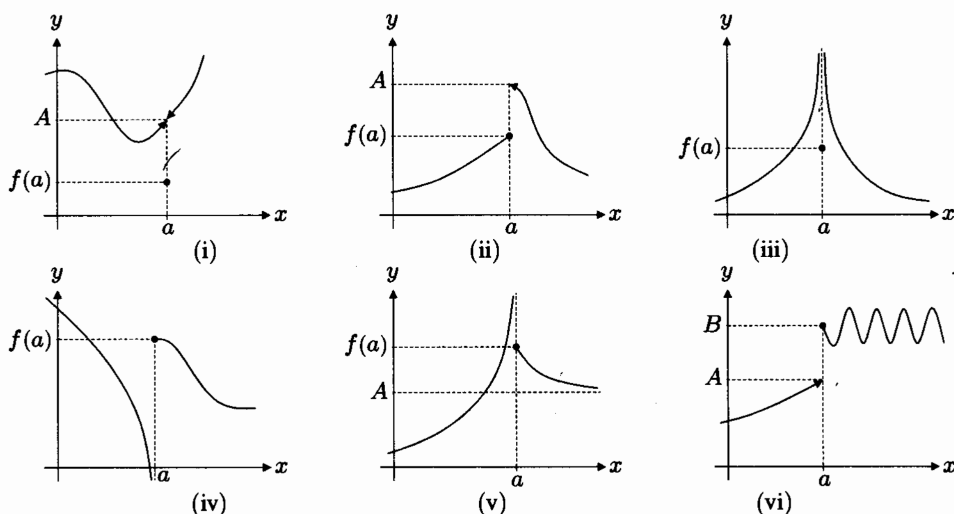


FIGURA 6.10

3 Sean f y g las funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{para } x \leq 0 \\ -x^2, & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{para } x \leq 2 \\ -x + 6, & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de cada función. ¿Es continua f en $x = 0$? ¿Es continua g en $x = 2$?

4 Determinar los valores de x para los que cada una de las funciones siguientes es continua:

(a) $f(x) = x^5 + 4x$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}}$

(d) $\dfrac{x}{x^2+1}$ (e) $\dfrac{x^8-3x^2+1}{x^2+2x-2}$ (f) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}$

(g) $\dfrac{\sqrt{x}+1/x}{x^2+2x+2}$ (h) $|x|+\dfrac{1}{|x|}$ (i) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x^7(x+2)^{-3/2}$

5 ¿Para qué valor de a es continua la siguiente función para todo x?

$$f(x)=\begin{cases} ax-1, & \text{para } x \le 1 \\ 3x^2+1, & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

6 Dibujar la gráfica de y como la función de x definida en la Figura 6.11 —es decir, y es la altura del avión sobre el punto del suelo situado verticalmente bajo él. ¿Es y una función continua de x? Sea $d(x)$ la distancia del avión al punto más cercano del suelo. ¿Es d una función continua de x?

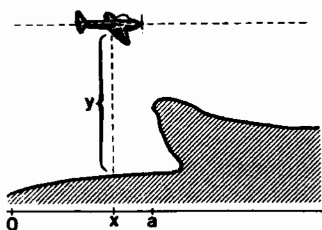


FIGURA 6.11

7 Supongamos que las funciones f y g son discontinuas en $x = a$. ¿Son $f+g$ y $f\cdot g$ necesariamente discontinuas en $x = a$? Si no, dar ejemplos.

8 Sea f la función definida por $f(x) = x^2-2$ para $x < 0$ y $f(x) = -3x^2+15$ para $x > 2$. Definir $f(x)$ como una función lineal en $[0, 2]$ de tal forma que f sea continua para todo x

6.3 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Considérese la función f cuya gráfica es la de la Figura 6.12. La gráfica no tiene una única tangente en el punto $(a, f(a))$. Así f no tiene derivada en $x = a$, pero f es continua en ese punto. Por tanto, una función puede ser continua en un punto sin ser derivable en él (véase el Problema 2 para un ejemplo estándar). Por otra parte, es muy fácil ver que derivabilidad implica continuidad:

Si f es derivable en $x = a$, entonces es continua en $x = a$. (6.7)

Demostración: La función f es continua en $x = a$ siempre que $f(a+h)-f(a)$ tienda a 0 cuando $h \to 0$. Ahora bien, si $h \neq 0$,

$$f(a+h)-f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h \tag{$*$}$$

Si f es derivable en $x = a$, el cociente de Newton $[f(a+h)-f(a)]/h$ tiende al número $f'(a)$ cuando $h \to 0$. Así, el miembro de la derecha de $(*)$ tiende a $f'(a)\cdot 0 = 0$ cuando $h \to 0$. Por tanto, f es continua en $x = a$.

Supongamos que f es una función cuyo cociente de Newton $[f(a+h)-f(a)]/h$ tiende a un límite cuando h tiende a 0 para valores positivos. Se llama **derivada por la derecha** de f en a a

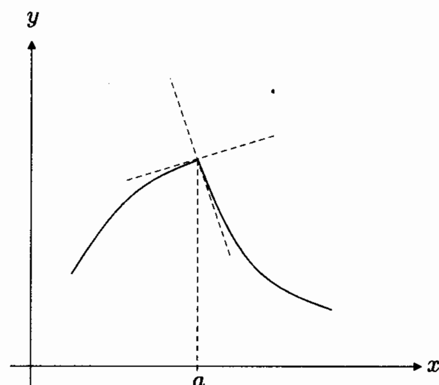


FIGURA 6.12 ***f* es continua, pero no derivable en *x* = *a*.**

este límite, y se usa la notación

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{6.8}$$

La **derivada por la izquierda** de f en a se define de manera análoga:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{6.9}$$

si existe este límite lateral.

Si f es continua en a, y si $f'(a^+) = \alpha$ y $f'(a^-) = \beta$ con $\alpha \neq \beta$, decimos que la gráfica de f tiene un **punto de esquina** en $(a, f(a))$. En este caso f no es derivable en a. Así la función de la Figura 6.12 tiene un punto de esquina en $(a, f(a))$. Si f es continua en a y $\alpha = \beta$, la esquina se suaviza (redondea) y se ve que f es derivable en a.

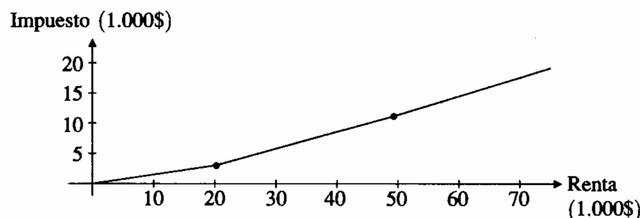


FIGURA 6.13 Impuesto Federal sobre la renta en EE.UU 1991, declaraciones individuales.

Ejemplo 6.9 (Impuesto Federal sobre la Renta de las Personas Físicas en EE.UU 1991, declaraciones individuales)

Hemos tratado esta función de impuesto en el Ejemplo 2.10 de la Sección 2.4. La Figura 6.13 reproduce la Figura 2.21.[1] Si $t(x)$ designa el impuesto que se paga por una renta de x, la

[1] Por supuesto, la Figura 6.13 es una idealización. La función de impuesto verdadera se define sólo para un número entero de dólares —o, más precisamente, es una "función discontinua a trozos" que salta ligeramente cuando la renta crece un dólar.

gráfica tiene puntos de esquina en $x = 20.250$ y en $x = 49.300$. Por ejemplo, vemos que $t'(20.250^-) = 0,15$ porque se pagan 15 centavos de impuesto por el último dólar que se gana antes de llegar a 20.250$. Además, $t'(20.250^+) = 0,28$ porque se pagan 28 centavos de impuesto por el primer dólar que se gana por encima de 20.250$. Como $t'(20.250^-) \neq t'(20.250^+)$, la función de impuesto t no es derivable en $x = 20.250$. Comprobar que $t'(49.300^+) = 0,31$.

Problemas

1 Dibujar la gráfica de la función f definida por $f(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $f(x) = x$ para $x > 0$. Calcular $f'(0^+)$ y $f'(0^-)$.

2 Sea la función $f(x) = |x|$, para todo x. Calcular $f'(0^+)$ y $f'(0^-)$. ¿Es continua f y/o derivable en $x = 0$? (La gráfica es la de la Figura 9.31 de la Sección 9.6.)

3 Se dice que la gráfica de una función continua f tiene una **cúspide** en a si $f'(x) \to \infty$ cuando x tiende a a por un lado, mientras que $f'(x) \to -\infty$ cuando x tiende a a por el otro lado. Probar que $f(x) = |\sqrt[3]{x}|$ tiene una cúspide en $x = 0$ y dibujar su gráfica.

4 Dar una definición algebraica de la función de impuesto $t(x)$ del Ejemplo 6.9. (La función se llama lineal a trozos puesto que es lineal en cada uno de los distintos intervalos de renta.) Calcular $t(22.000)$ y $t(50.000)$.

6.4 SUCESIONES INFINITAS

Consideremos la función f definida por la fórmula $f(n) = 1/n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Se tiene que $f(1) = 1$, $f(2) = 1/2$, $f(3) = 1/3$ y así sucesivamente. La lista de números

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots, \ \frac{1}{n}, \ \ldots \qquad (*)$$

se llama una **sucesión infinita**. Su primer *término* es 1 y su término general (n-ésimo) es $1/n$. En general, se llama una **sucesión infinita** a toda función cuyo dominio sea el conjunto de los enteros positivos. Análogamente $s_n = 100 \cdot 1{,}08^{n-1} (n = 1, 2, \ldots)$ define una sucesión infinita cuyos primeros términos son

$$100, \ 100 \cdot 1{,}08, \ 100 \cdot 1{,}08^2, \ 100 \cdot 1{,}08^3, \ldots \qquad (**)$$

Si s es una sucesión infinita, se designa normalmente a sus términos $s(1), s(2), s(3), \ldots, s(n), \ldots$ por $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$, es decir, por la letra que representa a la función afectada de subíndices. Para representar a una sucesión infinita arbitraria se emplea la notación $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, o simplemente $\{s_n\}$. También se hablará de una sucesión, en lugar de usar la locución "sucesión infinita" (*N. del T.*).

Consideremos la sucesión $(*)$ anterior. Si tomamos n suficientemente grande, se pueden hacer los términos tan pequeños como se quiera. En este caso decimos que la sucesión *converge* a 0. En general damos la definición siguiente:

Se dice que una sucesión $\{s_n\}$ **converge** *a un número s si se puede hacer s_n tan próximo a s como se quiera, tomando n suficientemente grande.* Escribimos

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s \qquad \text{ó} \qquad s_n \to s \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Se dice que una sucesión **diverge** cuando no converge a ningún número real. Por ejemplo, la sucesión $(**)$ anterior diverge porque $100 \cdot 1{,}08^{n-1}$ tiende a ∞ cuando n tiende a ∞.

La definición de convergencia de una sucesión es un caso particular de la definición previa de que $f(x) \to A$ cuando $x \to \infty$. Todas las reglas de cálculo de límites de la Sección 4.4 son válidas para límites de sucesiones.

Ejemplo 6.10

Escribir los 5 primeros términos de las sucesiones siguientes:

$$\text{(a)}\ \left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}, \quad \text{(b)}\ \left\{3+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}, \quad \text{(c)}\ \left\{\frac{n^3+1}{n^2+2}\right\}$$

Averiguar cuáles convergen.

Solución: (**a**) $\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}: \quad 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$

(**b**) $\left\{3+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}: \quad 3{,}1\ ,\ 3{,}01\ ,\ 3{,}001\ ,\ 3{,}0001\ ,\ 3{,}00001\ ,\ldots$

(**c**) $\left\{\frac{n^3+1}{n^2+2}\right\}: \quad \frac{2}{3},\ \frac{9}{6},\ \frac{28}{11},\ \frac{65}{18},\ \frac{126}{27},\ldots$

La sucesión (**a**) converge a 0 porque $1/n$ tiende a 0 cuando n tiende a ∞. La sucesión (**b**) converge a 3 porque $(1/10)^n$ tiende a 0 cuando n tiende a ∞. La sucesión (**c**) es divergente. Para probarlo basta observar que

$$s_n = \frac{n^3+1}{n^2+2} = \frac{n+1/n^2}{1+2/n^2}$$

Ahora se ve claro que $s_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, luego $\{s_n\}$ diverge.

Ejemplo 6.11

Sea A_n, $n \geq 3$, el área de un n-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1. Si $n = 3$, A_3 es el área de un triángulo; si $n = 4$, A_4 es el área de un cuadrado; si $n = 5$, A_5 es el área de un pentágono y así sucesivamente (véase Figura 6.14).

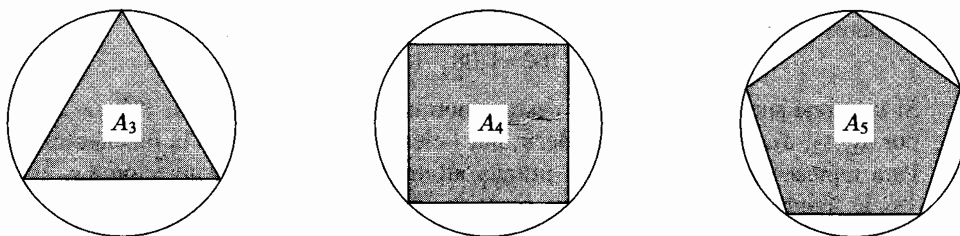


FIGURA 6.14

Cuanto mayor sea n, mayor es A_n, pero siempre es menor que π, el área de un círculo de radio 1. Intuitivamente se ve que la diferencia entre π y A_n se puede hacer tan pequeña como se quiera haciendo n suficientemente grande, luego

$$A_n \to \pi \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty$$

En este ejemplo, A_1 y A_2 no significan nada, luego la sucesión comienza con A_3.

La sucesión $\{A_n\}$ del ejemplo anterior converge al número irracional $\pi = 3{,}14159265\ldots$ Otra sucesión que converge a π comienza de esta forma: $s_1 = 3{,}1$, $s_2 = 3{,}14$, $s_3 = 3{,}141$, $s_4 = 3{,}1415$, etcétera. Cada término se obtiene del anterior añadiendo un dígito de la expresión decimal de π. Para esta sucesión, $s_n \to \pi$ cuando $n \to \infty$.

Considérese un número irracional r arbitrario. Al igual que en el caso de π, la expresión decimal de r define una sucesión particular r_n de números racionales que converge a r. De hecho, cada número irracional es el límite de infinitas sucesiones distintas de números racionales.

Ejemplo 6.12

A menudo es difícil determinar si una sucesión es convergente. Por ejemplo, considérese la sucesión cuyo término general $s_n = (1 + 1/n)^n$. ¿Cree el lector que converge? Los valores de s_n, para algunos valores de n, se muestran en la tabla siguiente:

n	1	2	3	5	10	100	10.000	100.000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,37	2,49	2,59	2,70	2,7181	2,7182

Esta tabla parece sugerir que s_n tiende a un número cercano a 2,718. Se puede probar que $\{s_n\}$ sí converge usando la siguiente propiedad general: toda sucesión creciente de números reales acotada superiormente es convergente. El límite de $\{s_n\}$ es un número irracional, que se designa por e y que es una de las constantes más importantes de las matemáticas (véase Sección 8.1).

Problemas

1 Sean

$$\alpha_n = \frac{3-n}{2n-1} \quad \text{y} \quad \beta_n = \frac{n^2+2n-1}{3n^2-2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Hallar los límites siguientes:

(a) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ (b) $\lim_{n\to\infty} \beta_n$ (c) $\lim_{n\to\infty} (3\alpha_n + 4\beta_n)$

(d) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n$ (e) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n/\beta_n$ (f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\beta_n - \alpha_n}$

2 Estudiar la convergencia de las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes

(a) $s_n = 5 - \dfrac{2}{n}$ (b) $s_n = \dfrac{n^2-1}{n}$ (c) $s_n = \dfrac{3n}{\sqrt{2n^2-1}}$

6.5 SERIES

Esta sección está esencialmente dedicada a estudiar series geométricas finitas e infinitas. Estas series tienen muchas aplicaciones en economía, como los cálculos sobre interés compuesto. Se estudian algunas otras aplicaciones más detenidamente en la sección siguiente.

Series geométricas finitas

Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo 6.13

Este año una empresa tiene unos beneficios de 100 millones de dólares y se espera que crezcan un 16% anual dentro de la próxima década. ¿Cuáles son los beneficios previstos para el décimo año y cuáles son los beneficios totales a lo largo del periodo entero?

Solución: Los beneficios previstos para el segundo año (en millones) son $100(1 + 16/100) = 100 \cdot 1{,}16$ (en millones) y para el tercer año es $100 \cdot (1{,}16)^2$. La ganancia prevista para el décimo año es $100 \cdot (1{,}16)^9$. Los beneficios totales durante la década serán de

$$100 + 100 \cdot 1{,}16 + 100 \cdot (1{,}16)^2 + \cdots + 100 \cdot (1{,}16)^9 \qquad (*)$$

Usando una calculadora se halla que el total es, aproximadamente, 2.132 millones de dólares.

Hemos hallado el total en $(*)$ sumando 10 números con la calculadora. Este método es farragoso, especialmente cuando hay que sumar muchos términos. Vamos a explicar un método más fácil para hallar este tipo de sumas.

Consideremos n números $a, ak, ak^2, \ldots, ak^{n-1}$. Cada uno de ellos se obtiene del anterior multiplicándolo por una constante k. Queremos hallar la suma

$$s_n = a + ak + ak^2 + \cdots + ak^{n-2} + ak^{n-1} \qquad (1)$$

de esos números. Esta suma se llama una **serie geométrica** finita de **razón** $\boldsymbol{k}$. Para hallar la suma s_n de la serie se multiplican primero los dos miembros de (1) por k, lo que da

$$ks_n = ak + ak^2 + ak^3 + \cdots + ak^{n-1} + ak^n \qquad (2)$$

Restando (2) de (1) se obtiene

$$s_n - ks_n = a - ak^n \qquad (3)$$

puesto que los otros términos $(ak + ak^2 + \cdots + ak^{n-1}) - (ak + ak^2 + \cdots + ak^{n-1})$ se anulan. Si $k = 1$, todos los términos de (1) son iguales a a y la suma vale $s_n = an$. Para $k \neq 1$, teniendo en cuenta que $s_n - ks_n = (1-k)s_n$, (3) implica que

$$s_n = \frac{a - ak^n}{1 - k} \qquad (4)$$

En definitiva:

Suma de una serie geométrica finita

$$a + ak + ak^2 + \cdots + ak^{n-1} = a\,\frac{1-k^n}{1-k} \qquad (k \neq 1) \qquad (6.10)$$

Ejemplo 6.14

En la suma $(*)$ del Ejemplo 6.13 se tiene $a = 100$, $k = 1{,}16$ y $n = 10$. Por tanto, (6.10) da

$$100 + 100 \cdot 1{,}16 + \cdots + 100 \cdot (1{,}16)^9 = 100\,\frac{1 - (1{,}16)^{10}}{1 - 1{,}16}$$

Se necesitan muchas menos operaciones con la calculadora que en el Ejemplo 6.13 para obtener que la suma vale alrededor de 2.132.

Series geométricas infinitas

Consideremos la sucesión infinita de números

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \dots$$

Cada término de la sucesión se forma dividiendo por 2 a su predecesor, de tal forma que el n-ésimo término es $1/2^{n-1}$. La suma de los n primeros términos es una serie geométrica finita de razón $k = 1/2$ y el primer término es $a = 1$. Por tanto, (6.10) da

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (*)$$

Nos preguntamos ahora qué significa la "suma infinita"

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \qquad (**)$$

Puesto que todos los términos son positivos y hay infinitos, pudiera pensar el lector que la suma debe ser infinitamente grande. Sin embargo, si consideramos la fórmula $(*)$, vemos que la suma de los n primeros términos vale $2 - 1/2^{n-1}$ y que este número nunca es mayor que 2, independientemente del n que tomemos. Cuando n aumenta, $1/2^{n-1}$ se hace cada vez más próximo a 0 y la suma de $(*)$ tiende al límite 2. Esto hace que sea natural *definir* la suma infinita de $(**)$ como el número 2.

Un ejemplo concreto: En una fiesta de cumpleaños hay dos tartas idénticas. La persona que celebra su aniversario se come una tarta entera. De la segunda, el primer invitado recibe la mitad; el segundo, un cuarto y así sucesivamente. En otras palabras, se da a cada invitado la mitad de lo que queda. La suma de $(*)$ da cuánto queda después de que $n-1$ invitados hayan recibido su ración (el anfitrión no cuenta como invitado). De esta forma vemos cómo se pueden invitar a la fiesta a infinitas personas. (Claro, el problema está en que aun si cada tarta costase 100$, el valor de la porción del decimotercer invitado sería de poco más de 1 centavo.)

En general, nos preguntamos qué puede significar la "suma infinita"

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} + \dots \qquad (6.11)$$

Usamos la misma idea que en $(**)$ y consideramos la suma s_n de los n primeros términos de (6.11). Según (6.10),

$$s_n = a\,\frac{1 - k^n}{1 - k} \qquad (k \neq 1)$$

¿Qué ocurre con esta expresión cuando n tiende a infinito? La respuesta depende evidentemente de k^n porque es el único término que depende de n. De hecho, k^n tiende a 0 si $-1 < k < 1$, mientras que k^n no tiene límite si $k > 1$ ó $k \leq -1$. (Si el lector no se ha convencido aún de que esta afirmación es cierta, estudie los casos $k = -2$, $k = -1$, $k = -1/2$, $k = 1/2$ y $k = 2$.) Por tanto, si $|k| < 1$, la suma s_n de los n primeros términos de (6.11) tenderá al límite $a/(1 - k)$ cuando n tiende a infinito. Entonces decimos que este límite es, *por definición*, la suma infinita (6.11). También se dice que la serie infinita (6.11) **converge**. Resumiendo:

Suma de una serie geométrica infinita:

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} + \dots = \frac{a}{1 - k} \qquad (\text{si } |k| < 1) \qquad (6.12)$$

Usando la notación para las sumas de la Sección B.1, Apéndice B, la fórmula (6.12) se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = \frac{a}{1-k} \quad (\text{si } |k| < 1) \tag{6.13}$$

Si $|k| \geq 1$ decimos que la serie infinita (6.11) **diverge**. Una serie divergente no tiene suma (finita). La divergencia es obvia si $|k| > 1$. Cuando $k = 1$, es $s_n = na$, que tiende a $+\infty$ si $a > 0$ ó a $-\infty$ si $a < 0$. Cuando $k = -1$, es s_n igual a a si n es impar e igual a 0 si a es par; aquí tampoco hay límite cuando $n \to \infty$.

Se usan series geométricas en muchas aplicaciones económicas. Estudiemos un ejemplo.

Ejemplo 6.15

Una estimación grosera del total de reservas de petróleo y gas de la plataforma continental noruega era de $12 \cdot 10^9$ toneladas al comienzo de 1981. La producción de aquel año fue de 50 millones ($50 \cdot 10^6$) de toneladas.

(a) ¿Cuándo se agotarán las reservas si se mantiene el nivel de producción?

(b) Supongamos que se reduce cada año la producción en un 1% a partir de 1982. ¿Cuánto durarán las reservas en este caso?

Solución:

(a) La duración de las reservas es, evidentemente, de

$$\frac{12 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^7} = 2{,}4 \cdot 10^2 = 240 \text{ años}$$

Se agotarán alrededor del año 2220.

(b) La producción en 1981 era de $a = 5 \cdot 10^7$. La de 1982 era de $a - a/100 = a \cdot 0{,}99$. La de 1983 era de $a \cdot 0{,}99^2$ y así sucesivamente. Si esto continúa infinitamente, el total extraído será

$$a + a \cdot 0{,}99 + a \cdot (0{,}99)^2 + \cdots + a \cdot (0{,}99)^{n-1} + \cdots$$

Esto es una serie geométrica de razón $k = 0{,}99$. Aplicando (6.12), la suma es

$$s = \frac{a}{1 - 0{,}99} = 100a$$

Puesto que $a = 5 \cdot 10^7$, se obtiene $s = 5 \cdot 10^9$, que es menor que $12 \cdot 10^9$. Así puede continuar la extracción por tiempo indefinido y siempre habrá una reserva de, al menos, 7 mil millones de toneladas.

Series generales (opcional)

La determinación de $\sum 1/n$ ocupó a Leibniz toda su vida
pero la solución nunca estuvo a su alcance.

—*H.H. Goldstine* (1977)

Vamos a considerar brevemente series generales infinitas que no sean necesariamente geométricas,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{6.14}$$

¿Qué significa que esta serie infinita converge? Por analogía con la definición para series geométricas, se forma la "suma parcial" s_n de los n primeros términos:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{6.15}$$

En particular, $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ y así sucesivamente. Cuando n aumenta, las sumas parciales incluyen cada vez más términos de la serie. Por tanto, si s_n tiende al límite s cuando n tiende a ∞, es razonable considerar a s como la suma de *todos* los términos de la serie. En este caso decimos que la serie infinita es **convergente** con suma s. Si s_n no tiende a un límite finito cuando n tiende a infinito, decimos que la serie es **divergente**. En este caso la serie no tiene suma. Al igual que con los límites de funciones, si $s_n \to \pm\infty$ cuando $n \to \infty$, esto no se considera como un límite.

En el caso de las series geométricas, era fácil determinar su convergencia porque se calculó una expresión sencilla de s_n. Normalmente no será posible hallar una fórmula sencilla de la suma de los n primeros términos de la serie y, por tanto, el problema de decidir si una serie converge o diverge puede ser muy difícil. No hay un método general para saber si una serie converge o no. Sin embargo, hay unos cuantos tests estándar, llamados *criterios de convergencia* o *divergencia*, que darán una respuesta en muchos casos. En economía se usan rara vez estos criterios.

Hagamos una observación general: si la serie (6.14) converge, el n-ésimo término debe tender a 0 cuando n tiende a infinito. El razonamiento es sencillo: si la serie es convergente, entonces la s_n de (6.15) tenderá a un límite s cuando n tiende a infinito. Ahora bien, $a_n = s_n - s_{n-1}$ y, por la definición de convergencia, s_{n-1} tenderá también a s cuando n tienda a infinito. De aquí se deduce que $a_n = s_n - s_{n-1}$ debe tender a $s - s = 0$ cuando n tiende a infinito. Dicho brevemente,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \text{ converge} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{6.16}$$

La condición de (6.16) es necesaria para la convergencia, pero no suficiente. Esto es, una serie puede verificar la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y ser divergente. Este hecho se verificó en el siguiente ejemplo típico, que dio a Leibniz un trabajo infinito.

Ejemplo 6.16

La serie

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{n} + \cdots \tag{6.17}$$

se llama la **serie armónica**. Su n-ésimo término es $1/n$, que tiende a 0, pero la serie es divergente. Para probar esto, agrupamos los términos de la forma siguiente:

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}) + (\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}) + (\tfrac{1}{17} + \cdots + \tfrac{1}{32}) + \cdots \tag{$*$}$$

Entre el primer par de paréntesis hay dos términos, uno mayor que $1/4$ y el otro igual a $1/4$, luego su suma es mayor que $2/4 = 1/2$. Entre el segundo par de paréntesis hay cuatro términos, tres mayores que $1/8$ y el último igual a $1/8$, luego su suma es mayor que $4/8 = 1/2$. Entre el tercer par de paréntesis hay ocho términos, siete mayores que $1/16$ y el último igual a $1/16$, luego su suma es mayor que $8/16 = 1/2$. Entre el cuarto par de paréntesis hay dieciséis términos, quince mayores que $1/32$ y el último igual a $1/32$, luego su suma es mayor que $16/32 = 1/2$. Este patrón se repite infinitamente. Entre el n-ésimo par de paréntesis habrá 2^n términos, de los cuales $2^n - 1$ son mayores que 2^{-n-1} mientras que el último es igual a 2^{-n-1}, luego su suma es mayor que $2^n \cdot 2^{-n-1} = 1/2$. De todo esto se deduce que la serie de $(*)$ debe ser divergente porque su suma es mayor que un número indefinido de fracciones iguales a $1/2$.

Un ejemplo concreto: Si se organiza una fiesta de cumpleaños con infinitos invitados y el anfitrión se come una tarta, su mejor amigo la mitad, la siguiente persona un tercio, y así sucesivamente, ¡habrá que comprar infinitas tartas!

Se puede demostrar en general (véase Problema 12 en la Sección 11.3) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ es convergente} \iff p > 1 \tag{6.18}$$

Problemas

1 Hallar la suma s_n de la serie geométrica finita

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}$$

¿A qué límite tiende s_n cuando n tiende a infinito? Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$$

2 Determinar cuáles de las series siguientes son geométricas y hallar la suma de las geométricas convergentes:

(a) $8+1+1/8+1/64+\cdots$

(b) $-2+6-18+54-\cdots$

(c) $2^{1/3}+1+2^{-1/3}+2^{-2/3}+\cdots$

(d) $1-1/2+1/3-1/4+\cdots$

3 Estudiar la convergencia de las series geométricas siguientes y calcular la suma de las que la tengan:

(a) $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots$

(b) $x+\sqrt{x}+1+1/\sqrt{x}+\cdots$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$

(d) $1+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+\cdots$

4 Hallar la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty}b\left(1+\frac{p}{100}\right)^{-k}\qquad (p>0)$$

5 El consumo mundial total de hierro en 1971 fue de, aproximadamente, 794 millones de toneladas. Si el consumo aumenta un 5% anual y las reservas son de $249\cdot 10^9$ toneladas, ¿cuánto durarán?

6 Probar que las series siguientes divergen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(101/100)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+1/n)^n}$

7 Estudiar la convergencia o divergencia de las series siguientes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(100/101)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1,00000001}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{4n-3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{3})^{1-n}$

8 Sea

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Usando la identidad

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

probar que $s_n=n/(n+1)$ y luego hallar la suma de la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

6.6 VALOR ACTUAL DESCONTADO E INVERSIÓN

Mil dólares en mano hoy valen más que la misma cantidad en una fecha futura. Una de las razones es que se pueden invertir estos 1.000$.[2] Si el tipo de interés es del 11% anual, después de 6 años los 1.000$ se habrán convertido en $1.000(1 + 11/100)^6 = 1.000 \cdot (1{,}11)^6 \approx 1.870$$ (véase Sección A.1 del Apéndice A).

Visto de otra forma, si se deben pagar 1.870 dólares dentro de 6 años y el tipo de interés es del 11% anual, entonces el *valor actual* de esa cantidad es de 1.000$. Como 1.000$ es menos que 1.870$, decimos que 1.000$ es el *valor actual descontado* (o VAD) de 1.870$. La razón 1.000$/1.870$ se llama el *factor de descuento.* El tipo de interés, 11% anual en este caso, se llama la *tasa de descuento.*

Supongamos que hay que hacer tres pagos: uno de 1.000$ dentro de 1 año, otro de 1.500$ dentro de 2 años y uno final de 2.000$ dentro de 3 años. ¿Cuánto habrá que depositar hoy en una cuenta de ahorro, al 11% anual, para poder cubrir esos tres pagos? Esa cantidad se llama el *valor actual* de los tres pagos.

Para tener 1.000$ dentro de 1 año, debemos depositar hoy la cantidad x_1 definida por la ecuación

$$x_1 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right) = 1.000, \qquad \text{esto es,} \qquad x_1 = \frac{1.000}{1 + 11/100} = \frac{1.000}{1{,}11}$$

Para tener 1500$ dentro de 2 años, debemos depositar hoy la cantidad x_2 definida por la ecuación

$$x_2 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)^2 = 1.500, \qquad \text{esto es,} \qquad x_2 = \frac{1.500}{(1 + 11/100)^2} = \frac{1.500}{(1{,}11)^2}$$

Finalmente, para tener 2.000$ dentro de 3 años, debemos depositar hoy la cantidad x_3 definida por la ecuación

$$x_3 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)^3 = 2.000, \qquad \text{esto es,} \qquad x_3 = \frac{2.000}{(1 + 11/100)^3} = \frac{2.000}{(1{,}11)^3}$$

Por consiguiente, el valor actual total de los tres pagos, que es la cantidad A que hay que depositar hoy en cuenta para cubrir esos pagos, es

$$A = \frac{1.000}{1{,}11} + \frac{1.500}{(1{,}11)^2} + \frac{2.000}{(1{,}11)^3}$$

Este total es, aproximadamente, $900{,}90 + 1.217{,}43 + 1.462{,}38 = 3.580{,}71$.

Supongamos ahora que hay que hacer n pagos sucesivos $a_1, \ldots, a_n$, con a_1 para dentro de 1 año, a_2 dentro de 2 años y así sucesivamente. ¿Cuánto hay que depositar hoy en una cuenta, a un interés del p% anual, para poder cubrir esos pagos futuros? En otras palabras, ¿cuál es el *valor actual* de todos esos pagos? Sea $r = p/100$ el *factor de interés.*

Para tener a_1 dentro de 1 año debemos depositar $a_1/(1 + r)$ hoy, para tener a_2 dentro de 2 años debemos depositar $a_2/(1 + r)^2$ hoy y así sucesivamente. La cantidad total A_n que debemos depositar hoy para cubrir los n pagos es, por tanto,

$$A_n = \frac{a_1}{1 + r} + \frac{a_2}{(1 + r)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(1 + r)^n} \tag{6.19}$$

En otras palabras:

[2] Si se espera que los precios aumenten, otra razón para preferir 1.000$ hoy es la inflación, porque 1.000$ futuros tendrán menos poder adquisitivo que 1.000$ de hoy.

El **valor actual** de los n vencimientos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, donde el primero, a_1, es para dentro de 1 año y los siguientes a intervalos de 1 año, al tipo de interés del $p\%$ anual, viene dado por

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1+r)^i} \qquad \text{donde } r = p/100 \tag{6.20}$$

Ocurre a menudo que los pagos anuales son iguales, luego $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$. Entonces (6.19) es una serie geométrica finita de n términos. El primer término es $a/(1+r)$ y la razón $1/(1+r)$. Según la fórmula (6.10), con $k = (1+r)^{-1}$, la suma es

$$A_n = \frac{a}{1+r} \frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-1}} = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

(la segunda igualdad se verifica porque, simplificando el denominador de la expresión central, se obtiene r). Se tiene, por tanto, lo siguiente:

El valor actual de n vencimientos de a dólares cada uno, donde hay que pagar la primera cantidad dentro de un año y las siguientes a intervalos de 1 año, con el tipo de interés del $p\%$ anual, está dado por

$$A_n = \frac{a}{1+r} + \cdots + \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] \tag{6.21}$$

donde $r = p/100$.

Ejemplo 6.17

¿Cuál es el valor actual de 10 vencimientos anuales de 1.000$, si hay que pagar el primero dentro de 1 año y el tipo de interés es del 14% anual?

Solución: Usando (6.21) con $a = 1.000$, $n = 10$ y $r = 14/100 = 0{,}14$ se obtiene

$$A_{10} = \frac{1000}{0{,}14}\left[1 - \frac{1}{(1{,}14)^{10}}\right] \approx 5.216{,}12$$

Ejemplo 6.18

Hay que pagar un préstamo hipotecario de 50.000$ de hoy en anualidades iguales durante 15 años, con el primer vencimiento dentro de un año. El tipo de interés es del 8%. ¿De cuánto son los pagos anuales?

Solución: Podemos usar (6.21) de nuevo. Esta vez, $A_{15} = 50.000$, $r = 0{,}08$ y $n = 15$. Así se obtiene la ecuación siguiente para calcular el importe anual a:

$$50.000 = \frac{a}{0{,}08}\left[1 - \frac{1}{(1{,}08)^{15}}\right]$$

Por tanto, $50.000 = a \cdot 8{,}55948$, luego $a \approx 5.841$.

Si n tiende a infinito en (6.21) y si $r > 0$, $(1+r)^n$ tenderá a infinito, y así A_n tenderá a $A = a/r$:

$$\frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{a}{r} \qquad (r > 0) \tag{6.22}$$

Por tanto, $a = rA$. Esto corresponde al caso en que una inversión de A dólares rinde a dólares anualmente a perpetuidad, al factor de interés r.

Proyectos de inversión

Consideremos n números $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ que representan las rentas devengadas en años sucesivos por una inversión. Los números negativos representan pérdidas, los positivos ganancias y a_i corresponde al año i-ésimo, mientras que a_0 corresponde al periodo actual. En la mayoría de los proyectos de inversión, a_0 es un número negativo grande, porque siempre hay un gasto grande antes de la percepción de beneficios. Si consideramos un tipo de interés del $p\%$ anual y escribimos $r = p/100$, el valor actual neto de los beneficios devengados por el proyecto está dado por

$$A = a_0 + \frac{a_1}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(1+r)^{n-1}}$$

Se usan varios criterios distintos para comparar proyectos de inversión alternativos. Uno de ellos es éste: Elíjase el proyecto cuya línea de beneficios tenga el mayor valor actual neto A. El tipo de interés a utilizar puede ser el normal para inversiones de capital. Esta regla es la extensión natural a muchos periodos de la maximización estática del beneficio, con los factores de descuento $(1+r)^{-1}$, $(1+r)^{-2}, \ldots$ ligados a beneficios futuros como los precios del dinero futuro (que tiene menos valor que el actual).

Un criterio distinto se basa en la **tasa interna de rendimiento**, que se define como el factor de interés que hace que sea cero el valor actual de la suma de todos los pagos. En el caso de un proyecto de inversión que rinda los beneficios $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, la tasa interna de rendimiento es un número r tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} = 0 \tag{6.23}$$

Si dos proyectos de inversión tienen cada uno una única tasa interna de rendimiento, un criterio para elegir entre ellos es dar preferencia al que la tiene mayor. Nótese que (6.23) es una ecuación polinómica de grado $n-1$ en el factor de descuento $(1+r)^{-1}$. En general, esta ecuación no va a tener una única solución positiva r. No obstante, el Problema 7 describirá un caso particular importante en el que hay una única tasa interna de rendimiento.

Problemas

1 ¿Cuál es el valor actual de 15 depósitos anuales de 3.500$ cada uno, el primero a un año vista, a un interés del 12% anual?

2 Hay que abonar a una persona derechos de autor por un libro. Se le ofrecen dos alternativas:

(a) Un pago de inmediato de 21.000$

(b) 5 pagos anuales iguales de 4.600$, el primero de forma inmediata.

¿Cuál de las alternativas es más rentable para el autor, si el tipo de interés es del 6% anual?

3 A está obligado a pagar a B 1.000$ anuales durante 5 años, con el primer pago a 1 año vista. B vende esta deuda a C por 4.340$ en efectivo. Hallar la ecuación que determina la tasa interna de rendimiento p

que C obtiene con esta inversión. ¿Puede probar el lector que el tipo de interés es ligeramente inferior al 5%?

4 Una empresa constructora pretende comprar un solar y tiene tres opciones de pago:

(a) Pagar 67.000$ en efectivo.
(b) Pagar 12.000$ anuales durante 8 años, con el primer vencimiento al día de hoy.
(c) Pagar 22.000$ en efectivo y posteriormente 7.000$ anuales durante 12 años, con el primer vencimiento para dentro de 1 año.

Determinar la forma de pago más barata si el tipo de interés es del 11,5% y la empresa dispone de, al menos, 67.000$ en efectivo. ¿Qué ocurre si la empresa puede permitirse pagar inmediatamente sólo 22.000$? ¿O si el tipo de interés es del 12,5%?

5 Supongamos que en (6.23) tenemos $a_i = a$, para $i = 1, 2, \ldots$. Si n es muy grande, hallar una expresión aproximada de la tasa interna de rendimiento.

6 El valor actual descontado de un pago D que crece a una tasa constante g cuando la tasa de descuento es r está dado por

$$\frac{D}{1+r} + \frac{D(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{D(1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots$$

donde r y g son positivos. ¿Cuál es la condición de convergencia? Probar que si la serie converge a una suma P_0, entonces $P_0 = D/(r-g)$.

7 Consideremos un proyecto de inversión con pérdida inicial $a_0 < 0$ y ninguna pérdida posterior. Supongamos también que la suma de los beneficios posteriores es mayor que la pérdida inicial. Probar que existe una única tasa interna de rendimiento que es positiva. (*Indicación:* Sea $f(r)$ la expresión del miembro de la izquierda de (6.23). Estudiar $f(r)$ y $f'(r)$ en el intervalo $(0, \infty)$.)

6.7 UN ESTUDIO RIGUROSO DE LOS LÍMITES (OPCIONAL)

Nuestra definición preliminar del concepto límite en la Sección 4.4 era la siguiente:

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ quiere decir que $f(x)$ se puede hacer tan próximo a A como deseemos, para todo x suficientemente próximo a (pero no igual a) a (1)

La proximidad o, más generalmente, la distancia entre dos números es el valor absoluto de la diferencia entre ellos. Estudiemos brevemente algunos ejemplos de uso de valores absolutos antes de ir más lejos.

Ejemplo 6.19

Usar valores absolutos y dobles desigualdades para responder a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Qué números x distan de 5 menos que 0,1?

(b) ¿Qué números x distan de a menos que δ?

Solución:

(a) La distancia entre x y 5 es $|x-5|$, luego la respuesta es que $|x-5| < 0{,}1$. Usando (1.4) de la Sección 1.4, se puede escribir equivalentemente $-0{,}1 < x - 5 < 0{,}1$. Sumando 5 a cada miembro se obtiene $4{,}9 < x < 5{,}1$. (El resultado es obvio: Los números x que distan de 5 menos que 0,1 son los que están entre 4,9 y 5,1.)

(b) En este caso la respuesta es $|x-a| < \delta$ ó $-\delta < x - a < \delta$. Sumando a a cada miembro se tiene $a - \delta < x < a + \delta$. También se puede escribir que $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Se pueden usar valores absolutos para reformular (1) como sigue:

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ quiere decir que *podemos hacer* $|f(x) - A|$ *tan pequeño como queramos para todo* $x \neq a$ *con* $|x-a|$ *suficientemente pequeño.* (2)

Nótese que la condición $x \neq a$ equivale a $0 < |x - a|$.

El matemático alemán Heine fue el primero en darse cuenta (en 1872) de que esta formulación se podía precisar con la siguiente definición $\varepsilon\delta$:

> Decimos que $f(x)$ tiende al límite A cuando x tiende a a, y escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = A$, cuando, para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que
>
> $$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

(6.24)

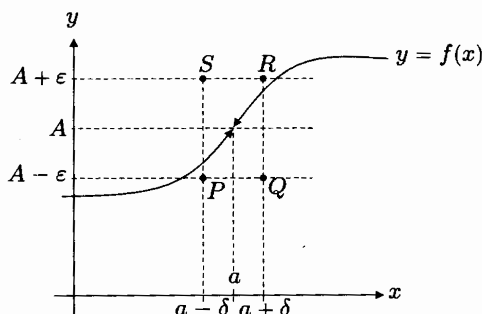


FIGURA 6.15 Para todo ε, existe un δ, luego $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

La definición (6.24) viene ilustrada en la Figura 6.15. Nótese que la tolerancia ε para la desviación de $f(x)$ está marcada sobre el eje y, y la desviación correspondiente δ de x está marcada sobre el eje x. Geométricamente, el que $f(x) \to A$ cuando $x \to a$ significa que la gráfica no solamente debe entrar en el rectángulo $PQRS$, sino también debe "salir de" sus lados verticales. Nótese que se debe elegir $\delta > 0$ de tal forma que, si $x \neq a$ y $x \in (a - \delta, a + \delta)$, entonces $f(x)$ pertenece al intervalo $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Si se elige un $\varepsilon > 0$ menor, también habrá que elegir usualmente un δ menor. Entonces δ depende, en general, de ε. *Esta interacción entre ε y δ es el punto crucial de la definición:* No importa cuán pequeño se elija $\varepsilon > 0$ para poder hallar un $\delta > 0$ que, cuando x diste de a menos que δ (y $x \neq a$), entonces $f(x)$ diste de A menos que ε.

El *haber visto* esta definición $\varepsilon\delta$ de límite debe considerarse como parte de la educación matemática individual. Sin embargo, si el lector tiene dificultades con esta definición y con los razonamientos que se basan en ella, está ciertamente en buena compañía. Cientos de miles de estudiantes de matemáticas del mundo entero luchan con esta definición cada año. Más aún, muchos de los mejores matemáticos del mundo en el siglo XIX no pudieron resolver problemas importantes por carecer de una definición precisa de límite. Por tanto, este concepto tampoco llegó fácilmente.

Ejemplo 6.20

Usar (6.24) para probar que

$$\lim_{x\to 3} (3x - 2) = 7 \tag{1}$$

Solución: En este caso, $f(x) = 3x - 2$, $a = 3$ y $A = 7$. Por tanto,

$$|f(x) - A| = |(3x - 2) - 7| = |3x - 9| = 3|x - 3| \tag{2}$$

Sea dado $\varepsilon > 0$. Se ve en (2) que $|f(x) - A| = 3|x - 3| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 3| < \varepsilon/3$. Por tanto, $|f(x) - A| < \varepsilon$ si $|x - 3| < \delta$, donde $\delta = \varepsilon/3$. La definición (6.24) implica entonces que (1) es correcta.

Nótese que el valor de δ en la definición (6.24) no es único. Una vez encontrado *un* valor de δ, cualquier valor menor de δ funcionará también. En el Ejemplo 6.20 hemos elegido $\delta = \varepsilon/3$; podríamos haber elegido cualquier $\delta \leq \varepsilon/3$, pero no $\delta = \varepsilon/2$.

La demostración que hemos hecho en el ejemplo 6.20 es la más fácil que se puede dar para un límite. Usualmente se requiere un poco más de chispa. Consideremos un ejemplo más típico.

Ejemplo 6.21

Probar mediante la definición $\varepsilon\delta$ que, si $a > 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \tag{1}$$

Solución: En este caso $f(x) = \sqrt{x}$ y $A = \sqrt{a}$. Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario hay que calcular un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta \tag{2}$$

Es una buena idea expresar $|\sqrt{x} - \sqrt{a}|$ en términos de $|x - a|$. Usamos un artificio algebraico muy corriente:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a}\,)(\sqrt{x} + \sqrt{a}\,)}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \tag{3}$$

Puesto que $\sqrt{x} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}$ siempre que $x \geq 0$, se deduce de (3) que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}|x - a|$$

Así se ve que, si $|x - a|$ es pequeño, entonces $|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,|$ es pequeño también. *Más precisamente:*

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |x - a| < \varepsilon$$

cuando $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon\sqrt{a}$.

Hemos estudiado hasta ahora casos en los que existe el límite. ¿Qué significa que $f(x)$ *no* tiende al número A cuando x tiende a a? La negación de (6.24) nos da (comparar con el Problema 9(d) de la Sección 1.5) lo siguiente:

> $f(x)$ no tiende al límite A cuando x tiende a a si existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe un número x que verifica que $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - A| \geq \varepsilon$. (6.25)

La Figura 6.16 describe la definición (6.25). Si elegimos ε como en la figura vemos que, si x es ligeramente mayor que a, la distancia $|f(x) - A|$ es mayor que ε. Para todo $\delta > 0$ existe un número x que verifica $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - A| \geq \varepsilon$. Esto prueba que $f(x)$ no tiende al límite A cuando x tiende a a.

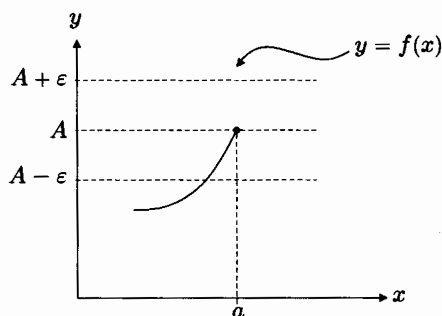


FIGURA 6.16

Extensiones del concepto de límite

En la Sección 6.1 hemos extendido heurísticamente el concepto de límite de varias maneras distintas.

Se pueden precisar esas definiciones de la misma manera que (6.24). Mencionamos sólo la siguiente:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ quiere decir que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un número N tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ para todo $x > N$ (6.26)

Usar la Figura 6.4 de la Sección 6.1 para ver mejor esta definición.

El teorema siguiente, "geométricamente obvio", es muy útil:

Regla del encaje para límites

Supongamos que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo x de un intervalo centrado en a, pero no necesariamente en a. Si existe un número M tal que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = M$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = M$. (6.27)

Este teorema se ilustra en la Figura 6.17. Puesto que $g(x)$ está "encajada" entre dos funciones que tienden a M cuando $x \to a$, $g(x)$ deberá también tender a M cuando $x \to a$. Se puede probar este teorema usando la definición (6.24), pero no lo vamos a hacer. Probablemente el lector curioso querrá demostrar (6.27) sin ayuda.

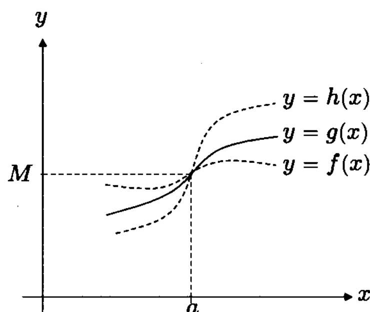


FIGURA 6.17

Una definición εδ de continuidad

En (6.2) Sección 6.2 definimos el concepto de continuidad en términos del de límite. Usando la definición precisa (6.24) podemos dar la siguiente definición $\varepsilon\delta$ de continuidad:

f es **continua** en $x = a$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ siempre que $|x - a| < \delta$. (6.28)

Nótese que no es necesario exigir que $|x - a| > 0$ porque, si $|x - a| = 0$, entonces $x = a$ y así $|f(x) - f(a)| = 0$.

Problemas

1 Usar (6.24) para demostrar que $\lim_{x\to -1} (5x + 2) = -3$.

2 Probar que, para $|x| \leq 1$, se tiene $|(x+1)^3 - 1| \leq 7|x|$. Usar esto y la definición de límite para demostrar que $\lim_{x\to 0}(x+1)^3 = 1$. ¿Es continua $f(x) = (x+1)^3$ en $x = 0$?

3 Sea $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ y $h(x) = 2 + x^2$. Supongamos que lo único que sabemos de la función g es que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x. Hallar $\lim_{x\to 0} g(x)$

4 Usando la definición de límite, probar que:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 5} \frac{4x^2 - 100}{x - 5} = 40 \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to -\pi} \frac{x^2 - \pi^2}{x + \pi} = -2\pi$$

Indicación: Simplificar las fracciones.

7

Consecuencias de la continuidad y de la derivabilidad

De hecho, el teorema del valor medio es un lobo con piel de cordero y es EL teorema fundamental del cálculo diferencial.
—*R. G. Bartle* (1964)

Las tres primeras secciones de este capítulo tratan de teoremas que son muy importantes desde un punto de vista teórico. Esos resultados son "más bien obvios", intuitivamente hablando, pero para dar demostraciones precisas de ellos hay que basarse en un estudio muy fino de la continuidad y del sistema de los números reales. Normalmente omitimos esas demostraciones.

El resultado más útil de la Sección 7.1 es el teorema del valor intermedio y su corolario el Teorema 7.2. Hay que aprender a aplicarlos. Los resultados de la Sección 7.2 forman la base de la teoría de la optimización, que se estudia en el Capítulo 9, y que es un tema clave en economía. La Sección 7.3 trata del teorema del valor medio y sus consecuencias. Este teorema es una herramienta de primera importancia para un tratamiento preciso del cálculo. De hecho, la mayor parte de los estudiosos de las matemáticas encuentran muy razonable este teorema y sus corolarios. El problema está en que muchos de nosotros no aceptamos fácilmente, por ejemplo, el que una función tenga un único punto de continuidad, a menos que veamos un ejemplo como el del Problema 4 de la Sección 7.1. No obstante lo anterior, reconocemos que no es necesario comprender esta sección para leer el resto del libro.

La última parte del capítulo presenta varios temas de matemáticas que surgen a menudo en análisis económico. La Sección 7.4 estudia la fórmula de Taylor, con la cual se analiza el error resultante de aproximar una función por un polinomio. En la Sección 7.5 se estudia la regla de

l'Hôpital para formas indeterminadas, que es útil a veces para calcular límites. Finalmente, en la Sección 7.6 tratamos con detalle las funciones inversas, que ya vimos brevemente en la Sección 3.6.

7.1 EL TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Una razón importante para introducir el concepto de función continua era el distinguir entre funciones cuyas gráficas son "conexas" y aquéllas que tienen uno o varios saltos. ¿Podemos estar seguros de que la definición $\varepsilon\delta$ de función continua es la correcta en este sentido? El siguiente teorema da la respuesta.

Teorema 7.1 El teorema del valor intermedio

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Entonces $f(x)$ toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$ cuando x recorre $[a, b]$.

El significado geométrico de este teorema está explicado en la Figura 7.1. En ella, m es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$. El teorema dice que la gráfica de la función continua f corta a la recta $y = m$ en un punto (c, m) al menos, es decir existe c tal que $f(c) = m$. Este teorema no es evidente en absoluto. Una demostración rigurosa requiere el uso de la definición $\varepsilon\delta$ de continuidad.

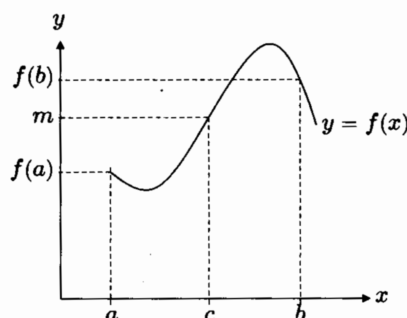


FIGURA 7.1

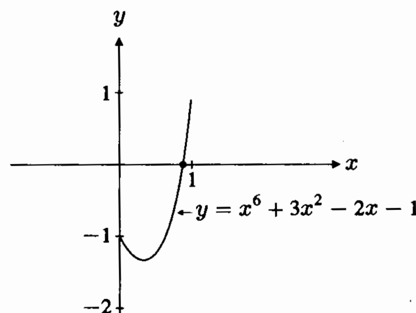


FIGURA 7.2

Una consecuencia útil e inmediata del teorema del valor intermedio es la siguiente:

Teorema 7.2

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos. Entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Este teorema es importantísimo para demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones que no se pueden resolver explícitamente.

Ejemplo 7.1

Demostrar que la siguiente ecuación tiene al menos una solución entre 0 y 1:

$$x^6 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad (*)$$

Solución: Ponemos $f(x) = x^6 + 3x^2 - 2x - 1$. Entonces f es continua para todo x porque es un polinomio —en particular lo es en el intervalo $[0, 1]$. Además, $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$. Por el Teorema 7.2 deducimos que existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. Por tanto, la ecuación $(*)$ tiene al menos una solución entre 0 y 1 (véase Figura 7.2).

Si nos interesase calcular más exactamente una solución de la ecuación $(*)$ en el intervalo $[0, 1]$ habría que aplicar el siguiente procedimiento. Tómese el punto medio entre 0 y 1, $x = \frac{1}{2}$. Calculando $f(\frac{1}{2})$ se ve que es negativo. Por tanto, hay una solución en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$. Tomando el punto medio $x = \frac{3}{4}$ de este intervalo y calculando $f(\frac{3}{4})$, obtenemos nuevamente un número negativo. Por consiguiente, hay una solución en $(\frac{3}{4}, 1)$. Continuando de esta forma podemos calcular la solución con la aproximación que se desee. Hay que advertir que hay procedimientos mucho más efectivos que éste para calcular numéricamente una solución.

Ejemplo 7.2

Probar que, para todo $a > 0$, la ecuación

$$x^3 = a \qquad (*)$$

tiene una única solución positiva $x = c$. (Se designa a esta solución por $\sqrt[3]{a}$, la raíz cúbica de a.)

Solución: Sea $f(x) = x^3 - a$, que es continua para todo x, en particular en el intervalo $[0, a+1]$. Además, $f(0) = -a < 0$ y $f(a+1) = (a+1)^3 - a = a^3 + 3a^2 + 2a + 1 > 0$, luego existe un número $c \in (0, a+1)$ tal que $f(c) = c^3 - a = 0$, y así $c^3 = a$.

Para probar que c es única, supongamos que c_1 y c_2 son dos soluciones positivas de la ecuación. Se tiene que

$$c_1^3 - c_2^3 = (c_1 - c_2)(c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2) \qquad (**)$$

como se puede comprobar fácilmente desarrollando la expresión de la derecha y simplificando. Como $c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2$ es positivo, se deduce de $(**)$ que $c_1 \neq c_2 \Rightarrow c_1^3 \neq c_2^3$. Esto prueba que la ecuación $(*)$ tiene una única solución $x = \sqrt[3]{a}$. (De hecho $(*)$ tiene también solución única si a es negativo.)

Nota: El teorema del valor intermedio, junto con la definición $\varepsilon\delta$ de continuidad, implican que, cuando una función es continua en un intervalo, su gráfica merece bien el nombre de "conexa". Sin embargo, hay que advertir de los peligros de interpretar el concepto de función continua demasiado intuitivamente. En efecto, si nos apoyamos exclusivamente en la intuición, son difíciles de entender los hechos siguientes:

1. Existen funciones que son continuas en un solo punto (véase Problema 4).
2. Existen funciones que son discontinuas para todo x (véase Problema 4).
3. Existen funciones continuas que no son derivables en ningún punto.

El último hecho puede ser el más sorprendente porque es imposible dibujar la gráfica de una tal función. Ocurre como si la función oscilara tanto que tiene "esquinas" en todo punto. No obstante, estas funciones han jugado recientemente un papel importante en el análisis de mercados financieros.

Problemas

1 Probar que cada una de las siguientes ecuaciones tiene al menos una solución en el intervalo dado.

(a) $x^7 - 5x^5 + x^3 - 1 = 0$ en $(-1, 1)$.

(b) $x^3 + 3x - 8 = 0$ en $(-2, 3)$.

(c) $\sqrt{x^2+1} = 3x$ en $(0, 1)$.

2 Probar que, cualesquiera que sean los coeficientes, la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

tiene al menos una raíz real. Generalizar este resultado al caso de

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

donde n es impar. ¿Por qué falla este razonamiento cuando n es par?

3 "Demostrar" que cualquier adulto midió alguna vez 1 metro de altura.

Problemas avanzados

4 Consideremos las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ irracional} \\ 0, & x \text{ racional} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

Probar que f es continua sólo para $x = 0$ y que g es discontinua para todo x.

5 Supongamos que $f(x)$ es una función continua de $[a, b]$ en $[a, b]$, es decir que su dominio y su conjunto final son iguales a $[a, b]$).

(a) Dibujar esta función junto con la recta $y = x$.

(b) Demostrar que la ecuación $f(x) = x$ tiene al menos una solución en $[a, b]$. (Cualquier solución de $f(x) = x$ se llama un *punto fijo*. El resultado que aquí se pide probar es un caso particular sencillo del *teorema del punto fijo de Brouwer*, que se usa frecuentemente en economía.[1])

7.2 EL TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS

Una de las aplicaciones más antiguas e importantes del cálculo es hallar los puntos del dominio de una función en los cuales alcanza sus valores máximo y mínimo. Los ejemplos de funciones cuadráticas de la Sección 3.2 y las discusiones generales de capítulos posteriores muestran cómo estos problemas tienen un papel especialmente importante en análisis económico. Nos referimos normalmente a esos puntos como el máximo o el mínimo. Si no deseamos distinguir, se les llama **puntos óptimos**. Así, si D es el dominio de $f(x)$, entonces

$$c \in D \text{ es un } \textbf{máximo} \text{ de } f \iff f(x) \le f(c) \text{ para todo } x \in D \tag{7.1}$$

[1] Véase, por ejemplo, K. C. Border, *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press, New York, 1990.

$$d \in D \text{ es un } \textbf{mínimo} \text{ de } f \iff f(x) \geq f(d) \text{ para todo } x \in D \qquad (7.2)$$

En (7.1) se llama a $f(c)$ el **valor máximo**; en (7.2) se llama a $f(d)$ el **valor mínimo**.

El teorema siguiente suministra condiciones suficientes para la existencia de máximo o mínimo.

Teorema 7.3 El teorema de los valores óptimos

Si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$ cerrado y acotado, tiene en él un máximo y un mínimo.

La demostración de este teorema es sorprendentemente difícil. Sin embargo el resultado es fácil creer. Imaginemos, por ejemplo, un ciclista que recorre una carretera con cuestas. La altura de la carretera sobre el nivel del mar es una función continua de la distancia recorrida (véase Figura 7.3). Durante el trayecto, el ciclista ha de pasar, necesariamente, por un punto P de altura máxima y por otro Q de altura mínima, como muestra la figura.

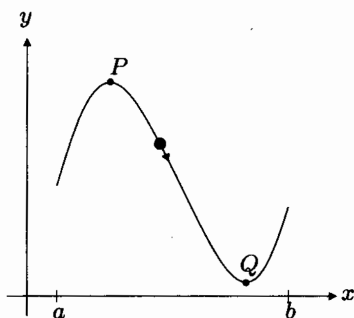


FIGURA 7.3

Nota: Uno de los errores más comunes que se producen en la interpretación del Teorema 7.3 es el que se describe a continuación, que está tomado de un examen realizado por un estudiante. "La función es continua, pero como no está definida en un intervalo cerrado y acotado, el teorema de los valores extremos prueba que no tiene un máximo." El error está en que, aunque las condiciones del teorema son suficientes, *no son necesarias* para la existencia de un punto óptimo. En el Problema 3 se pide estudiar una función definida en un intervalo que no es cerrado ni acotado, ni siquiera es continua, pero tiene un máximo.

Si no se verifica alguna de las condiciones del Teorema 7.3, puede que no exista un máximo o un mínimo. Esto se ve en las Figuras 7.4 a 7.6.

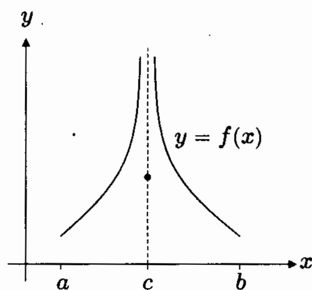


FIGURA 7.4 *f* está definida en [*a*, *b*] pero es discontinua en *x* = *c*. No existe máximo.

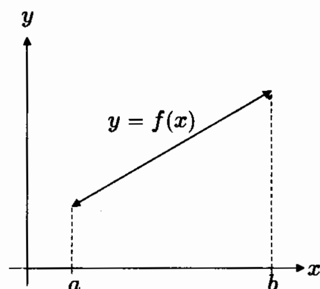


FIGURA 7.5 ***f* está definida en (*a*, *b*). *f* es continua pero no tiene máximo ni mínimo.**

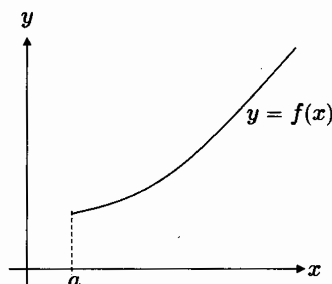


FIGURA 7.6 ***f* está definida en [*a*, ∞). *f* es continua pero no tiene máximo.**

El teorema de los valores extremos no da pistas de cómo resolver el problema de hallar los máximos y mínimos de una función. Como un resultado muy parcial, probamos aquí una condición necesaria de la existencia de punto óptimo: que en todo máximo o mínimo de una función derivable que sea interior al intervalo, la derivada sea cero. Geométricamente esto significa que la tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente sea paralela al eje x. Este resultado es muy intuitivo.

Teorema 7.4

Supongamos que f está definida en un intervalo I y sea c un punto interior de I (esto es, distinto de los puntos inicial y final). Si c es un máximo o un mínimo de f, y si existe $f'(c)$, entonces

$$f'(c) = 0 \tag{7.3}$$

Demostración: Supongamos que f tiene un máximo en c (el caso de mínimo es análogo). Si el valor absoluto de h es suficientemente pequeño, entonces $c + h \in I$ porque c es un punto interior de I. Como c es un máximo, $f(c + h) - f(c) \leq 0$. Si h es suficientemente pequeño y positivo, el cociente de Newton $[f(c+h) - f(c)]/h \leq 0$. El límite de este cociente cuando $h \to 0^+$ es por tanto ≤ 0. Como existe $f'(c)$ este límite es igual a $f'(c)$, luego $f'(c) \leq 0$. Para valores negativos de h se tiene que $[f(c+h) - f(c)]/h \geq 0$. El límite de esta expresión cuando $h \to 0^-$ es por tanto ≥ 0. Así $f'(c) \geq 0$. Así hemos probado que $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$, luego que $f'(c) = 0$.

Los puntos para los que $f'(c) = 0$ se llaman **puntos estacionarios**. En el Capítulo 9 se discute el papel esencial que desempeñan estos puntos en la teoría de la optimización.

Problemas

1 Explicar por qué la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^6 + 5x^3 - 2x + 8}{x^4 + 10}$$

para todo $x \in [0, 5]$ tiene un máximo y un mínimo. (No se deben tratar de hallar los valores correspondientes.)

2 Sea f la función definida, para todo $x \in [-1, 1]$, por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{para } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{para } x = -1 \text{ y } x = 1 \end{cases}$$

(a) ¿Tiene f máximo y mínimo en $[-1, 1]$?

(b) ¿Es continua f para todo $x \in [-1, 1]$?

3 Sea f la función definida, para todo $x \in (0, \infty)$, por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{para } x \in (0, 1] \\ 1, & \text{para } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Probar que f alcanza un máximo y un mínimo. Comprobar que, sin embargo, no se verifica *ninguna* de las condiciones del teorema de los valores extremos.

7.3 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Consideremos una función f definida en un intervalo $[a, b]$ y supongamos que tiene una gráfica conexa y sin esquinas, como la de la Figura 7.7. Como la gráfica de f une A y B por una curva conexa con tangente en cada uno de sus puntos, es geométricamente plausible que, para al menos un valor de x entre a y b, la tangente sea paralela a la recta AB. En la Figura 7.7, ξ es ese valor de x. La recta AB tiene pendiente igual a $[f(b) - f(a)]/(b - a)$. Por tanto, para que la tangente en $(\xi, f(\xi))$ sea paralela a la recta AB, se tiene que verificar que $f'(\xi) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. De hecho, se puede elegir ξ siempre de tal forma que la distancia vertical entre $(\xi, f(\xi))$ y AB sea la mayor posible. La demostración que se da a continuación se basa en este hecho.

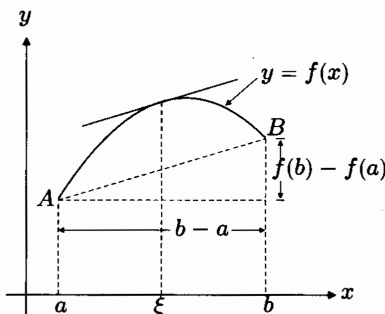


FIGURA 7.7

Este resultado, del que acabamos de dar una explicación geométrica, es uno de los grandes teoremas del análisis matemático.

Teorema 7.5 El teorema del valor medio:

Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), existe al menos un punto interior $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{7.4}$$

Demostración: Consideremos la función

$$g(x) = f(x) - f(a) - \alpha(x - a)$$

donde

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Entonces $g(a) = g(b) = 0$. La función $g(x)$ es claramente continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) puesto que f lo es. Por el teorema de los valores extremos, $g(x)$ toma un valor máximo M en un punto x^* y un valor mínimo m en un punto x_* de $[a, b]$. Como $g(a) = g(b) = 0$, ese máximo y ese mínimo deben verificar que $m \leq 0 \leq M$. Hay tres casos posibles:

1. Si $M > 0$, entonces x^* no puede ser a ni b, luego $x^* \in (a, b)$. Por el Teorema 7.4, $g'(x^*) = 0$. Tómese entonces $\xi = x^*$ para tener el resultado.
2. Si $m < 0$, entonces x_* no puede ser a ni b, luego $x_* \in (a, b)$. Por el Teorema 7.4, $g'(x_*) = 0$. Tómese entonces $\xi = x_*$.
3. Si $M = m = 0$, entonces $g(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ y así se puede tomar ξ como cualquier punto de (a, b).

En cada caso existe $\xi \in (a, b)$ tal que $g'(\xi) = f'(\xi) - \alpha = 0$ luego $f'(\xi) = \alpha$.

Es importante darse cuenta de las condiciones y la conclusión del teorema. Los ejemplos geométricos de las Figuras 7.8 a 7.10 revelan los hechos siguientes: (1) el punto ξ puede no ser único; (2) no se puede suprimir la condición de que f sea derivable en (a, b); (3) no se puede suprimir la condición de que f sea continua en $[a, b]$.

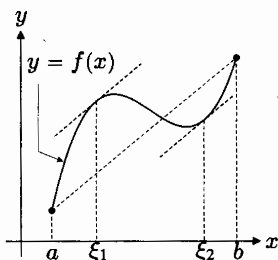


FIGURA 7.8

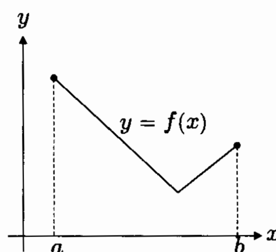


FIGURA 7.9

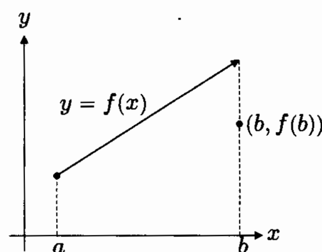


FIGURA 7.10

Ejemplo 7.3

Comprobar el teorema del valor medio para $f(x) = x^3 - x$ en $[0, 2]$.

Solución: Se tiene que

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 3 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 3x^2 - 1$$

La ecuación $f'(x) = 3$ tiene dos soluciones, $x = \pm 2\sqrt{3}/3$. Como la raíz positiva $\xi = 2\sqrt{3}/3 \in (0,2)$, se tiene que

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

Así queda comprobado el teorema del valor medio en este caso.

Hemos usado previamente las expresiones de función *creciente* y función *decreciente* para describir el comportamiento de una función cuando nos desplazamos por su gráfica, de *izquierda a derecha* (véase Figura 7.11). Para establecer una terminología definitiva damos las definiciones siguientes. Sea f una función definida en un intervalo I.

Si $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, entonces f **creciente.**

Si $f(x_1) < f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, entonces f es **estrictamente creciente.**

Si $f(x_1) \geq f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, entonces f es **decreciente.** (7.5)

Si $f(x_1) > f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, entonces f es **estrictamente decreciente.**

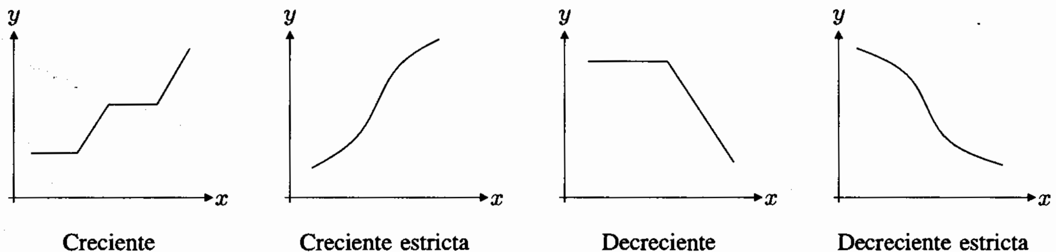


FIGURA 7.11

Nótese que estas definiciones no impiden que la gráfica de una función creciente (o decreciente) tenga tramos horizontales. Aquí hay una diferencia esencial entre esta terminología y el lenguaje popular. En efecto, ¡pocas personas dirán que su salario crece cuando permanece constante! Algunos autores reservan el término creciente para funciones estrictamente crecientes en nuestra terminología, y lo mismo para el caso de funciones decrecientes. Estos autores llaman no decreciente a una función f que verifica la propiedad de que $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todo x_1, x_2 tales que $x_1 < x_2$.

Conservaremos la terminología de (7.5), como hacen la mayor parte de los textos de matemáticas.

Para hallar en qué intervalos una función es creciente o decreciente si se usan las definiciones (7.5) hemos de estudiar necesariamente el signo de $f(x_1) - f(x_2)$ cuando $x_1 - x_2 < 0$. Normalmente es muy difícil hacer esa tarea directamente comprobando valores de $f(x)$ en puntos x distintos. Por tanto, es muy bueno que el teorema del valor medio nos proporcione un test de cuándo una función es (estrictamente) creciente o (estrictamente) decreciente. En efecto, el siguiente teorema (que es una aplicación del teorema del valor medio) nos suministra un test de crecimiento o decrecimiento para funciones derivables:

Teorema 7.6

Sea f una función continua en el intervalo I y derivable en el interior de I (esto es, en puntos distintos de los puntos incial y final).

(a) Si $f'(x) > 0$ para todo x del interior de I entonces f es estrictamente creciente en I.

(b) Si $f'(x) < 0$ para todo x del interior de I entonces f es estrictamente decreciente en I.

Demostración: Sean $x_1 < x_2$ dos números arbitrarios de I. Por el teorema del valor medio, existe un número $\xi \in (x_1, x_2)$ tal que $[f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1) = f'(\xi)$. Se tiene, por tanto,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (*)$$

Para demostrar (a), supongamos que $f'(x) > 0$ para todo x del interior de I. Entonces $f'(\xi) > 0$ y el producto $f'(\xi)(x_2 - x_1)$ es > 0. Deducimos de $(*)$ que $f(x_1) < f(x_2)$, lo que prueba que f es estrictamente creciente. La demostración de (b) es análoga —la única diferencia estriba en que hay que invertir los cuatro últimos signos de desigualdad.

Los enunciados (a) y (b) suministran condiciones suficientes para que f sea creciente o decreciente. Esas condiciones no son necesarias. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$ entonces $f'(0) = 0$. Sin embargo, f es estrictamente creciente porque, si $x_1 < x_2$, entonces $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)\left[(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right] < 0$.

Es útil notar las siguientes equivalencias lógicas en un intervalo I:

$$f'(x) \geq 0 \text{ para todo } x \text{ interior a } I \iff f \text{ es creciente en } I \qquad (7.6)$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ para todo } x \text{ interior a } I \iff f \text{ es decreciente en } I \qquad (7.7)$$

Estas condiciones se deducen directamente de la ecuación $(*)$ de la demostración anterior.

En el Capítulo 9 se dan muchos ejemplos en los que se usan las condiciones (7.6) y (7.7) para hallar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de ciertas funciones.

Nota: En exámenes de estudiantes (y en libros de economía) se ve la frase siguiente con cierta frecuencia: "Supongamos que f es estrictamente creciente —esto es $f'(x) > 0$." El ejemplo $f(x) = x^3$ demuestra que esto es erróneo. Una función puede ser estrictamente creciente aun cuando su derivada sea 0 en ciertos puntos. En efecto, supongamos que $f'(x) \geq 0$ para todo x de I y $f'(x) = 0$ únicamente en un número finito de puntos de I. Entonces $f'(x) > 0$ en todo subintervalo entre dos ceros de $f'(x)$ y así f es estrictamente creciente en cada subintervalo. De aquí se deduce que f es estrictamente creciente en el intervalo entero.

Se podría llamar "diferenciablemente creciente" a una función f cuando $f'(x) > 0$ en todo punto de su dominio.

Si $f(x)$ es una función constante es muy fácil ver que su derivada es cero en todo punto (véase (4.21), Sección 4.5). Se puede probar el recíproco usando el teorema del valor medio. Este resultado es muy intuitivo y juega un papel esencial en la teoría de la integración (Capítulo 10).

Teorema 7.7

Si $f'(x) = 0$ para todo x del interior de I, entonces f es constante en I.

Demostración: Sean x_1 y x_2 dos números reales arbitrarios de I. Por el teorema del valor medio, existe un ξ entre x_1 y x_2 para el cual se verifica la ecuación $(*)$ de la demostración del Teorema 7.6. Como ξ está entre x_1 y x_2, es un punto interior de I y así $f'(\xi) = 0$. Deducimos de la ecuación $(*)$ que $f(x_1) = f(x_2)$.

Lo anterior quiere decir que para dos puntos cualesquiera del intervalo, los valores de la función son iguales y, por tanto, la función es constante.

Problemas

1 Para las siguientes funciones determinar todos los números ξ, en los intervalos indicados, tales que $f'(\xi) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$:

(a) $f(x) = x^2$ en $[1, 2]$ (b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en $[0, 1]$

(c) $f(x) = 2/x$ en $[2, 6]$ (d) $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$ en $[0, 4]$

2 El teorema del valor medio no se verifica para las funciones siguientes en los intervalos que se indican. Explicar por qué y dibujar las gráficas de esas funciones.

(a) $y = x^{2/3}$, $x \in [-1, 1]$ (b) $y = |x - 3|$, $x \in [0, 5]$ (c) $y = 1/(x - 1)$, $x \in [0, 2]$

3 Dibujar la gráfica de $f(x) = 1 - x^{1/3}$ para $x \in [-1, 1]$. ¿Hay un número ξ en $(-1, 1)$ tal que $f'(\xi) = [f(1) - f(-1)]/(1 - (-1))$? ¿Se puede aplicar el teorema del valor medio?

4 Hay que navegar desde un punto A de un lago a un punto B. ¿Qué dice el teorema del valor medio sobre este viaje?

7.4 FÓRMULA DE TAYLOR

En la Sección 5.5 estudiamos las aproximaciones polinómicas. Según (5.11), el **polinomio de Taylor de orden** n que aproxima $f(x)$ en un entorno de $x = 0$ es

$$f(x) \approx f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \qquad (*)$$

La utilidad de estas aproximaciones polinómicas es limitada a menos que sepamos algo del error a que dan lugar. La fórmula de Taylor remedia esta deficiencia. Esta fórmula está considerada como uno de los resultados principales del análisis matemático, y los economistas la usan a menudo. Se puede deducirla a partir del teorema del valor medio.

Consideremos la aproximación en $(*)$. La función $f(x)$ y el polinomio de Taylor del miembro de la derecha son generalmente distintos salvo para $x = 0$. La diferencia entre ambos dependerá de x y de n, y se llama el *resto*. Lo designamos por $R_{n+1}(x)$. Por consiguiente,

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_{n+1}(x) \qquad (7.8)$$

El teorema que viene a continuación suministra una fórmula explícita para el resto.[2] Por razones técnicas posponemos la demostración de este teorema hasta el final de esta sección, para mayor claridad en la secuencia de la exposición.

[2] El matemático inglés Taylor había encontrado, ya en 1715, aproximaciones polinómicas de la forma general $(*)$. Lagrange demostró (7.9) aproximadamente 50 años más tarde.

Forma del resto de Lagrange

Supongamos que f es derivable $n+1$ veces en un intervalo al que pertenecen 0 y x. Entonces el resto $R_{n+1}(x)$ dado por (7.8) se puede escribir

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) x^{n+1} \tag{7.9}$$

para un cierto c entre 0 y x.

Usando esta fórmula de $R_{n+1}(x)$ en (7.8) obtenemos

Fórmula de Taylor

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)x^{n+1} \tag{7.10}$$

para un cierto c entre 0 y x

Nótese que el resto se asemeja a los términos anteriores de la suma. La única diferencia es que, en la fórmula del resto, se evalúa $f^{(n+1)}$ en un punto c (donde c es un cierto número entre 0 y x sin especificar) mientras que las derivadas de los otros términos se evalúan en 0. No se puede fijar el número c porque depende de x y de n.

Si hacemos $n = 1$ en la fórmula (7.10) obtenemos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2} f''(c)x^2 \qquad \text{para un cierto } c \text{ entre 0 y } x \tag{7.11}$$

Esta fórmula nos dice que $\frac{1}{2} f''(c)x^2$ es el error cometido al sustituir $f(x)$ por su aproximación lineal en un entorno de $x = 0$.

¿Cómo usamos la fórmula del resto? Esta fórmula da una pista sobre el límite superior del error que se comete al sustituir f por su polinomio n-ésimo de Taylor. Supongamos por ejemplo que, para todo x del intervalo I, el valor absoluto de $f^{(n+1)}(x)$ es a lo más M. Podemos deducir que, en ese intervalo,

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1} \tag{7.12}$$

Nótese que, si n es un número grande y x está próximo a 0, entonces $|R_{n+1}(x)|$ es pequeño por dos razones: primera, si n es grande, el número $(n+1)!$ del denominador de (7.12) es grande; segunda, si $|x|$ es menor que 1, $|x|^{n+1}$ es pequeño cuando n es grande.

Ejemplo 7.4

Deducir la fórmula de Taylor para $f(x) = \sqrt{x+25} = (x+25)^{1/2}$ con $n = 1$, y usarla para dar una estimación de $\sqrt{25{,}01}$.

Solución: Usamos la aproximación de (7.11). Se tiene que $f(0) = 5$ y

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x+25)^{-1/2}, \qquad f''(x) = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})(x+25)^{-3/2}$$

Así, $f'(0) = 1/2 \cdot 1/5 = 1/10$ y $f''(c) = -(1/4)(c+25)^{-3/2}$. Por tanto, por (7.11) y para un cierto c entre 0 y x, se tiene

$$\sqrt{x+25} = 5 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)(c+25)^{-3/2}x^2 = 5 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{8}(c+25)^{-3/2}x^2 \qquad (*)$$

Para estimar $\sqrt{25{,}01}$ escribimos $25{,}01 = 0{,}01 + 25$ y usamos $(*)$. Si $x = 0{,}01$, entonces c está entre 0 y 0,01, luego $c + 25 > 25$. Entonces $(c+25)^{-3/2} < (25)^{-3/2} = 1/125$, por tanto el valor absoluto del resto está acotado por

$$|R(0{,}01)| = \left|-\frac{1}{8}(c+25)^{-3/2}\left(\frac{1}{100}\right)^2\right| \le \frac{1}{80.000}\cdot\frac{1}{125} = 10^{-7}$$

Deducimos que $\sqrt{25{,}01} \approx 5 + 1/10 \cdot 1/100 = 5{,}001$ con un error menor que 10^{-7}.

Nota: Si consideramos la fórmula de Taylor en un intervalo con centro en el punto $x = a$, el resto de Lagrange es

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1} \qquad (c \text{ está entre } x \text{ y } a) \qquad (7.13)$$

Se debe añadir este término al miembro de la derecha de (5.11) para obtener la igualdad.

Fórmulas del binomio

Si se aplica la fórmula de Taylor (7.10) a

$$f(x) = (1+x)^m \qquad (*)$$

donde m es un número real arbitrario se obtienen resultados interesantes. Para $x > -1$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ll}
f'(x) = m(1+x)^{m-1}, & f'(0) = m \\
f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, & f''(0) = m(m-1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f^{(n)}(x) = m(m-1)\cdots[m-(n-1)](1+x)^{m-n}, & f^{(n)}(0) = m(m-1)\cdots[m-(n-1)]
\end{array}$$

Sustituyendo en (7.10) obtenemos

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+c)^{m-n-1}$$

Para simplificar la notación introducimos el símbolo

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \qquad (m \text{ es real y } k \text{ es un entero positivo}) \qquad (7.14)$$

Por ejemplo,

$$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3, \qquad \binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{16}$$

Vemos en particular que

$$\binom{m}{1} = m \quad \text{y} \quad \binom{m}{m} = 1$$

Usando esta notación, obtenemos la siguiente:

Fórmula del binomio de Newton (m es un número real arbitrario y n es un entero positivo):

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \cdots + \binom{m}{n}x^n + \binom{m}{n+1}x^{n+1}(1+c)^{m-n-1} \tag{7.15}$$

para un cierto c entre 0 y x con $x > -1$.

Se puede probar que, para $|x| < 1$, el resto tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Por ejemplo, se puede usar la fórmula (7.15) para calcular la raíz n-ésima de un número.

Ejemplo 7.5

Calcular $\sqrt[3]{1{,}1}$ con 3 decimales exactos.

Solución: Aplicamos (7.15) con $x = 0{,}1$, $m = 1/3$ y $n = 2$. La elección de n se ha hecho por prueba y error. Tenemos que

$$\sqrt[3]{1{,}1} = 1 + \binom{1/3}{1}(0{,}1) + \binom{1/3}{2}(0{,}1)^2 + \binom{1/3}{3}(0{,}1)^3(1+c)^{1/3-2-1}$$
$$= 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{900} + \frac{1}{16.200}\frac{1}{(1+c)^{8/3}}$$

para un cierto c entre 0 y 0,1. El último término es el resto $R_3(0{,}1)$ y

$$|R_3(0{,}1)| = \frac{1}{16.200}\frac{1}{(1+c)^{8/3}} < \frac{1}{16.200} \approx 0{,}000061728$$

porque $(1+c)^{8/3} > 1$ cuando $c \in (0\,,\,0{,}1)$. Así tenemos que $\sqrt[3]{1{,}1} \approx 1+1/30-1/900 = 1{,}032$ con tres decimales exactos.

El binomio de Newton para exponentes enteros positivos

Se usa a menudo la fórmula (7.15) en el caso en que m sea un entero positivo. De (7.14) deducimos que, si $k > m$, entonces $m - m = 0$ es un factor de $\binom{m}{k}$. Por tanto, $\binom{m}{k}$ vale 0 para todo par de enteros positivos tales que $k > m$. De (7.15) con $n = m$ deducimos que

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m$$

Haciendo $x = b/a$ y multiplicando por a^m obtenemos lo siguiente:

Fórmula del binomio de Newton (m es un entero positivo):

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \cdots + \binom{m}{m}b^m \tag{7.16}$$

Se estudia esta fórmula más profundamente en la Sección B.2, Apéndice B.

Nota: Para la mayoría de las funciones, la fórmula de Taylor conduce a aproximaciones polinómicas cuyos términos de error son pequeños siempre que el grado del polinomio sea suficientemente alto. Esto no se verifica para todas las funciones. Se da un ejemplo en el Problema 10 de la Sección 8.3.

Demostración de la fórmula (7.9) del resto de Lagrange:

Comenzamos demostrando la fórmula para $n = 1$. Esto significa que queremos probar la fórmula (7.11). Para $x \neq 0$ definamos la función $S(x)$ implícitamente mediante la ecuación

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}S(x)x^2 \tag{1}$$

Si probamos que existe un número c entre 0 y x tal que $S(x) = f''(c)$, entonces quedará demostrada (7.11). Mantengamos fijo x y definamos la función g por

$$g(t) = f(x) - [f(t) + f'(t)(x-t) + \tfrac{1}{2}S(x)(x-t)^2] \tag{2}$$

para todo t entre 0 y x. Entonces (1) y (2) implican que $g(0) = f(x) - [f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}S(x)x^2] = 0$ y que $g(x) = f(x) - [f(x) + 0 + 0] = 0$. Por el teorema del valor medio (Teorema 7.5), existe un número c estrictamente comprendido entre 0 y x tal que $g'(c) = 0$. Derivando (2) con respecto a t con x fijo obtenemos

$$g'(t) = -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + S(x)(x-t)$$

Así,

$$g'(c) = -f''(c)(x-c) + S(x)(x-c)$$

Como $g'(c) = 0$ y $c \neq x$, se deduce que $S(x) = f''(c)$ y queda probada (7.11).

La demostración en el caso general se basa en la misma idea, con $S(x)$ y $g(t)$ definidas generalizando (1) y (2) de la manera obvia (véanse Problemas 4 y 5).

Problemas

1 Escribir la fórmula de Taylor (7.10) con $n = 2$ para $f(x) = 1/(1+x)$.

2 Usar la aproximación $(1+x)^m \approx 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2$ para hallar valores de (a) $\sqrt[3]{25}$ y (b) $\sqrt[5]{33}$. Comprobar esas aproximaciones usando una calculadora. (*Indicación:* Nótese que $\sqrt[3]{25} = 3(1-2/27)^{1/3}$.)

3 Probar que $\sqrt[3]{9} = 2\left(1+1/8\right)^{1/3}$. Usar la fórmula (7.15) (con $n = 2$) para calcular $\sqrt[3]{9}$ con tres cifras decimales exactas.

Problemas avanzados

4 Demostrar (7.9) para $n = 2$ de la forma siguiente. Definir $S(x)$ implícitamente, para $x \neq 0$, por

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}S(x) \tag{1}$$

Definir además la función g por

$$g(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{x-t}{1!}f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) + \frac{(x-t)^3}{3!}S(x)\right] \tag{2}$$

para $t \in [0, x]$. Probar que $g(0) = g(x) = 0$, que g es derivable en $(0, x)$ y que $g'(t) = -\frac{1}{2}(x - t)^2[f'''(t) - S(x)]$. Por tanto, existe un número $c \in (0, x)$ tal que $g'(c) = 0$. Probar que la conclusión se deduce de esto.

5 Generalizar la demostración de (7.9) que se da en el Problema 4 de tal manera que sea válida para un número natural arbitrario n.

7.5 FORMAS INDETERMINADAS Y REGLA DE L'HÔPITAL

A menudo necesitamos hallar el límite, cuando x tiende a a, de un cociente cuyo numerador y denominador tienden a 0. Entonces escribimos:[3]

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0} \tag{1}$$

Un límite de esta clase se llama una **forma indeterminada de tipo “0/0”**. Se puede sustituir a por a^+, a^- ó $\pm\infty$. La locución “forma indeterminada” quiere decir que no se puede hallar el límite sin un análisis más fino. Ya hemos calculado varios límites de esta clase. En el Ejemplo 4.10(c) de la Sección 4.4 usamos un viejo artificio y las reglas de los límites para deducir que

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{4\sqrt{x} - 8} = 8$$

Hay un método estándar para el tratamiento sistemático de esas formas indeterminadas, que se llama la **regla de l'Hôpital**.

Comenzamos con el caso sencillo en que tenemos una forma indeterminada (1) con f y g derivables y $f(a) = g(a) = 0$. Cuando $x \neq a$ y $g(x) \neq g(a)$, un cálculo rutinario prueba que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{[f(x) - f(a)]/(x-a)}{[g(x) - g(a)]/(x-a)}$$

Cuando $x \to a$, el numerador y el denominador de la fracción del lado derecho de la igualdad anterior tienden a $f'(a)$ y $g'(a)$ respectivamente (véase Problema 5 de la Sección 4.5). Por tanto, siempre que $g'(a) \neq 0$, el límite es $f'(a)/g'(a)$. De aquí la

Regla de l'Hôpital (versión sencilla)

Si f y g son derivables en a, si $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{7.17}$$

Usando (7.17) podemos hallar el límite de una forma indeterminada del tipo “0/0” derivando numerador y denominador separadamente.

[3] Nos permitimos en esta sección escribir “0/0” (entrecomillado) para representar al tipo particular de indeterminación que estamos discutiendo.

Ejemplo 7.6

Usar (7.17) para calcular

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8}$$

Solución: Ponemos $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = 4\sqrt{x} - 8$. Por tanto, $f(4) = g(4) = 0$, $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 2/\sqrt{x}$. Así se deduce de (7.17) que

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \frac{f'(4)}{g'(4)} = \frac{8}{1} = 8$$

Nótese que es mucho más fácil usar (7.17) para calcular ese límite que lo que hemos usado para resolver el Ejemplo 4.10(c).

Ejemplo 7.7

Calcular

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x-3}}{x-7}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x-3}}{x-7} &= \frac{2-2}{7-7} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}\\ &= \lim_{x\to 7} \frac{\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} - \frac{1}{2}(x-3)^{-1/2}}{1}\\ &= \frac{1}{3}(8^{-2/3}) - \frac{1}{2}(4^{-1/2}) = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene de la regla de l'Hôpital.

Supongamos que tenemos una forma “0/0” como en (7.17), pero que $f'(a)/g'(a)$ es también del tipo “0/0”. Como $g'(a) = 0$, la fórmula (7.17) falla. ¿Qué hay que hacer? La respuesta es que hay que derivar otra vez numerador y denominador separadamente. Si obtenemos de nuevo una expresión del tipo “0/0”, continuamos derivando numerador y denominador hasta que se obtenga el límite (si esto es posible). Damos un ejemplo.

Ejemplo 7.8

Hallar

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}{x^3-2x^2-4x+8}$$

Solución: El numerador y el denominador valen 0 para $x = 2$. Aplicando la regla de l'Hôpital dos veces, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}{x^3-2x^2-4x+8} &= \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^3-12x^2+10x-4}{3x^2-4x-4} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{12x^2-24x+10}{6x-4} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Nota: Damos unas advertencias importantes relativas a los errores más comunes que se cometen al aplicar la regla de l'Hôpital:

1. Comprobar que se tiene realmente una forma indeterminada; si no es así, el método da normalmente un resultado equivocado (véase Problema 3).

2. No debe derivarse f/g como una fracción, sino que se debe calcular f'/g'.

El método que hemos explicado aquí y que hemos usado para resolver el Ejemplo 7.8 está basado en el teorema que sigue. Nótese que las hipótesis sobre f y g son más débiles de lo que pueda haber aparecido en los ejemplos precedentes. Por ejemplo, f y g no necesitan ser derivables en $x = a$. Para una demostración puede verse Bartle (1976), por ejemplo.

Teorema 7.8 Regla de l'Hôpital para formas "0/0"

Supongamos que f y g son derivables en un intervalo (α, β) centrado en a, excepto posiblemente en a, y supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ tienden a 0 cuando x tiende a a. Si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ en (α, β), y si $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L$ (L finito, $L = \infty$, ó $L = -\infty$), entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{7.18}$$

Extensiones de la regla de l'Hôpital

La regla de L'Hôpital se puede extender a otros casos. Por ejemplo, a puede ser un extremo del intervalo (α, β). Así se puede sustituir $x \to a$ por $x \to a^+$ ó $x \to a^-$. También es fácil ver que se puede sustituir a por ∞ ó $-\infty$ (véase Problema 6). La regla se aplica también a otras formas indeterminadas como "$\pm\infty / \pm\infty$", aunque la demostración es más complicada (véase Problema 8 y Bartle (1976)). Un ejemplo trivial es el siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - 3x^2}{5x^2 + x - 1} = \frac{\text{“}-\infty\text{”}}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{10x + 1} = \frac{\text{“}-\infty\text{”}}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$

Además, otras formas indeterminadas se pueden transformar en expresiones del tipo que hemos mencionado, por medio de sustituciones o cálculos algebraicos.

Ejemplo 7.9

Calcular

$$L = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[5]{x^5 - x^4} - x)$$

Solución: Transformamos este caso de la forma "$\infty - \infty$" en uno del tipo "0/0" mediante un poco de cálculo algebraico. Nótese primero que, para $x \neq 0$,

$$\sqrt[5]{x^5 - x^4} - x = \left[x^5(1 - 1/x)\right]^{1/5} - x = x(1 - 1/x)^{1/5} - x$$

Así,

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt[5]{x^5 - x^4} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(1 - 1/x)^{1/5} - 1}{1/x} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0}$$

Usando la regla de l'Hôpital tenemos

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{(1/5)(1 - 1/x)^{-4/5}(1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-4/5}\right] = -\frac{1}{5}$$

Después de definir las funciones exponenciales y logarítmicas en el Capítulo 8 podremos estudiar muchos más ejemplos interesantes de formas indeterminadas.

Problemas

1 Usar la regla de l'Hôpital para hallar los límites siguientes:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ (c) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$

2 Hallar los límites siguientes:

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4-4x^3+6x^2-8x+8}{x^3-3x^2+4}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2\sqrt{1+x+x^2}-2-x}$

3 Detectar el error cometido en el siguiente cálculo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{2x^2-2x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+3}{4x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es el valor correcto del primer límite?

4 Sean β y γ constantes positivas. Hallar

$$\lim_{v\to 0^+} \frac{1-(1+v^\beta)^{-\gamma}}{v}$$

(Considérense separadamente los tres casos $\beta = 1$, $\beta > 1$ y $\beta < 1$.)

5 Discutir el límite siguiente para los distintos valores de las constantes a, b, c y d, suponiendo que b y d son positivos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}}{x}$$

Problemas avanzados

6 Supongamos que f y g son derivables para todo x grande, que $f(x)$ y $g(x)$ tienden a 0 cuando $x \to \infty$ y que $\lim_{x\to\infty} g'(x) \neq 0$. Probar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

poniendo $x = 1/t$ en la primera fracción y usando luego la regla de l'Hôpital cuando $t \to 0^+$.

7 Siguiendo el método que usamos para resolver el Problema 7.9, probar que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n} - x \right) = \frac{a_1}{n}$$

8 Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) =$ “$\pm\infty/\pm\infty$” $= L$. Aplicando la regla de l'Hôpital al límite equivalente $\lim_{x\to a} [1/g(x)]/[1/f(x)] =$ “0/0”, probar que $L = \lim_{x\to a}[f'(x)/g'(x)]$ siempre que ese límite exista y sea distinto de cero.

7.6 FUNCIONES INVERSAS

En esta Sección se estudian con más detenimiento las funciones inversas de una variable. Las habíamos visto brevemente en la Sección 3.6. Comenzamos con un problema económico.

Ejemplo 7.10

Supongamos que la cantidad demandada D de un bien depende del precio unitario p según la fórmula

$$Dp^{1/3} = 30 \qquad (p > 0, D > 0) \tag{1}$$

Para la mayoría de la gente, parece natural resolver la ecuación (1) en D. El resultado es

$$D = \frac{30}{p^{1/3}} = 30p^{-1/3} \tag{2}$$

lo que nos da directamente la demanda D que corresponde a un precio dado p. Si, por ejemplo, $p = 27$, entonces $D = 30/27^{1/3} = 10$. Así D es función de p, o sea $D = f(p)$ con $f(p) = 30/p^{1/3}$.

Si consideramos la cuestión desde el punto de vista de la empresa, puede ser lo más natural pensar que la cantidad producida y vendida sea algo que se pueda elegir libremente y considerar el precio resultante. De la ecuación (1) se obtiene que $p^{1/3} = 30/D$ y así $(p^{1/3})^3 = (30/D)^3$. Por tanto (1) es equivalente a

$$p = \frac{27.000}{D^3} = 27.000D^{-3} \tag{3}$$

Esta ecuación nos da directamente el precio p correspondiente a una cantidad producida y vendida dada D. Por ejemplo, si $D = 10$, entonces $p = 27.000/10^3 = 27$. En este caso, p es una función $g(D)$ de D, con $g(D) = 27.000/D^3$.

Las dos variables D y p de este ejemplo están relacionadas de tal forma que cada una de ellas puede considerarse como función de la otra. Las dos funciones

$$f(p) = 30p^{-1/3} \qquad \text{y} \qquad g(D) = 27.000\,D^{-3} \tag{4}$$

se llaman *inversas* la una de la otra. También se dice que f es la inversa de g y que g es la inversa de f.

Definición general

Dada una función f definida en un dominio A de números reales, a veces necesitamos encontrar su inversa en caso de que exista. Recuérdese que, si f tiene dominio A, entonces el rango de f es el conjunto $B = \{f(x) : x \in A\}$, que se designa por $f(A)$. El rango B consta de todos los números $f(x)$ que se obtienen al hacer que x varíe en A. Además, f es **inyectiva** en A si f no toma el mismo valor en puntos distintos de A. En otras palabras, f es inyectiva en A si verifica que, cualesquiera que sean x_1 y x_2 de A con $x_1 \neq x_2$, es $f(x_1) \neq f(x_2)$. Es evidente que, si una función es estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) en todo A, entonces es inyectiva. Las Figuras 7.12 y 7.13 contienen ejemplos de una función inyectiva f y de una g que no lo es, respectivamente.

Definición de función inversa

Sea f una función con dominio A y rango B. Si f es inyectiva (y sólo entonces), tiene una **función inversa** g con dominio B y rango A. Se define la función g por la relación siguiente: Para cada $y \in B$, el valor $g(y)$ es el único número x de A tal que $f(x) = y$. Así

$$g(y) = x \iff y = f(x) \qquad (x \in A,\; y \in B) \tag{7.19}$$

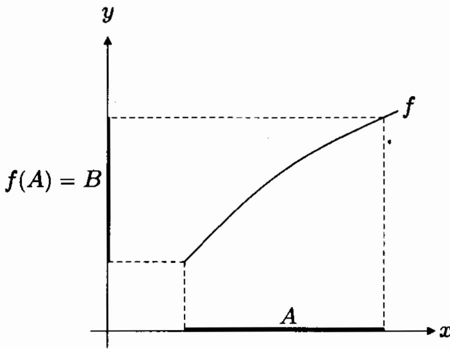


FIGURA 7.12 ***f*** **es inyectiva con dominio** ***A*** **y rango** ***B*****.** ***f*** **tiene inversa.**

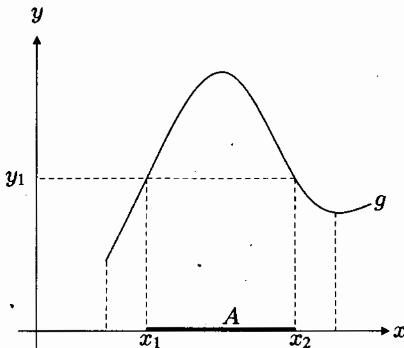


FIGURA 7.13 ***g*** **no es inyectiva, luego no tiene inversa en** ***A*****. ¿Qué valor de** ***x*** **está asociado a** y_1**?**

Si se sustituye y por $f(x)$ en la ecuación de la izquierda de (7.19) para construir $g(f(x))$ y x por $g(y)$ en la de la derecha para construir $f(g(y))$, se obtiene la siguiente consecuencia directa de (7.19):

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \in A \qquad \text{y} \qquad f(g(y)) = y \text{ para todo } y \in B \tag{7.20}$$

La ecuación $g(f(x)) = x$ dice que, si primero aplicamos f a x y luego g a $f(x)$, entonces volvemos a obtener x. En otras palabras podemos decir que *g deshace lo que f hace con x*. Como ilustración vamos a comprobar que esto es cierto para el par de funciones dadas en (4) del Ejemplo 7.10. En efecto, se tiene que

$$g(f(p)) = g\left(30p^{-1/3}\right) = \frac{27.000}{\left(30p^{-1/3}\right)^3} = \frac{27.000}{27.000p^{-1}} = p$$

(Pruébese también que $f(g(D)) = D$.)

Nota: A menudo se usa la notación f^{-1} para la inversa de f. Sin embargo, esta notación puede inducir a un error comprensible. Si a es un número, entonces a^{-1} significa $1/a$. Sin embargo, $f^{-1}(x)$ *no* quiere decir $1/f(x)$. Por ejemplo: *Las funciones definidas por las ecuaciones* $y = 1/(x^2 + 2x + 3)$ *e* $y = x^2 + 2x + 3$ **no** *son inversas la una de la otra, sino recíprocas.* De hecho, $1/f(x)$ se designa generalmente por $[f(x)]^{-1}$.

En casos sencillos podemos usar el mismo método del ejemplo introductorio para hallar la inversa de una función (y así comprobar automáticamente que existe esa inversa). Damos algunos ejemplos más.

Ejemplo 7.11

Resolver las ecuaciones siguientes en x y hallar las funciones inversas correspondientes:

$$\text{(a)}\quad y = 4x - 3 \qquad \text{(b)}\quad y = \sqrt[5]{x+1} \qquad \text{(c)}\quad y = \frac{3x-1}{x+4}$$

Solución:

(**a**) Resolviendo la ecuación en x tenemos las equivalencias siguientes para todo x y todo y:

$$y = 4x - 3 \iff 4x = y + 3 \iff x = \tfrac{1}{4}y + \tfrac{3}{4}$$

Se deduce que $f(x) = 4x - 3$ y $g(y) = y/4 + 3/4$ son inversas la una de la otra.

(**b**) También resolvemos la ecuación en x en este caso. Comenzamos elevando a la quinta potencia cada miembro de la ecuación y así obtenemos las equivalencias lógicas

$$y = \sqrt[5]{x+1} \iff y^5 = x + 1 \iff x = y^5 - 1$$

Como esas equivalencias valen para todo x, y, hemos probado que $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$ y $g(y) = y^5 - 1$ son inversas la una de la otra.

(**c**) Resolvemos la ecuación en x multiplicando primero ambos miembros por $x + 4$:

$$y(x+4) = 3x - 1$$

De esta ecuación se obtiene que

$$yx + 4y = 3x - 1 \qquad \text{ó} \qquad x(3-y) = 4y + 1$$

Por tanto,

$$x = \frac{4y+1}{3-y}$$

Deducimos que $f(x) = (3x-1)/(x+4)$ y $g(y) = (4y+1)/(3-y)$ son inversas la una de la otra. Obsérvese que f está definida solamente $x \neq -4$ y g sólo lo está para $y \neq 3$. Así, la equivalencia (7.19) es válida sólo con estas restricciones.

En todos los ejemplos con los que hemos trabajado se puede expresar la inversa con una fórmula conocida. Ocurre a menudo que, aun cuando una función tenga inversa, pueda resultar imposible expresarla en términos de una función que conozcamos. *Las funciones inversas son una fuente importante de nuevas funciones.*

Supongamos que una función derivable f está definida en un intervalo I. ¿Cómo podemos saber si f tiene inversa en los casos en que no podemos resolver la ecuación $y = f(x)$ en x? El siguiente criterio es fácil de usar:

Si f es derivable, entonces f tiene inversa en I cuando: bien (a) $f'(x) > 0$ para todo x del intervalo I; bien (b) $f'(x) < 0$ para todo x de I.	(7.21)

El razonamiento es sencillo: si $f'(x) > 0$ (< 0) para todo x, entonces f es estrictamente creciente (decreciente) y así es inyectiva. Nótese que la conclusión en (7.21) es válida si $f'(x) > 0$ excepto para un número finito de puntos (véase la Nota al Teorema 7.6). Nótese además que (7.21) es suficiente para que f tenga inversa, pero no necesaria; en efecto, $y = x^3$ tiene inversa $x = \sqrt[3]{y}$ aun cuando $dy/dx = 0$ en $x = 0$.

Ejemplo 7.12

Probar que la función f definida por

$$f(x) = 3x^9 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

para todo x tiene una inversa.

Solución: Derivando $f(x)$ se obtiene

$$f'(x) = 27x^8 + 3x^2 - 12x + 12 = 27x^8 + 3(x-2)^2$$

Se ve que $f'(x) > 0$ para todo x. Según (7.21) f tiene inversa. Esto quiere decir que la ecuación $y = 3x^9 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ define a x como función de y. En este caso, sin embargo, es imposible hallar una fórmula explícita de x en términos de y; la inversa se puede aproximar sólo numéricamente.

Caracterización geométrica de las funciones inversas

En el ejemplo introductorio, vimos que $f(p) = 30p^{-1/3}$ y $g(D) = 27.000D^{-3}$ eran funciones inversas la una de la otra. Era natural describir las funciones como lo hicimos a causa de la interpretación concreta de los símbolos p y D.

En otras circunstancias puede ser conveniente usar la misma variable como argumento en f y g. En el Ejemplo 7.11(a) vimos que $f(x) = 4x - 3$ y $g(y) = \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$ eran inversas la una de la otra. Si usamos x, en lugar de y, como la variable de la función g, escribimos que

$$f(x) = 4x - 3 \quad \text{y} \quad g(x) = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4} \quad \text{son inversas la una de la otra} \qquad (*)$$

De la misma forma, en el Ejemplo 7.11(b) escribimos

$$f(x) = (x+1)^{1/5} \quad \text{y} \quad g(x) = x^5 - 1 \quad \text{son inversas la una de la otra} \qquad (**)$$

Las gráficas de funciones inversas tienen una propiedad geométrica interesante. Para los pares de funciones inversas de $(*)$ y $(**)$ vemos que las gráficas de f y g son simétricas respecto de la recta $y = x$. En otras palabras, una es imagen de la otra en el espejo rectilíneo de ecuación $y = x$ (véanse Figuras 7.14 y 7.15).

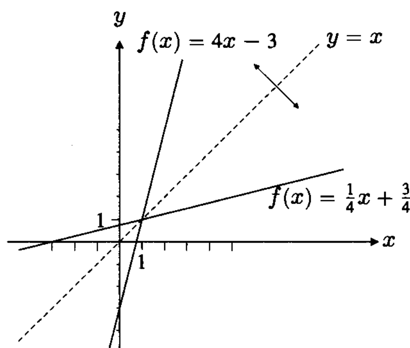


FIGURA 7.14

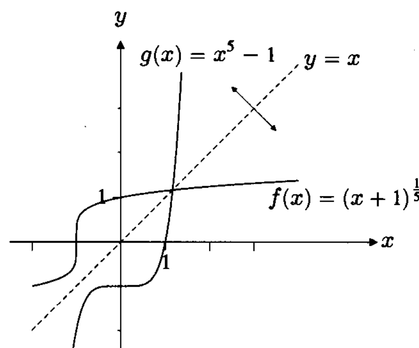


FIGURA 7.15

En general, supongamos que f y g son inversas la una de la otra. El que (a, b) esté en la gráfica de f quiere decir que $b = f(a)$. Por (7.19), se tiene que $g(b) = a$, luego que (b, a) está en la gráfica de g. Como (a, b) y (b, a) son simétricos respecto de la $y = x$ (véase Problema 8), hemos llegado a la siguiente conclusión:

Cuando dos funciones f y g son inversas la una de la otra, las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$. (Esto sólo es cierto si las unidades son las mismas para ambos ejes coordenados.) (7.22)

Nota: Si f y g son inversas la una de la otra, por la definición (7.19) las ecuaciones $y = f(x)$ y $x = g(y)$ son equivalentes. Representan exactamente la misma gráfica. Por otra parte, las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Sea f una función inyectiva definida en el intervalo I. Entonces f tiene una inversa g. ¿Qué propiedades de f "hereda" g? Si nos basamos en la intuición geométrica, la respuesta es simple: como las gráficas de f y g son simétricas respecto $y = x$, g hereda la continuidad y derivabilidad de f (excepto en los puntos en que $f'(x) = 0$).

¿Qué relación existe entre las derivadas de f y g? *Supongamos* que f y g son derivables. Podemos derivar la identidad $g(f(x)) = x$ con respecto a x por la regla de la cadena. El resultado es $g'(f(x))f'(x) = 1$. Cuando $f'(x) \neq 0$ se puede despejar $g'(f(x))$ y así tenemos

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{7.23}$$

donde $y = f(x)$. Si $f'(x) = 0$, la gráfica de g tiene tangente vertical en (y, x) y g *no* es derivable en y.

De (7.23) se deduce que f' y g' tienen el mismo signo. Así, o las dos funciones son estrictamente crecientes, o son estrictamente decrecientes.

Los resultados anteriores han sido basados en parte en ideas geométricas intuitivas. Enunciamos los hechos más importantes en el teorema siguiente:

Teorema 7.9 Teorema de la función inversa

Si f es continua y estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) en el intervalo I, entonces f tiene una inversa g que es continua y estrictamente creciente (estrictamente decreciente) en el intervalo $f(I)$. Si x_0 es un punto interior de I y f es derivable en x_0 con $f'(x_0) \neq 0$, entonces g es derivable en el punto $y_0 = f(x_0)$ (que es interior a $f(I)$) y

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{7.24}$$

Nota: Se usa la fórmula (7.24) para hallar la derivada de g en un punto y_0 de la forma siguiente: Hállese primero, si es posible, el punto x_0 de I en el cual $f(x_0) = y_0$. Luego calcúlese $f'(x)$ y de ahí $f'(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$, entonces g tiene derivada en y_0, que es $g'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1}$.

Ejemplo 7.13

Usar la fórmula (7.24) para hallar $g'(-8)$ si g es la inversa de la función

$$f(x) = 3x^9 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

estudiada en el Ejemplo 7.12. (Nótese que $f(0) = -8$.)

Solución: Por la fórmula (7.24) con $x_0 = 0$ e $y_0 = -8$, como $f'(0) = 12$, obtenemos $g'(-8) = 1/f'(0) = 1/12$. Nótese que hemos hallado $g'(-8)$ aun cuando es imposible encontrar una fórmula explícita para la función g.

En los ejemplos que hemos estudiado ha sido fácil hallar dominios y los rangos de los pares de funciones f y g. A veces habrá que tener mucho cuidado al hallar la inversa. Si usamos x como variable independiente para ambas funciones, hacemos lo que sigue para hallar la inversa de una función f definida en un intervalo I:

Cómo hallar la inversa de una función :

1. Escribir la ecuación que define la función

$$y = f(x)$$

2. Intercambiar x e y para obtener (7.25)

$$x = f(y)$$

3. Resolver la ecuación $x = f(y)$ respecto de y en términos de x (si es posible), con $x \in f(I)$ e $y \in I$. Si la solución $y = g(x)$ es siempre única, entonces la función g es la inversa.

Consideremos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 7.14

Hallar la inversa de $y = x^{p/q}$ (definida para $x > 0$), donde p y q son enteros.

Solución: La regla (7.25) nos da

$$(a) \quad y = x^{p/q} \qquad (b) \quad x = y^{p/q} \qquad (c) \quad y = x^{q/p}$$

La inversa de $y = x^{p/q}$ es entonces $y = x^{q/p}$.

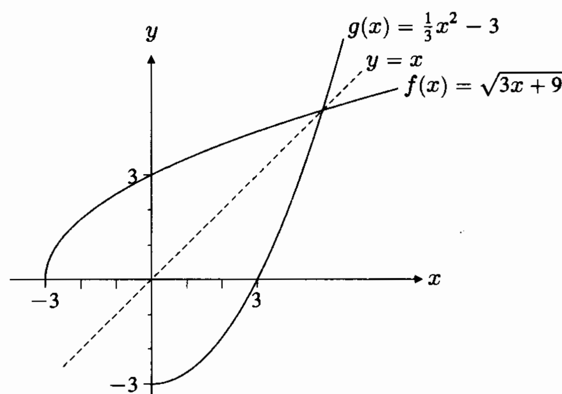


FIGURA 7.16

Ejemplo 7.15

Demostrar que la función $f(x) = \sqrt{3x+9}$, definida en el intervalo $[-3, \infty)$, tiene inversa y hallar una fórmula para la inversa (véase Figura 7.16.)

Solución: Tenemos que $f'(x) = 3/2(\sqrt{3x+9}) > 0$ para todo $x > -3$, luego f es estrictamente creciente en el intervalo $[-3, \infty)$ (véase Teorema 7.6). Nótese que el rango de f es $[0, \infty)$. Así f tiene inversa g definida en $[0, \infty)$. Para hallar la fórmula de la inversa usamos de nuevo la regla (7.25):

(a) $y = \sqrt{3x+9}$ (b) $x = \sqrt{3y+9}$ (c) $x^2 = 3y + 9$, esto es $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$

Así la función inversa es $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$ definida en $[0, \infty)$. Las gráficas de f y g son las de la Figura 7.16.

Problemas

1 La demanda D como función del precio p viene dada por

$$D = \frac{32}{5} - \frac{3}{10}p$$

Resolver la ecuación en p y hallar la función inversa.

2 H. Schultz calculó que la demanda D de azúcar en EE.UU. en función del precio p, durante el periodo 1915–1929, estaba descrita por la siguiente expresión:

$$D = f(p) = \frac{157{,}8}{p^{0{,}3}} \qquad (D \text{ y } p \text{ están medidos en unidades adecuadas})$$

Resolver la ecuación en p, hallando la inversa de f.

3 Hallar las inversas de las funciones siguientes:

(a) $y = -3x$ (b) $y = 1/x$ (c) $y = x^3$

Comprobar la validez de (7.20) en cada caso.

4 ¿Por qué no tiene inversa la función $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$? Probar que la restricción de f a $[0, \infty)$ tiene inversa y hallarla.

5 Usar el método de (7.25) para calcular las inversas de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = (x^3 - 1)^{1/3}$ (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ (c) $f(x) = (1 - x^3)^{1/5} + 2$

6 Probar que la función siguiente tiene una inversa g:

$$f(x) = x^7 + 5x^5 + 2x - 2$$

Calcular $g'(-2)$ usando (7.24). (*Indicación:* $f(0) = -2$.)

7 Sea f la función definida por $f(x) = 2x^2 - x^4$ en el intervalo $[0, 1]$.

(a) Hallar el rango de f.

(b) Probar que f tiene una inversa g y dar una fórmula para g.

8 (a) Dibujar un sistema de coordenadas en el plano. Probar que los puntos $(3, 1)$ y $(1, 3)$ son simétricos respecto de la recta $y = x$, y lo mismo para $(5, 3)$ y $(3, 5)$.

(b) Usar las propiedades de los triángulos semejantes para demostrar que los puntos (a, b) y (b, a) del plano son simétricos respecto de la recta $y = x$.

9 Formalizar los enunciados siguientes:

(a) Doblar y hacer mitades son operaciones inversas.

(b) La operación de multiplicar un número por 3 y restar 2 al resultado es la inversa de la operación de sumar 2 al número y dividir por 3 el resultado.

(c) La operación de restar 32 a un número y multiplicar por 5/9 el resultado es la inversa de la operación de multiplicar al número por 9/5 y sumar 32 al resultado (véase el Problema 4 de la Sección 1.3).

10 Dibujar la gráfica de una función f que sea inyectiva, pero ni estrictamente creciente ni estrictamente decreciente. (*Indicación:* f no puede ser continua.)

11 Si f es la función que expresa cuántos kilogramos de carne se pueden comprar con una cierta cantidad de dinero, ¿qué significa f^{-1}?

12 Supongamos que f y g son derivables dos veces e inversas la una de la otra, luego $f(g(x)) = x$ para todo x. Hallar g'' en términos de f' y f''. Probar que, si $f' > 0$, entonces f'' y g'' tienen signos opuestos. Probar que, si $f' < 0$, entonces f'' y g'' tienen el mismo signo.

13 Explicar por qué la función f definida en $[0, \sqrt{3}]$ por

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3\sqrt{4 - x^2}$$

tiene una inversa g. Calcular $g'(\tfrac{1}{3}\sqrt{3})$. (*Indicación:* $f(1) = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$.)

Problemas avanzados

14 Hallar la inversa de $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = (x+1)^{1/2} + (x-1)^{1/2}$ definida para $x \geq 1$.

8

Funciones exponenciales y logarítmicas

Deberías haber dado mi dinero a los banqueros.
Así, a mi vuelta, yo hubiera recibido
lo que era mío, con sus intereses.
—*Mateo 25:27*

En la Sección 3.5 hemos estudiado brevemente las funciones exponenciales de la forma a^x. Demostramos que eran especialmente adecuadas para describir ciertos fenómenos económicos, como el crecimiento de la población y el interés compuesto. En este capítulo se enseña a derivar estas funciones. Además se introducen las funciones logarítmicas, que son las inversas de las funciones exponenciales. Mediante los logaritmos se puede dar una definición alternativa de elasticidad.

8.1 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Recuérdese que la función exponencial de base a es

$$f(x) = a^x$$

donde a es el factor por el que varía $f(x)$ cuando x crece en una unidad. Cada base a suministra una función exponencial distinta. En matemáticas hay un valor particular de a que da origen a una función exponencial muchísimo más importante que las otras. Se puede uno imaginar que este caso muy especial es el de $a = 2$ ó $a = 10$, pero no es así. Aunque parezca muy extraño, la base de la función exponencial más importante es un número irracional ligeramente mayor que 2,7.

Para explicar por qué, hay que estudiar la derivada de $f(x) = a^x$. Las reglas de derivación anteriores no nos sirven para este caso. Por tanto, nos basamos en la definición de derivada y consideramos el cociente de Newton de $f(x) = a^x$, que es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \qquad (*)$$

Si esta fracción tiene límite cuando h tiende a 0, entonces $f(x) = a^x$ es derivable y $f'(x)$ es igual a ese límite.

Haciendo $x = 0$ y $h \to 0$ en $(*)$ se obtiene, en particular,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \tag{8.1}$$

(siempre que exista el límite).

Se puede simplificar la fracción de $(*)$ si usamos la regla $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$. Entonces se tiene $a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$, luego

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

Tomando el límite de esta expresión cuando h tiende a 0, el término a^x es constante mientras que, según (8.1), la fracción $(a^h - 1)/h$ tiende a $f'(0)$. Por tanto,

$$f(x) = a^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = a^x f'(0) \tag{8.2}$$

Hemos probado así que, si $f(x) = a^x$ tiene derivada en 0 (en el sentido de que existe el límite en (8.1)), entonces f es derivable para todo x y $f'(x) = a^x f'(0)$.

Nota: Obsérvese que $f'(0)$ es función de a. Para cada $a > 0$, se ha definido el número $f'(0)$ como el límite de $(a^h - 1)/h$ cuando h tiende a 0. Se puede probar que existe este límite para todo $a > 0$. Veremos más tarde que $f'(0) = \ln a$, el logaritmo natural de a.

La interpretación geométrica de $f'(0)$ es la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = a^x$ en $(0, 1)$. Hemos medido estas pendientes para 2^x y 3^x en las Figuras 8.1 y 8.2 encontrando, respectivamente, $\approx 0{,}7$ y $\approx 1{,}1$. (Según esto, (8.2) implica que $f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) \approx 0{,}7 \cdot 2^x$ y $f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) \approx 1{,}1 \cdot 3^x$.)

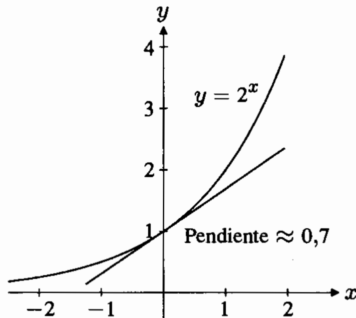


FIGURA 8.1

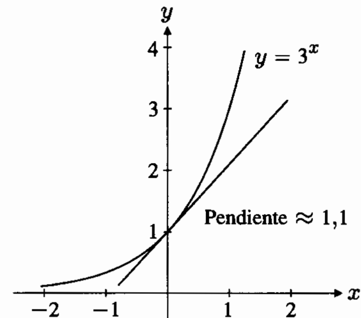


FIGURA 8.2

Es razonable suponer que, cuando a varía de 2 a 3, $f'(0)$ crece entre $\approx 0{,}7$ y $\approx 1{,}1$ tomando todos los valores intermedios. Para un cierto valor de a entre 2 y 3 se debe tener que $f'(0) = 1$. Este valor de a es una constante fundamental en análisis matemático. Es un número irracional con nombre propio, que es la letra e, y que vale aproximadamente

$$e = 2{,}7\,1828\,1828\,4590\,45\ldots$$

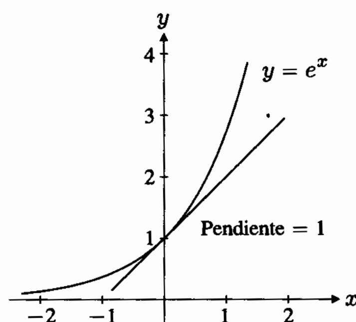
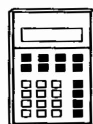


FIGURA 8.3 La función exponencial natural.

Puesto que $a = e$ es precisamente el valor de a que da $f'(0) = 1$ en (8.2), se tiene que

$$f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x \tag{8.3}$$

La **función exponencial natural** $f(x) = e^x$ *tiene por tanto la notable propiedad de que la derivada es igual a la función misma.* Ésta es la principal razón por la que esta función aparece tan frecuentemente en matemáticas y sus aplicaciones. Obsérvese también que $f''(x) = e^x$. Como $e^x > 0$ para todo x, $f'(x)$ y $f''(x)$ son positivas. Así f y f' son estrictamente crecientes. Esto confirma la forma de la gráfica de la Figura 8.3.



Las potencias de base e son difíciles de calcular a mano —incluso $e^1 = e$. Una calculadora científica con una tecla de la función $\boxed{e^x}$ puede hacer estos cálculos inmediatamente. Por ejemplo, podemos ver que $e^{0,5} \approx 1{,}6487$, $e^{-\pi} \approx 0{,}0432$.

Combinando (8.3) con otras reglas de derivación, podemos derivar expresiones complicadas que incluyan la función exponencial e^x. Antes de estudiar unos ejemplos consideremos funciones generales de la forma $y = e^{g(x)}$. Para derivarlas aplicamos la regla de la cadena $dy/dx = dy/du \cdot du/dx$ con $y = e^u$ y $u = g(x)$. Así, $y' = e^u u' = e^{g(x)} g'(x)$ y escribimos

$$y = e^{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad y' = e^{g(x)} g'(x) \tag{8.4}$$

Ejemplo 8.1

Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $y = e^{3x}$ (b) $y = e^x/x$ (c) $y = \sqrt{e^{2x} + x}$

Solución:

(a) Úsese (8.4) con $g(x) = 3x$. Como $g'(x) = 3$, $y = e^{3x} \Rightarrow y' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$.

(b) La regla del cociente da

$$y = \frac{e^x}{x} \Longrightarrow y' = \frac{e^x x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

(c) Aquí $y = \sqrt{e^{2x} + x} = \sqrt{u}$ con $u = e^{2x} + x$, y así $u' = 2e^{2x} + 1$, habiendo usado la regla de la cadena. De nuevo por esta regla,

$$y = \sqrt{e^{2x} + x} = \sqrt{u} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{2e^{2x} + 1}{2\sqrt{e^{2x} + x}}$$

Ejemplo 8.2

Hallar la derivada de

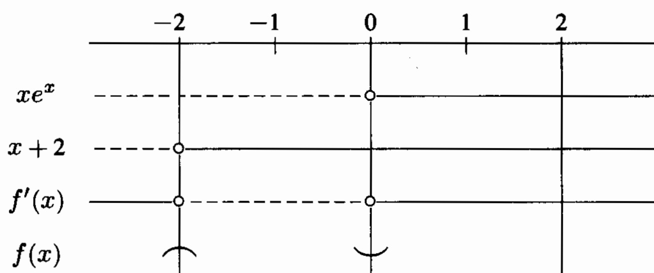
$$f(x) = x^2 e^x$$

¿Dónde es $f(x)$ creciente? (su gráfica es la de la Figura 9.23, Sección 9.5)

Solución: Derivando por la regla del producto se tiene que

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2 + x)$$

Vemos que $f'(x) = 0$ para $x = 0$ y $x = -2$. El diagrama de signos que se adjunta nos dice que f es creciente en los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[0, \infty)$ (pero decreciente en $[-2, 0]$).



Nota 1: Un error común al derivar funciones exponenciales es pensar que la derivada de e^x es "xe^{x-1}". Este error se comete cuando se confunde la función exponencial con la potencial.

Nota 2: Se usa a veces la notación $\exp(u)$ en lugar de e^u. Si u es una expresión complicada como $x^3 + x\sqrt{x - 1/x}$, es más fácil (tipográficamente hablando) leer y escribir $\exp(x^3 + x\sqrt{x - 1/x})$ que $e^{x^3 + x\sqrt{x-1/x}}$.

Un resumen de las propiedades de e^x

La función exponencial natural

$$f(x) = e^x \qquad (e = 2{,}71828\ldots)$$

es derivable y estrictamente creciente para todo número real x. De hecho (8.5)

$$f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = f(x) = e^x$$

Se verifican las propiedades siguientes para cualesquiera exponentes s y t:

$$\textbf{(a)}\ e^s e^t = e^{s+t} \qquad \textbf{(b)}\ e^s/e^t = e^{s-t} \qquad \textbf{(c)}\ (e^s)^t = e^{st}$$

Problemas

1 Derivar las funciones siguientes usando la regla de la cadena:

(a) $y = e^{-3x}$ (b) $y = 2e^{x^3}$ (c) $y = e^{1/x}$ (d) $y = 5e^{2x^2-3x+1}$

2 Calcular lo siguiente:

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{e^x}\right)$ (b) $\dfrac{d}{dt}\left(e^{t/2} + e^{-t/2}\right)$ (c) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{e^t + e^{-t}}\right)$ (d) $\dfrac{d}{dz}\left(e^{z^3} - 1\right)^{1/3}$

3 Considérese la función f definida por $f(x) = xe^x$ para todo x.

(a) Calcular $f'(x)$ y $f''(x)$. Hallar los intervalos de crecimiento de f.

(b) Dibujar la gráfica de f.

4 En cierto modelo económico, el número de familias con renta $\leq x$ viene dado por

$$p(x) = a + k(1 - e^{-cx}) \qquad (a,\ k,\ c \text{ son constantes positivas})$$

Determinar $p'(x)$ y $p''(x)$ y dibujar la gráfica de p.

5 Sea $f(x) = (x^2 - 2x - 3)e^x$. Dibujar la gráfica de f para $-4 \leq x \leq 3$.

Problemas avanzados

6 Las expresiones $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ y $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ aparecen tan frecuentemente que se les han dado símbolos especiales:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

y se llaman el *seno hiperbólico* y el *coseno hiperbólico* respectivamente. Dibujar las gráficas de las dos funciones y demostrar que las fórmulas siguientes son válidas para todo x:

(a) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(b) $\cosh 2x = (\cosh x)^2 + (\sinh x)^2$

(c) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(d) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

(e) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$

(f) $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$

(g) $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

(h) $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

7 Probar por inducción que la derivada n-ésima de xe^x es $(x + n)e^x$.

8 Sea $f(x) = a^x$. Probar que

$$f(z + x) = f(z)f(x) \qquad (\text{para todo } x,\ z) \qquad (*)$$

Supongamos que f es derivable. Derivar $(*)$ respecto a z (manteniendo x fijo) y luego hacer $z = 0$. Explicar por qué esto da una justificación alternativa de (8.2).

8.2 LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA NATURAL

Definimos en la Sección 3.5 el tiempo de duplicación de una función exponencial $f(t) = a^t$, $a > 1$, como el tiempo que necesita $f(t)$ para hacerse dos veces más grande. Para hallar el tiempo de duplicación t^* hay que resolver la ecuación $a^{t^*} = 2$ en t^*. En economía hay que resolver a menudo problemas similares:

1. Con la tasa de inflación actual, ¿cuánto tardarán los precios en triplicarse?

2. Si la deuda nacional de los EE.UU. continúa creciendo a la tasa actual, ¿cuánto tardará en alcanzar 10^{13} dólares?

3. Si se hace un depósito de 1.000 dólares en una cuenta de ahorro a un interés del 8% anual, ¿cuánto tardarán en convertirse en 10.000$?

Para responder a todas esas cuestiones hay que resolver ecuaciones de la forma $a^x = b$ en x. Por ejemplo, el Problema 3 consiste en hallar x en la ecuación $1.000(1{,}08)^x = 10.000$, ó equivalentemente $(1{,}08)^x = 10$.

Comenzamos con ecuaciones para las que la base de las exponenciales es e. Damos unos ejemplos:

$$(1) \quad e^x = 4 \qquad (2) \quad 5e^{-3x} = 16 \qquad (3) \quad A\alpha e^{-\alpha x} = k$$

En todas esas ecuaciones la incógnita está en el exponente. Damos, por tanto, la siguiente definición: Si $e^u = a$, se llama a u el **logaritmo natural** de a y se escribe $u = \ln a$. Así tenemos la siguiente definición del símbolo $\ln a$:

$$e^{\ln a} = a \qquad \text{(para cualquier número positivo } a) \tag{8.6}$$

Así, $\ln a$ es el exponente al que hay que elevar e para obtener a.

Como e^u es una función de u estrictamente creciente, se deduce que $\ln a$ está unívocamente determinado por la definición (8.6). El lector debe aprender bien de memoria esta definición; es el fundamento de todo lo que contiene esta sección, y de buena parte de lo que viene después. En el ejemplo siguiente practicamos un poco aplicando la definición.

Ejemplo 8.3

Calcular:

(a) $\ln 1$ **(b)** $\ln e$ **(c)** $\ln(1/e)$ **(d)** $\ln 4$ **(e)** $\ln(-6)$

Solución:

(a) $\ln 1 = 0$, porque $e^0 = 1$ y así 0 es el exponente al que hay que elevar e para obtener 1.

(b) $\ln e = 1$, porque $e^1 = e$ y así 1 es el exponente al que hay que elevar e para obtener e.

(c) $\ln(1/e) = \ln e^{-1} = -1$, porque -1 es el exponente al que hay que elevar e para obtener $1/e$.

(d) $\ln 4$ es el exponente al que hay que elevar e para obtener 4. Como $e^1 \approx 2{,}7$ y $e^2 = e^1 \cdot e^1 \approx 7{,}3$, el número $\ln 4$ debe estar entre 1 y 2. Experimentando con la tecla $\boxed{e^x}$ de una calculadora científica, se debe poder hallar una buena aproximación del $\ln 4$ mediante prueba y error. Sin embargo, es más fácil pulsar 4 y la tecla $\boxed{\ln x}$. Así se obtiene que $\ln 4 \approx 1{,}386$. Por tanto, $e^{1{,}386} \approx 4$.

(e) $\ln(-6)$ es el exponente al que hay que elevar e para obtener -6. Como e^x es positivo para todo x, $\ln(-6)$ no está definido

El cuadro (8.7) reúne algunas reglas útiles para los logaritmos naturales. Todas ellas son consecuencias sencillas de las reglas de potenciación.

Reglas útiles para ln

(a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad (x,\ y \text{ positivos})$

(El logaritmo de un producto es igual a la *suma* de los logaritmos de los factores.)

(b) $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y \qquad (x,\ y \text{ positivos})$

(El logaritmo de un cociente es igual a la *diferencia* entre el logaritmo del numerador y el del denominador.)

(c) $\ln x^p = p \ln x \qquad (x \text{ positivo})$

(El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.)

(d) $\ln 1 = 0, \qquad \ln e = 1, \qquad x = e^{\ln x} \qquad \text{y} \qquad \ln e^x = x$

(8.7)

Para probar (**a**) hay que observar, en primer lugar, que la definición de $\ln(xy)$ implica que $e^{\ln(xy)} = xy$. Además, $x = e^{\ln x}$ e $y = e^{\ln y}$, luego

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y} \qquad (*)$$

donde se ha usado la regla (8.5)(**a**). En general, $e^u = e^v$ implica $u = v$, luego deducimos de $(*)$ que $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. Las demostraciones de (**b**) y (**c**) se basan en (8.5)(**b**) y (**c**), respectivamente, y se dejan al lector. Finalmente, (8.7)(**d**) enumera unas propiedades importantes para futuras referencias.

Advertencia: No hay reglas sencillas para logaritmos de sumas y diferencias. *Es* tentador sustituir $\ln(x + y)$ por $\ln x + \ln y$, por ejemplo, pero es completamente erróneo. En efecto, $\ln x + \ln y$ es igual a $\ln(xy)$, no a $\ln(x + y)$.

No hay fórmulas sencillas para $\ln(x + y)$ y $\ln(x - y)$

Damos algunos ejemplos de aplicación de las reglas anteriores.

Ejemplo 8.4

Expresar en función de $\ln 2$ los siguientes: (**a**) $\ln 4$, (**b**) $\ln \sqrt[3]{2^5}$ y (**c**) $\ln(1/16)$

Solución:

(**a**) $\ln 4 = \ln(2 \cdot 2) = \ln 2 + \ln 2 = 2 \ln 2$ (ó $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$)

(**b**) Tenemos que $\sqrt[3]{2^5} = 2^{5/3}$ Por tanto, $\ln \sqrt[3]{2^5} = \ln 2^{5/3} = (5/3) \ln 2$

(**c**) $\ln(1/16) = \ln 1 - \ln 16 = 0 - \ln 2^4 = -4 \ln 2$ (ó $\ln(1/16) = \ln 2^{-4} = -4 \ln 2$)

Ejemplo 8.5

Resolver las siguientes ecuaciones en x:

(**a**) $5e^{-3x} = 16$ (**b**) $A\alpha e^{-\alpha x} = k$ (**c**) $(1{,}08)^x = 10$ (**d**) $e^x + e^{-x} = 2$

Solución: (**a**) Tomando ln en cada lado de la ecuación se obtiene $\ln(5e^{-3x}) = \ln 16$. La regla del producto da $\ln(5e^{-3x}) = \ln 5 + \ln e^{-3x}$. Además, $\ln e^{-3x} = -3x \ln e = -3x$ porque

$\ln e = 1$. Por tanto, $\ln 5 - 3x = \ln 16$, lo que da

$$x = \frac{1}{3}(\ln 5 - \ln 16) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{16}$$

(**b**) Razonamos como en (a) y obtenemos $\ln(A\alpha e^{-\alpha x}) = \ln k$, ó $\ln(A\alpha) + \ln e^{-\alpha x} = \ln k$, luego $\ln(A\alpha) - \alpha x = \ln k$. Por consiguiente,

$$x = \frac{1}{\alpha}\left[\ln(A\alpha) - \ln k\right] = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{A\alpha}{k}$$

(**c**) De nuevo tomamos ln en cada lado de la ecuación y obtenemos $x \ln 1{,}08 = \ln 10$. Así la solución es $x = \ln 10 / \ln 1{,}08$, que vale $\approx 29{,}9$. La interpretación de esta ecuación es que se necesitan un poco menos de 30 años para que un dólar al 8% se convierta en 10.

(**d**) Si se empieza tomando logaritmos $\ln(e^x + e^{-x}) = \ln 2$, como antes, no vamos a ninguna parte porque no hay fórmulas para desarrollar $\ln(e^x + e^{-x})$. En su lugar, razonamos así: poniendo $u = e^x$ se obtiene $e^{-x} = 1/e^x = 1/u$, luego la ecuación es $u + 1/u = 2$, o sea $u^2 + 1 = 2u$. Resolviendo esta ecuación de segundo grado en u se obtiene $u = 1$, solución única. Por tanto, $e^x = 1$ y así $x = 0$. (Comprobar esta solución. Considerar también la gráfica de $\cosh x$ del Problema 6 de la Sección 8.1.)

La función g(x) = ln x

Se define el número $\ln x$ por la relación $e^{\ln x} = x$, para cada número positivo x. La función

$$g(x) = \ln x \qquad (x > 0) \tag{8.8}$$

se llama la **función logarítmica natural**. Esta definición se muestra en la Figura 8.4. Imaginémonos que x es un punto que se mueve hacia arriba sobre el eje vertical, desde el origen. Cuando x aumenta desde valores menores que 1 a valores mayores que 1, $g(x)$ pasa de valores negativos a positivos. En efecto, como $f(u) = e^u$ es estrictamente creciente con rango $(0, \infty)$, se deduce del Teorema 7.9 de la Sección 7.6 que f tiene una función inversa g que es también estrictamente creciente con dominio $(0, \infty)$. Como el dominio de f es $(-\infty, \infty)$, sabemos que g tiene rango igual a $(-\infty, \infty)$. Así, la función exponencial $f(x) = e^x$ y la función logaritmo natural $g(x) = \ln x$ son inversas la una de la otra. En particular se tiene (véase (7.20)):

$$\ln e^x = x \qquad \text{para todo } x$$
$$e^{\ln y} = y \qquad \text{para todo } y > 0$$

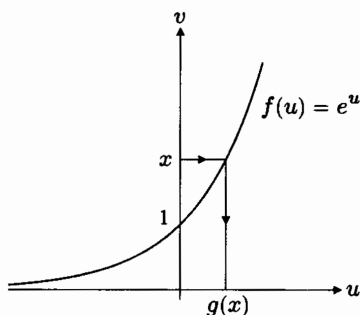


FIGURA 8.4 Ilustración de la definición de $g(x) = \ln x$.

Hemos dibujado la gráfica de $g(x) = \ln x$ en la Figura 8.5. El lector deberá aprender de memoria la forma de esta gráfica. Por el Ejemplo 8.3 se tiene $g(1/e) = -1$, $g(1) = 0$ y $g(e) = 1$. Obsérvese que esto se corresponde bien con la gráfica.

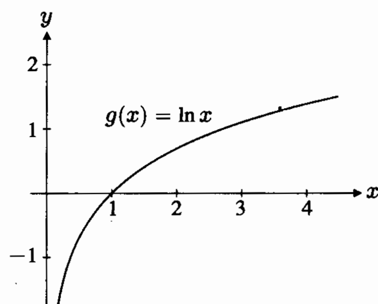


FIGURA 8.5 La gráfica de la función logaritmo natural $g(x) = \ln x$.

Derivación de funciones logarítmicas

Si suponemos que $g(x) = \ln x$ tiene derivada para todo $x > 0$, entonces podemos encontrar esta derivada fácilmente. Derivemos implícitamente la ecuación

$$e^{g(x)} = x \tag{*}$$

respecto a x, usando el resultado de (8.4). Se tiene que

$$e^{g(x)} g'(x) = 1$$

Como $e^{g(x)} = x$ es $xg'(x) = 1$. Por tanto:

$$g(x) = \ln x \implies g'(x) = \frac{1}{x} \tag{8.9}$$

Así la derivada de $\ln x$ en el punto x es sencillamente el número $1/x$. Para $x > 0$ tenemos que $g'(x) > 0$, luego $g(x)$ es *estrictamente* creciente. Nótese además que $g''(x) = -1/x^2$, que es menor que 0 para todo $x > 0$, luego $g'(x)$ es *estrictamente* decreciente. Esto confirma la forma de la gráfica de la Figura 8.5. De hecho, el crecimiento de $\ln x$ es bastante lento. Por ejemplo, $\ln x$ alcanza el valor 10 cuando $x > 22.026$, porque $\ln x = 10$ equivale a $x = e^{10} \approx 22.026{,}5$.

Nota: Hemos deducido (8.9) *bajo la suposición* de que $g(x) = \ln x$ es derivable. De hecho, por el Teorema 7.9 de la Sección 7.6, la función logarítmica g *es* derivable. Como la derivada de $f(x) = e^x$ es e^x, aplicando (7.25) a $y_0 = e^{x_0}$, tenemos que $g'(y_0) = 1/e^{x_0} = 1/y_0$. Esto es lo mismo que (8.9), excepto que el símbolo y_0 se sustituye por x.

A menudo hay que considerar funciones compuestas en las que hay logaritmos naturales. Puesto que $\ln u$ está definido sólo cuando $u > 0$, una función compuesta de la forma $y = \ln h(x)$ estará definida solamente para valores de x tales que $h(x) > 0$.

Combinando la regla para derivar $\ln x$ con la de la cadena se pueden derivar muchos tipos de funciones. Supongamos, por ejemplo, que $y = \ln h(x)$, donde $h(x)$ es derivable y positiva. Por la regla de la cadena, $y = \ln u$ con $u = h(x)$ implica que $y' = (1/u)u' = [1/h(x)]h'(x)$, luego:

$$y = \ln h(x) \implies y' = \frac{h'(x)}{h(x)} \tag{8.10}$$

Ejemplo 8.6

Hallar los dominios de las funciones siguientes y calcular sus derivadas:

$$\text{(a)}\quad y = \ln(1-x) \qquad \text{(b)}\quad y = \ln(4-x^2) \qquad \text{(c)}\quad y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{4}x$$

Solución:

(**a**) $\ln(1-x)$ está definida si $1-x > 0$, esto es si $x < 1$. Para hallar la derivada usamos (8.10) con $h(x) = 1-x$. En este caso, $h'(x) = -1$, luego por (8.10),

$$y' = \frac{-1}{1-x}$$

(**b**) $\ln(4-x^2)$ está definida si $4 - x^2 > 0$, esto es, si $(2-x)(2+x) > 0$. Esto ocurre si y sólo si $-2 < x < 2$. La fórmula (8.10) da

$$y' = \frac{-2x}{4-x^2}$$

(**c**) Se necesita que $(x-1)/(x+1) > 0$. Un diagrama de signos prueba que esto se verifica si y sólo si $x < -1$ ó $x > 1$. Se tiene $y = \ln u - \frac{1}{4}x$, donde $u = (x-1)/(x+1)$. Usando (8.10) obtenemos que

$$f'(x) = \frac{u'}{u} - \frac{1}{4}$$

donde

$$u' = \frac{1\cdot(x+1) - 1\cdot(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Así

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} - \frac{1}{4} = \frac{9-x^2}{4x^2-4} = \frac{(3-x)(3+x)}{4(x-1)(x+1)}$$

Nota: Si aplicamos la regla del cociente (8.7)(**b**) para ln a la fórmula de (**c**) en el Ejemplo 8.6 obtenemos

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1) - \tfrac{1}{4}x \qquad (*)$$

Derivando esta expresión es más fácil deducir la fórmula correcta de $f'(x)$. Sin embargo debe notarse que la expresión en $(*)$ está definida sólo cuando $x > 1$, mientras que la fórmula en (**c**) está también definida para $x < -1$. El quid está en que la fórmula $\ln(p/q) = \ln p - \ln q$ es correcta sólo cuando p y q son positivos, mientras que $\ln(p/q)$ tiene sentido también cuando p y q son negativos. En este caso $\ln(p/q) = \ln(-p) - \ln(-q)$.

Derivación logarítmica

Cuando se deriva una expresión que contiene productos, cocientes, raíces, potencias y combinaciones de ellas, es a menudo ventajoso usar la **derivación logarítmica**. Damos un ejemplo de aplicación del método:

Ejemplo 8.7

Hallar la derivada de

$$y = A\frac{x^p(ax+b)^q}{(cx+d)^r} \qquad (1)$$

Solución: Tómese primero el logaritmo natural de cada lado:

$$\ln y = \ln A + p \ln x + q \ln(ax+b) - r \ln(cx+d)$$

Derivando respecto a x se obtiene

$$\frac{y'}{y} = p\frac{1}{x} + q\frac{1}{ax+b}a - r\frac{1}{cx+d}c$$

Multiplicando por y, que está dado por (1), se tiene

$$y' = A\frac{x^p(ax+b)^q}{(cx+d)^r} \cdot \left(\frac{p}{x} + \frac{aq}{ax+b} - \frac{cr}{cx+d}\right)$$

Un resumen de las propiedades de ln

La función logarítmica natural

$$g(x) = \ln x$$

es derivable y estrictamente creciente para todo $x > 0$. De hecho,

$$g'(x) = 1/x$$

Las propiedades siguientes se verifican para todo $x > 0$, $y > 0$:

(a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (b) $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$ (c) $\ln x^p = p \ln x$

Además, $\ln e^x = x$ para todo número real x y

$$\ln x \to -\infty \text{ cuando } x \to 0^+, \qquad \ln x \to \infty \text{ cuando } x \to \infty$$

Problemas

1 Expresar los números siguientes en función de $\ln 3$:

(a) $\ln 9$ (b) $\ln \sqrt{3}$ (c) $\ln \sqrt[5]{3^2}$ (d) $\ln \dfrac{1}{81}$

2 Resolver las ecuaciones siguientes en x:

(a) $3^x = 8$ (b) $\ln x = 3$ (c) $\ln(x^2 - 4x + 5) = 0$

(d) $\ln[x(x-2)] = 0$ (e) $\dfrac{x \ln(x+3)}{x^2+1} = 0$ (f) $\ln(\sqrt{x} - 5) = 0$

3 Resolver las ecuaciones siguientes en x:

(a) $3^x 4^{x+2} = 8$ (b) $3 \ln x + 2 \ln x^2 = 6$ (c) $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x$

4 Resolver las ecuaciones siguientes en t:

(a) $x = e^{at+b}$ (b) $e^{-at} = 1/2$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} = \dfrac{1}{8}$

5 Demostrar las igualdades siguientes (con restricciones adecuadas de las variables):

(a) $\ln x - 2 = \ln(x/e^2)$

(b) $\ln x - \ln y + \ln z = \ln(xz/y)$

(c) $3 + 2\ln x = \ln(e^3 x^2)$

(d) $\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2}\ln\frac{1}{x} - \ln(x+1) = \ln\frac{x^2}{x+1}$

(e) $-p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - \cdots - p_n \ln p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(1/p_i)$

6 ¿Verdadero o falso: (a) $\pi^e < e^\pi$ (b) $\sqrt[e]{e} > \sqrt[\pi]{\pi}$?

7 Decir si las fórmulas siguientes son siempre ciertas o si puede que no lo sean (todas las variables son positivas):

(a) $(\ln A)^4 = 4\ln A$ (b) $\ln B = 2\ln\sqrt{B}$ (c) $\ln A^{10} - \ln A^4 = 3\ln A^2$

8 Decir si las fórmulas siguientes son siempre ciertas o si puede que no lo sean (todas las variables son positivas):

(a) $\ln\frac{A+B}{C} = \ln A + \ln B - \ln C$ (b) $\ln\frac{A+B}{C} = \ln(A+B) - \ln C$

(c) $\ln\frac{A}{B} + \ln\frac{B}{A} = 0$ (d) $p\ln(\ln A) = \ln(\ln A^p)$

(e) $p\ln(\ln A) = \ln(\ln A)^p$ (f) $\frac{\ln A}{\ln B + \ln C} = \ln A(BC)^{-1}$

9 Hallar los dominios de las funciones siguientes:

(a) $y = \ln(x+1)$ (b) $y = \ln\frac{3x-1}{1-x}$ (c) $y = \ln|x|$

(d) $y = \ln(x^2 - 1)$ (e) $y = \ln(\ln x)$ (f) $y = \frac{1}{\ln(\ln x) - 1}$

10 Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $\ln(x+1)$ (b) $\ln x + 1$ (c) $x\ln x$ (d) $\frac{x}{\ln x}$

11 Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $\ln(\ln x)$ (b) $\ln\sqrt{(1-x^2)}$ (c) $e^x \ln x$

(d) $e^{x^3}\ln x^2$ (e) $\ln(e^x + 1)$ (f) $\ln(x^2 + 3x - 1)$

12 Hallar la ecuación de la tangente en los casos siguientes:

(a) $y = \ln x$ en el punto cuya coordenada x es: (i) 1; (ii) $\frac{1}{2}$; (iii) e.

(b) $y = xe^x$ en el punto cuya coordenada x es: (i) 0; (ii) 1; (iii) -2.

13 Usando derivación logarítmica hallar las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3}$ (b) $f(x) = x^x$ (c) $f(x) = \sqrt{x-2}\,(x^2+1)(x^4+6)$

14 Si $f(x) = e^x - 1 - x$, entonces $f(0) = 0$ y $f'(x) = e^x - 1 > 0$ para todo $x > 0$. Por tanto, $f(x)$ es estrictamente creciente y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$, luego $e^x > 1 + x$ para todo $x > 0$. Probar las siguientes desigualdades usando el mismo método.

(a) $e^x > 1 + x + x^2/2$ para $x > 0$

(b) $\frac{1}{2}x < \ln(1+x) < x$ para $0 < x < 1$

(c) $\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) > 2t$ para $0 < t < 1$

15 Consideremos la función f definida para todo x por

$$f(x) = e^{x-1} - x$$

(a) Probar que $f(x) \geq 0$ para todo x. (*Indicación:* Estudiar el signo de $f'(x)$. Dibujar la gráfica.)

(b) Probar que la ecuación $e^{x-1} - x = 1$ tiene justamente dos soluciones.

(c) Sea g la función

$$g(x) = \frac{1}{\ln(e^{x-1} - x)}$$

¿Para qué valores de x está definida g? Estudiar $g(x)$ cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

(d) Dibujar la gráfica de g.

16 Simplificar las expresiones siguientes:

(a) $\exp[\ln(x)] - \ln[\exp(x)]$ (b) $\ln[x^4 \exp(-x)]$ (c) $\exp[\ln(x^2) - 2\ln y]$

17 La *distribución del valor extremo* en estadística está dada por

$$F(x) = \exp[-\exp(-x)]$$

(a) Escribir $F(x)$ en forma estándar.

(b) Calcular $f(x) = F'(x)$ y escribir el resultado de dos maneras.

(c) La función f se llama la *función de densidad* asociada a F. Calcular $f'(x)$.

18 Se ha definido la elasticidad de $y = f(x)$ con respecto a x en la Sección 5.6 de la forma siguiente:

$$\text{El}_x y = \frac{x}{y} y'$$

Hallar las elasticidades de las funciones siguientes:

(a) $y = e^x$ (b) $y = \ln x$ (c) $y = a^x$

19 Calcular las elasticidades de las funciones siguientes (donde a y δ son constantes, $\delta \neq 0$):

(a) $y = e^{ax}$ (b) $y = x^3 e^{2x}$ (c) $y = x\ln(x+1)$ (d) $y = (x^{-\delta} + 1)^{-1/\delta}$

20 Derivar las funciones siguientes usando derivación logarítmica:

(a) $x^{\sqrt{x}}$ (b) $(\sqrt{x})^x$ (c) $x^{(x^x)}$

21 Demostrar usando derivación logarítmica que, si u y v son funciones derivables de x y si $u > 0$, entonces

$$y = u^v \Longrightarrow y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right)$$

22 En un artículo sobre teoría de la producción se estudiaba la función

$$F(\alpha) = a\left(\frac{N^\alpha K^\alpha}{N^\alpha + bK^\alpha}\right)^{v/\alpha} \qquad (a,\ b,\ v,\ N,\ \text{y}\ K \text{ son constantes positivas})$$

Hállese la expresión de $F'(\alpha)$.

23 Hallar la inversa de $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (véase Problema 6, Sección 8.1). (*Indicación:* Hay que resolver una ecuación de segundo grado en $u = e^x$.)

8.3 GENERALIZACIONES

Se puede escribir todo número positivo a en la forma $a = e^{\ln a}$ luego, usando la propiedad general $(e^r)^s = e^{rs}$, tenemos la fórmula

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

En los problemas en que aparece una función del tipo a^x podemos trabajar con ella en la forma e^{bx}, donde b es una constante igual a $\ln a$. En particular, podemos derivar a^x derivando $e^{x \ln a}$. Escribiendo $g(x) = x \ln a$ y aplicando la regla de la cadena (8.4), obtenemos lo siguiente:

$$y = a^x \Longrightarrow y' = a^x \ln a \tag{8.11}$$

Por ejemplo, si $a = 10$ entonces $y = 10^x \Rightarrow y' = 10^x \ln 10$. Esta fórmula es coherente con lo anterior porque, si $a = e$, entonces $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$ porque $\ln e = 1$.

Nota: Comparando (8.11) con (8.2) en la Sección 8.1 vemos que $f'(0) = \ln a$. De la definición de $f'(0)$ en (8.1), se deduce que $(a^h - 1)/h \to \ln a$ cuando $h \to 0$. Sustituyendo a por x tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^h - 1}{h} = \ln x \qquad (x > 0)$$

Fijémonos en este límite con más detalle. Para todo $h > 0$, defínase la función g_h por[1]

$$g_h(x) = \frac{x^h - 1}{h}$$

para todo $x > 0$. Entonces

$$\lim_{h \to 0} g_h(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^h - 1}{h} = \ln x$$

De hecho, $\ln x$ está acotada superiormente por cada una de las funciones $g_h(x)$ $(h > 0)$. Para ver esto considérese, para cada $h > 0$, la función $F_h(x) = g_h(x) - \ln x = (x^h - 1)/h - \ln x$, definida para $x > 0$. Entonces $F_h(1) = 0$ y

$$F_h'(x) = \frac{hx^{h-1}}{h} - \frac{1}{x} = \frac{x^h - 1}{x} \begin{cases} < 0, & \text{si } 0 < x < 1 \\ > 0, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Así, $F_h(x)$ disminuye desde valores positivos hasta 0 cuando $0 < x < 1$, pero aumenta desde 0 a valores positivos cuando $x > 1$. Se deduce que $F_h(x) > 0$ para todo $x > 0$ excepto en $x = 1$, y así

$$g_h(x) = \frac{x^h - 1}{h} > \ln x \qquad (\text{para todo } x > 0,\ x \neq 1)$$

La Figura 8.6 muestra cómo $g_h(x)$ tiende a $\ln x$ cuando h tiende a 0.

Logaritmos en bases distintas de e

Recuérdese que hemos definido el número $\ln x$ como el exponente al que hay que elevar la base

---

[1] La función g_h y su límite cuando h tiende a 0 están relacionados con la conocida transformación de Box–Cox en estadística.

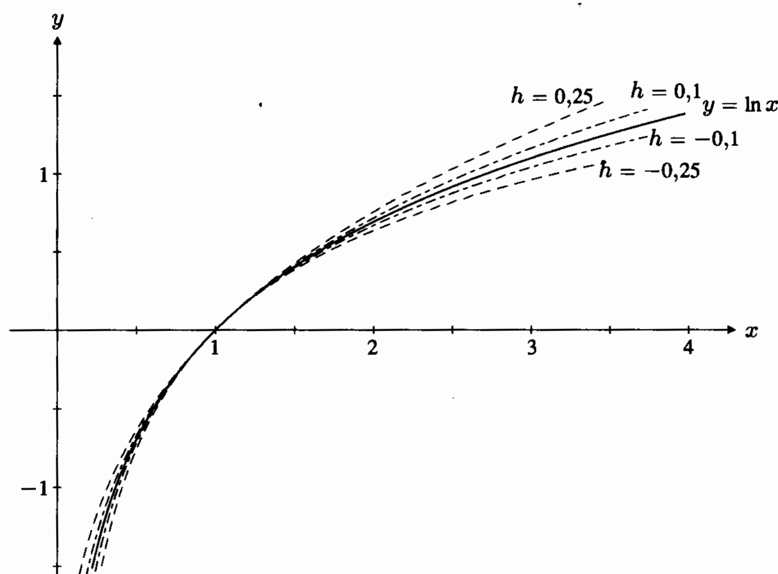


FIGURA 8.6 $y = (x^h - 1)/h$ ($h = \pm 0{,}25, \pm 0{,}1$), e $y = \ln x$.

e para obtener x. De vez en cuando es útil operar con logaritmos en base distinta de e. Durante muchos años, de hecho hasta que se popularizó ampliamente el uso de máquinas calculadoras mecánicas y electrónicas, se utilizaban gruesas tablas de logaritmos en base 10 para hacer cálculos complicados que requirieran gran cantidad de multiplicaciones, divisiones, raíces cuadradas, etcétera, o bien que estas operaciones fuesen largas y tediosas.

La definición de logaritmo en base arbitraria es análoga a la de logaritmo natural. La damos a continuación.

Supongamos que a es un número positivo fijo, en general mayor que 1. Si $a^u = x$, el número u, unívocamente determinado por x y a, se llama el **logaritmo de x en base a**, y se escribe $u = \log_a x$. Así se define el símbolo $\log_a x$, para todo número positivo x por la relación siguiente:

$$a^{\log_a x} = x \tag{8.12}$$

Por ejemplo, $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$, mientras que $\log_{10}(1/100) = -2$ a causa de que $10^{-2} = 1/100$.

Para hallar la relación entre el logaritmo natural y el logaritmo en base a de un mismo número, tomamos logaritmos naturales en cada lado de (8.12) obteniendo

$$\log_a x \cdot \ln a = \ln x$$

luego

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x \tag{8.13}$$

Esto nos dice que el logaritmo de x en el sistema de base a es proporcional al $\ln x$, *con el factor de proporcionalidad* $1/\ln a$. Se deduce inmediatamente que $\log_a$ obedece a las mismas reglas que el logaritmo natural (comparar con (8.7) de la Sección 8.2):

Reglas para $\log_a$

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a}) \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \\
&(\mathbf{b}) \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \\
&(\mathbf{c}) \quad \log_a x^p = p \log_a x \\
&(\mathbf{d}) \quad \log_a 1 = 0 \quad \text{y} \quad \log_a a = 1
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Por ejemplo, 8.14(**a**) se deduce de la regla correspondiente (8.7)(**a**) para el logaritmo natural:

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \frac{1}{\ln a} \ln(xy) = \frac{1}{\ln a}(\ln x + \ln y) \\
&= \frac{1}{\ln a} \ln x + \frac{1}{\ln a} \ln y = \log_a x + \log_a y
\end{aligned}$$

De (8.13) y (8.9) obtenemos

$$y = \log_a x \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \tag{8.15}$$

Una caracterización del número e

Hemos probado en la Sección 8.2, por derivación implícita, que si $g(x) = \ln x$ es derivable, entonces $g'(x) = 1/x$. Más concretamente, $g'(1) = 1$. Si usamos la *definición* de $g'(1)$ y (8.7)(c), junto con que $\ln 1 = 0$, obtenemos

$$1 = g'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln(1+h) = \lim_{h \to 0} \ln(1+h)^{1/h}$$

Puesto que $\ln(1+h)^{1/h}$ tiende a 1 cuando h tiende a 0, se deduce que $(1+h)^{1/h}$ debe tender a e y así:

$$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h} \tag{8.16}$$

TABLA 8.1 *Valores de $(1+h)^{1/h}$*

h	1	1/2	1/10	1/1.000	1/100.000	1/1.000.000
$(1+h)^{1/h}$	2,00	2,25	2,5937...	2,7169...	2,71825...	2,718281828...

Se ha calculado la Tabla 8.1 usando una calculadora científica. Los resultados parecen confirmar que la expresión decimal de e que dimos es correcta. Vemos en la tabla que nos aproximamos más y más a e conforme elegimos h más y más pequeño. Si ponemos $h = 1/n$, donde el número natural n se hace cada vez más grande, obtenemos lo siguiente:

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n \tag{8.17}$$

Otro límite importante

Si a es un número arbitrario mayor que 1, entonces $a^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Por ejemplo, $(1{,}0001)^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Además, si p es un número positivo arbitrario, entonces $x^p \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Si comparamos $(1{,}0001)^x$ con $x^{1.000}$, es claro que el primero crece muy lentamente al principio mientras que el segundo crece muy rápidamente. Sin embargo, este comportamiento inicial es engañoso pues $(1{,}0001)^x$ "sobrepasa" a la larga ampliamente a $x^{1.000}$. Este hecho ocurre siempre y se puede formalizar de la manera que indicamos a continuación. En general se verifica lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \qquad (a > 1,\ p \text{ un número fijo}) \tag{8.18}$$

Por ejemplo x^2/e^x y $x^{10}/(1{,}1)^x$ tienden a 0 cuando x tiende a ∞. El resultado (8.18) es muy notable. Se le puede enunciar brevemente diciendo que, para una base arbitraria mayor que 1, *la función exponencial crece más rápido que cualquier potencia de x*. Más brevemente aún: *"las exponenciales sobrepasan a las potencias"*.

Para probar (8.18) basta ver que $\ln(x^p/a^x) \to -\infty$ cuando $x \to \infty$, puesto que, si ésto se verifica, entonces $x^p/a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$ (véase Figura 8.5). En efecto,

$$\ln \frac{x^p}{a^x} = p \ln x - x \ln a = x\left(p\frac{\ln x}{x} - \ln a\right)$$

Como $a > 1$ es $\ln a > 0$. Si probamos que

$$\frac{\ln x}{x} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to \infty \tag{8.19}$$

deduciríamos que $p(\ln x/x) - \ln a \to -\ln a$, y así tendríamos todo demostrado. Pero (8.19) es una consecuencia fácil de la regla de l'Hôpital para el caso"$\pm\infty/\pm\infty$". En efecto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

La función potencial general

En la Sección 4.5 dijimos que, para todo número real a,

$$f(x) = x^a \Longrightarrow f'(x) = ax^{a-1} \tag{$*$}$$

Sin embargo no habíamos definido x^a para valores irracionales de a. Podemos dar ahora esta definición para todo $x > 0$. Como $x = e^{\ln x}$, definimos

$$x^a = (e^{\ln x})^a = e^{a \ln x}$$

Usando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{d}{dx}(e^{a\ln x}) = e^{a\ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

De esta manera hemos probado la regla de derivación $(*)$ incluso cuando a es un número irracional.

Fórmula de Taylor para e^x

Si $f(x) = e^x$, todas las derivadas de f son iguales a e^x luego la derivada k-ésima de f en $x = 0$ vale 1 —esto es, $f^{(k)}(0) = 1$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto, la fórmula de Taylor (7.10) de la Sección 7.4 dice que, para un número c entre 0 y x, se tiene

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c \tag{8.20}$$

Se puede probar que para cada x, el resto en (8.20) tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Así, usando (8.20), se puede calcular e^x para cualquier x, con un grado arbitrario de precisión. Sin embargo, si $|x|$ es grande, debemos calcular un número elevado de términos para obtener una buena aproximación, porque el resto tenderá a 0 muy lentamente, en este caso, cuando n tienda a infinito; de hecho, los primeros términos crecerán muy rápidamente para luego irlo haciendo más lentamente cada vez.

Veamos qué aproximación de $e^{0,1} = \sqrt[10]{e}$ obtenemos cuando $n = 3$. Poniendo $x = 0{,}1$ y $n = 3$ en (8.20) obtenemos

$$e^{0,1} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6.000} + \frac{(0{,}1)^4}{24}e^c \tag{$*$}$$

para un c en el intervalo $(0\,,\,0{,}1)$. Como $c < 0{,}1$, es $e^c < e^{0,1} < 1{,}2$, donde se verifica la última desigualdad porque $(e^{0,1})^{10} = e < (1{,}2)^{10} \approx 6{,}2$. Por tanto,

$$0 < \frac{(0{,}1)^4}{24}e^c < \frac{1}{240.000}\,1{,}2 = 0{,}000005$$

Por consiguiente, si despreciamos el resto en $(*)$, el error cometido es menor que 0,000005. La aproximación $e^{0,1} \approx 1 + 0{,}1 + 0{,}005 + 0{,}00017 = 1{,}10517$ es exacta hasta la quinta cifra decimal.

Problemas

1 Calcular:

(a) $\log_5 25$ (b) $\log_5 \sqrt{125}$ (c) $\log_5 1/25$ (d) $\log_{10} 100^{-3}$

2 Hallar x en:

(a) $\log_2 x = 2$ (b) $\log_x e^2 = 2$ (c) $\log_3 x = -3$ (d) $\log_{10} x^2 = 100$

3 Derivar las funciones siguientes:

(a) $y = 5 \cdot 3^x$ (b) $y = 2^x \ln x$ (c) $y = x \log_2 x$ (d) $y = \log_2 \sqrt{1 + x^2}$

4 Resolver las ecuaciones en x siguientes:

(a) $\dfrac{e^{x+1}}{e^{4/x}} = e$ (b) $[\ln(x+e)]^3 - [\ln(x+e)^2]^2 = \ln(x+e) - 4$

5 Resolver las desigualdades siguientes:

(a) $\ln x \le -1$ (b) $\ln(x^2 - x - 1) \ge 0$ (c) $\ln x + \ln(x-3) \le \ln 4$

6 Usando la regla de l'Hôpital (Teorema 7.8, Sección 7.5), o por cualquier otro método, hallar los límites siguientes:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{e^{t+1} - e^{t-1}}{t^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{2+x} - \sqrt{8-x^2}}$

(d) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ (e) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ (f) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

7 Hallar el límite

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{x^\lambda - y^\lambda}{\lambda}$$

donde x e y son constantes positivas.

8 Hallar las aproximaciones de Taylor de orden 3 de las funciones siguientes, en un entorno de $x = 0$, usando (5.11) de la Sección 5.5. (Se pueden comprobar los resultados parcialmente usando (8.20).)

(a) xe^x (b) e^{2x} (c) $x^2 + e^{\frac{x}{2}}$ (d) $\sqrt{e^x + 1}$

9 Usar los polinomios de Taylor de grado 3 para hallar soluciones aproximadas de la ecuación

$$\tfrac{1}{3}x^3 + x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) - x = 0$$

Problemas avanzados

10 Dada la función $f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, comprobar que $f^{(k)}(x) = x^{-3k}p_k(x)e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, donde $p_k(x)$ es un polinomio de grado $2k - 2$. Probar, por tanto, que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo entero positivo k. (Para esta función, *todos* los polinomios de Taylor en el origen son idénticamente nulos, pero la función es 0 sólo en el origen. La moraleja de este ejemplo es que, para saber que los polinomios de Taylor de una función suministran una buena aproximación de ella, se *debe* estimar el tamaño del resto.)

8.4 APLICACIONES DE EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

Supongamos que $f(t)$ designa las existencias de algo en el instante t. La razón $f'(t)/f(t)$ es la *tasa proporcional* o *relativa de crecimiento* de existencias en el instante t. En muchas aplicaciones, la tasa relativa de crecimiento es una constante r. Entonces

$$f'(t) = rf(t) \qquad \text{(para todo } t\text{)} \tag{8.21}$$

¿Qué funciones tienen una tasa relativa de crecimiento constante? Las funciones del tipo $f(t) = Ae^{rt}$ la tienen porque $f'(t) = Are^{rt} = rf(t)$. El punto importante es que no hay más funciones con esta propiedad. Supongamos que g es una función que verifica que $g'(t) = rg(t)$ para todo t y definamos h por $h(t) = g(t)e^{-rt}$. Entonces $h'(t) = g'(t)e^{-rt} + g(t)(-r)e^{-rt} = e^{-rt}[g'(t) - rg(t)]$, que vale 0 para todo t. Así, $h(t) = A$, constante, luego $g(t) = Ae^{rt}$. Así hemos probado que

$$f'(t) = rf(t) \quad \text{para todo } t \iff f(t) = Ae^{rt} \quad \text{con } A \text{ constante} \tag{8.22}$$

Consideremos ahora algunas aplicaciones para las que (8.22) es importante.

Ecología

Supongamos que $f(t)$ designa el número de individuos de una población en el instante t. La población puede ser, por ejemplo, una colonia de bacterias, o de osos polares árticos. Llamamos a $f'(t)/f(t)$ *la tasa de crecimiento per cápita* de la población. Si no hay ni inmigración ni emigración, la tasa de crecimiento per cápita de la población será igual a la diferencia entre las tasas per cápita de natalidad y de mortandad. Esas tasas dependerán de muchas variables, como cantidad de alimentos, distribución de las edades, espacio vital disponible, predadores, enfermedades y parásitos, entre otras.

La ecuación (8.21) suministra un modelo muy sencillo de crecimiento de la población. En este caso, (8.22) implica que la población debe crecer exponencialmente. En la realidad, el crecimiento exponencial sólo puede mantenerse durante un periodo limitado. En vez de suponer que la tasa relativa de crecimiento es constante, es más realista suponer que, una vez que la población está por encima de una cierta cantidad K (llamada la *capacidad* de la población), la tasa de crecimiento per cápita es negativa. La ecuación

$$f'(t) = rf(t)\left(1 - \frac{f(t)}{K}\right) \tag{8.23}$$

expresa una forma especial para esta hipótesis.

Obsérvese que, cuando la población $f(t)$ es pequeña en comparación con K, $f(t)/K$ es pequeño, luego $f'(t) \approx rf(t)$ y $f(t)$ crece de manera (aproximadamente) exponencial. Cuando $f(t)$ se hace mayor, el factor $1 - f(t)/K$ va tomando importancia. Se puede probar en general (véase Problema 8) que, si $f(t)$ satisface (8.23) (y no es idénticamente nula), debe tener la forma

$$f(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}} \qquad (A \text{ constante}) \tag{8.24}$$

Si hay N_0 individuos en el instante $t = 0$, entonces $f(0) = N_0$ y (8.24) da $N_0 = K/(1 + A)$, luego $A = (K - N_0)/N_0$. Si $N_0 < K$, entonces $A > 0$. Se deduce entonces de (8.24) que $f(t)$ es estrictamente creciente $f(t) \to K$ cuando $t \to \infty$ (suponiendo que $r > 0$). La Figura 8.7 muestra la gráfica de $f(t)$.

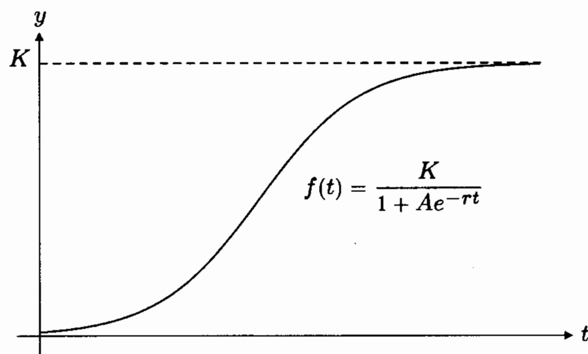


FIGURA 8.7 Crecimiento logístico hasta el nivel *K*.

Las ecuaciones como la (8.23) con soluciones de la forma (8.24) aparecen en numerosos modelos —véanse, por ejemplo, los Problemas 5 y 6. La función f definida en (8.24) se llama **función logística.**

Relaciones log-lineales

Supongamos que dos variables x, y están relacionadas por la ecuación

$$y = Ax^a \qquad (x,\, y,\, A \text{ positivos}) \tag{1}$$

Designemos por "log" al logaritmo de base cualquiera. Tomando el log de cada lado de (1) y aplicando las reglas (8.14), vemos que (1) equivale a la ecuación

$$\log y = \log A + a \log x \tag{2}$$

Vemos en (2) que $\log y$ es una función lineal de $\log x$ y por tanto decimos que (1) es una relación *log-lineal* entre x e y. La transformación de (1) a (2) se usa a menudo en modelos económicos, normalmente con logaritmos naturales. (Véanse Problemas 9 y 10, por ejemplo.)

Supongamos que hay una tabla que describe una relación entre dos variables positivas x, y. Constrúyase otra tabla para la relación entre $\ln x$ y $\ln y$ y dibújense los resultados en un nuevo sistema de coordenadas en el que se midan $\ln x$ y $\ln y$ sobre los dos ejes. Si los puntos resultantes están aproximadamente sobre una recta, la relación entre x e y será aproximadamente de la forma $y = Ax^a$. (En la Sección 15.7 damos un método para hallar una recta que, en un cierto sentido allí precisado, se ajuste a los datos lo mejor posible).

Ejemplo 8.8

La Tabla 8.2 está tomada de *Panorama del Consumidor 1980–1982* (publicado por la Oficina Central Noruega de Estadística, 1984). Muestra la relación entre el gasto sanitario y, y el total x del gasto de consumo para matrimonios sin hijos cuyo gasto total de consumo estaba por debajo de 150.000 coronas noruegas. A este efecto, se dividió la población en cuatro grupos diferentes de gasto de consumo.

TABLA 8.2 *De Panorama del Consumidor 1980–1982*

x	28.316	49.412	77.906	122.085
y	664	1028	1501	2010

(**a**) Construir una tabla para describir la relación entre $\ln x$ y $\ln y$, y dibujar estos datos en un sistema de coordenadas donde se midan $\ln x$ y $\ln y$ sobre los ejes.

(**b**) Ajustar una recta, grosso-modo, a los puntos del diagrama resultante y construir una fórmula empírica para y en función de x.

Solución:

(**a**) Construimos la Tabla 8.3.

TABLA 8.3

$\ln x$	10,25	10,81	11,26	11,71
$\ln y$	6,50	6,94	7,31	7,61

(**b**) La recta que pasa por los dos puntos extremos (Figura 8.8) parece adaptarse bien a todos los números de la tabla. La ecuación de esa recta es de la forma $\ln y = \ln A + a \ln x$. Usando los puntos extremos (10,25 , 6,5) y (11,71 , 7,61), vemos que la pendiente de esa recta es

$$a = \frac{7{,}61 - 6{,}5}{11{,}71 - 10{,}25} = \frac{1{,}11}{1{,}46} \approx 0{,}76$$

Exigiendo que la recta pase por (11,71 , 7,61), entonces $7{,}61 = \ln A + 0{,}76 \cdot 11{,}71$. Por tanto, $\ln A = 7{,}61 - 0{,}76 \cdot 11{,}71 = -1{,}2896$, luego $A = e^{-1{,}2896} \approx 0{,}275$. La relación entre y y x es entonces

$$y = 0{,}275\, x^{0{,}76}$$

Supongamos que y es una función exponencial

$$y = Aa^x \qquad (a,\ A \text{ positivos})$$

Tomando el log de cada lado se tiene

$$\log y = \log A + x \log a \qquad (*)$$

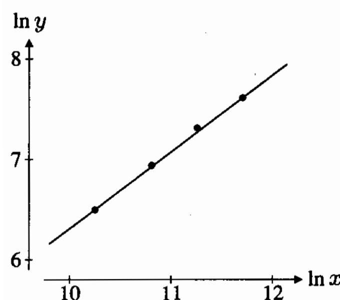


FIGURA 8.8

Vemos en este caso que $\log y$ es *una función lineal de* x. En un sistema de coordenadas en el que haya una escala ordinaria (lineal) sobre el eje horizontal y una escala logarítmica sobre el eje vertical, $(*)$ representa una recta de pendiente $\log a$.

Elasticidades y derivación logarítmica

En este apartado vamos a interpretar la elasticidad estudiada anteriormente en términos de derivadas logarítmicas, lo que nos dará una visión distinta y complementaria de este concepto tan importante en economía.

En el Ejemplo 5.20 de la Sección 5.6, consideramos la función de demanda $D(p) = 8.000p^{-1,5}$ y probamos que la elasticidad $\mathrm{El}_p D = (p/D)(dD/dp)$ es igual al exponente $-1{,}5$. Tomando logaritmos naturales se tiene

$$\ln D(p) = \ln 8.000 - 1{,}5 \ln p$$

De aquí se ve que $\mathrm{El}_p D$ es igual también a la derivada logarítmica $d \ln D(p)/d \ln p$, que es la pendiente de esta relación *log-lineal*.

Este ejemplo ilustra la regla general de que las elasticidades son iguales a esas derivadas logarítmicas. En efecto, cuando x e y son variables positivas, donde y es una función derivable de x, tenemos

$$\mathrm{El}_x y = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln y}{d \ln x} = \frac{d \log_a y}{d \log_a x} \tag{8.25}$$

donde a es cualquier base positiva para los logaritmos. La primera igualdad es la definición de elasticidad. Para ver que se verifica la segunda, nótese que $\ln y$ es una función derivable de y, que y es una función derivable de x y que $x = e^{\ln x}$ es una función derivable de $\ln x$. Al aplicar dos veces la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d \ln y}{d \ln x} = \frac{d \ln y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d \ln x}$$

Pero

$$\frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{y}, \qquad \frac{dx}{d \ln x} = \frac{de^{\ln x}}{d \ln x} = e^{\ln x} = x$$

Sustituyendo estos valores en $d \ln y / d \ln x$ obtenemos que

$$\frac{d \ln y}{d \ln x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot x = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \mathrm{El}_x y$$

Finalmente, se obtiene de (8.13) que $\log_a z$ es proporcional a $\ln z$, luego se comprueba fácilmente la tercera igualdad de (8.25).

Problemas

1 Calcular la tasa relativa de crecimiento $\dot{x}/x$ de las siguientes funciones:

(a) $x = 5t + 10$ (b) $x = \ln(t + 1)$ (c) $x = 5e^t$

(d) $x = -3 \cdot 2^t$ (e) $x = e^{t^2}$ (f) $x = e^t + e^{-t}$

¿Cuáles tienen una tasa relativa de crecimiento que es constante? Comparar los resultados con (8.22).

2 En un mercado estable, donde no hay rebajas, la disminución de las ventas $S(t)$ por unidad de tiempo de un bien sigue una tendencia proporcional a la cantidad de estas ventas, o sea

$$S'(t) = -aS(t)$$

(a) Hallar la expresión de $S(t)$ cuando las ventas en el instante 0 son de S_0. (*Indicación:* Usar (8.22).)

(b) Resolver la ecuación $S_0 e^{-at} = \frac{1}{2} S_0$ en t. Interpretar la respuesta.

3 La población mundial en 1975 era de casi $4 \cdot 10^9$ personas y seguía una tendencia creciente de casi el 2% anual. Si suponemos que la población crece exponencialmente a esa tasa relativa, entonces t años después de 1975 la población será igual a

$$P(t) = 4e^{0{,}02t}$$

(a) Estimar la población mundial en el año 2000 ($t = 25$).

(b) ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la población mundial si el crecimiento continúa a la misma tasa?

4 Designemos por $P(t)$ a la población europea en millones t años después de 1960. Según el Ejemplo 2.17 de la Sección 2.5, tenemos $P(0) = 641$ y $P(10) = 705$. Supongamos que $P(t)$ crece exponencialmente, con $P(t) = 641e^{kt}$. Calcular k y hallar $P(15)$ y $P(40)$ (estimaciones de la población en 1975 y 2000). Comparar con los números de la ONU de la Tabla 2.4

5 Un grupo de 1.000 personas estuvo en contacto con un portador del virus de la gripe en un momento dado. El número $N(t)$ de contagiados t días después venía dado por la expresión

$$N(t) = \frac{1.000}{1 + 999e^{-0{,}39t}}$$

(a) ¿Cuántas cogieron la gripe después de 20 días?

(b) ¿Cuántos días habrán de transcurrir para que 800 enfermen?

(c) ?'Pasarán la gripe todos los miembros del grupo?

6 En un estudio sobre los tractores en la agricultura inglesa, desde 1950 en adelante, se calculó que el número y en uso (medido en miles), como función de t (medido en años, con $t = 0$ correspondiendo a 1950), era de

$$y = 250{,}9 + \frac{228{,}46}{1 + 8{,}11625e^{-0{,}340416t}}$$

(a) Hallar el número de tractores en 1950. ¿Cuántos tractores más se añadieron hasta 1960?

(b) Hallar el límite de y cuando $t \to \infty$, y dibujar la gráfica.

7 Después de la catastrófica inundación de Holanda de 1953, se inició un proyecto de investigación para determinar la altura óptima de los diques. Uno de los modelos más simples que se usaron requería calcular el valor de x que hace mínima la función

$$f(x) = I_0 + kx + Ae^{-\alpha x} \qquad (x \geq 0)$$

En ella, x designa al número de metros que deberían añadirse a los diques, $I_0 + kx$ es el coste de la construcción y $Ae^{-\alpha x}$ es una estimación de las pérdidas originadas por la inundación. I_0, k, A, α son todas constantes positivas.

(a) Supongamos que $f(x)$ tiene un mínimo para un cierto $x_0 > 0$; hallar x_0.

(b) ¿Qué condición deben verificar α, A y k para que x_0 sea positivo? Probar que, si la condición se satisface, x_0 resuelve el problema de minimización.

(c) Supongamos que A viene dado por la fórmula

$$A = \frac{100}{\delta} p_0 V \left(1 + \frac{\delta}{100}\right)$$

donde p_0 es la probabilidad de una nueva inundación si no se reconstruyen los diques, V es una estimación del coste del daño causado por la inundación, y δ es una tasa de interés. Probar que se puede escribir x_0 en la forma

$$x_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{100\alpha p_0 V \left(1 + \delta/100\right)}{k\delta}$$

Estudiar qué ocurre con x_0 cuando una de las variables p_0, V, δ, ó k crece. Comentar si los resultados son o no razonables.[2]

8 Supongamos que $f(t)$ es una función que verifica (8.23) y sea $h(t) = -1 + K/f(t)$. Probar que $h'(t) = -rh(t)$ para todo t, luego (por (8.22)) se tiene que $h(t) = Ae^{-rt}$ para una constante A. ¿Qué se puede decir de $f(t)$?

9 Voorhees y sus colegas estudiaron los sistemas de transporte de 37 ciudades americanas, calculando el tiempo medio m (en minutos) que cada individuo tardaba en llegar a su trabajo, en función del número N de habitantes. Hallaron que

$$m = e^{-0{,}02} N^{0{,}19}$$

Escribir la relación en forma ln-lineal. ¿Cuál es el valor de m cuando $N = 480.000$?

10 Los datos siguientes están tomados de una encuesta sobre las personas que, en 1933, emigraron a Tartu, en Estonia, desde el campo circundante. Se designa por y al número de personas que se mudaron por cada 100.000 habitantes rurales y por x a la distancia recorrida (medida en kilómetros y redondeada al siguiente entero divisible por 20).

x	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
y	1.700	550	230	120	75	60	45	35	25	20

(a) Construir una tabla para la relación entre $\ln x$ y $\ln y$ y dibujar los datos en un sistema de coordenadas en el que $\ln x$ y $\ln y$ se midan sobre los dos ejes.

(b) Ajustar, grosso-modo, una recta a los pares de puntos del diagrama dibujado en la parte (a) y deducir una fórmula empírica de y en función de x.

11 Escribir la relación $z = 694.500p^{-0{,}3}$ en forma ln-lineal (véase Ejemplo 3.8 de la Sección 3.4). Además, hallar p en función de z.

12 (a) Hallar las constantes A y a para que la gráfica de $y = Ax^a$ pase por los puntos $(x, y) = (2, 5)$ y $(x, y) = (3, 7)$. (*Indicación:* Usar la forma ln-lineal.)

(b) Hacer lo mismo cuando la gráfica pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$.

[2] Este problema se estudia en van Dantzig, "Economic Decision Problems for Flood Prevention," *Econometrica*, 24 (1956): 276–287

13 Se ha estudiado el efecto de enfriar los huevos sobre los embriones de pollo. La tabla siguiente da los resultados de un experimento en el que se midió el pulso de un embrión de pollo a temperaturas diferentes.

Temperatura T (°C)	36,3	35,0	33,9	32,4	24,7	24,2
Pulso n (latidos/minuto)	154	133	110	94	38	36

(a) Hacer una tabla de la relación entre T y $\ln n$ y dibujar los puntos $(T, \ln n)$ en un sistema de coordenadas con $\ln n$ en el eje vertical y T en el horizontal. Ajustar una recta a esos puntos.

(b) Queremos hallar una función empírica $f(T) = ce^{aT}$ que aproxime el ritmo de las pulsaciones como función de T. Usando la recta obtenida en la parte (a), hallar a y c.

(c) ¿Cuántos grados hay que disminuir la temperatura para reducir a la mitad el ritmo de las pulsaciones?

Problemas avanzados

14 Toda materia orgánica contiene carbono 12 estable y muy poco del isótopo radioactivo carbono 14. La proporción entre la cantidad de carbono 14 y la de carbono estable en los organismos vivos es constante y parece haberlo sido durante miles de años. Cuando muere un organismo, el carbono 14 se desintegra según la ley

$$f(t) = f(t_0)e^{-1{,}25\cdot 10^{-4}(t-t_0)}$$

donde $f(t_0)$ es la cantidad de carbono 14 en el instante t_0 de la muerte y $f(t)$ es la cantidad que queda en el instante t. Probar que t_0 viene dado por la fórmula

$$t_0 = t + 8.000 \ln \frac{f(t)}{f(t_0)}$$

(Esta fórmula es la base de la "datación radioactiva". En 1960, el norteamericano W. F. Libby recibió el premio Nobel de química por el descubrimiento de la datación radioactiva.)

15 Helge y Anne Stine Ingstad hallaron diversos útiles vikingos en antiguos asentamientos de Terranova. Se analizaron los restos de carbón vegetal de las cocinas en 1972, encontrándose que el porcentaje del contenido en carbono 14 de los restos (comparado con el de la madera fresca) era del 88,6%. Usar el resultado del Problema 14 para determinar la edad de los asentamientos.

8.5 INTERÉS COMPUESTO. VALORES ACTUALES DESCONTADOS

La ecuación (8.21), $f'(t) = rf(t)$ para todo t, tiene una aplicación particularmente importante en economía. Después de t años, un depósito de K dólares a un interés del $p\%$ anual crecerá hasta

$$K(1+r)^t \quad (\text{donde} \quad r = \frac{p}{100}) \tag{1}$$

(véase Sección A.1, Apéndice A). El principal se multiplica anualmente por el factor $1 + r$.

La fórmula (1) presupone que el interés se añade al principal a finales de cada año. Supongamos que, en vez de esto, se pagan intereses cada seis meses, pero sólo un $(p/2)\%$ del principal. Después de seis meses el principal habrá crecido hasta

$$K + K\frac{p/2}{100} = K\left(1 + \frac{r}{2}\right)$$

Por tanto, el principal se multiplica por el factor $1 + r/2$ cada seis meses. Después de un año el principal incrementado será $K(1 + r/2)^2$ y, al cabo de t años, será de

$$K\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t} \tag{2}$$

Está claro que la segunda opción es más interesante que la primera para el depositario. La razón es que $(1 + r/2)^2 = 1 + r + r^2/4 > 1 + r$.

Más generalmente, supongamos que se añade al principal un $(p/n)\%$ de intereses en n momentos distintos igualmente espaciados a lo largo de cada año. Entonces el principal vendrá multiplicado por el factor $(1 + r/n)^n$ anualmente. Pasados t años, el principal se convierte en

$$K\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{3}$$

Cuanto mayor es n, mejor es la inversión para el depositario (véase Problema 3.) Por tanto, para favorecer al depositario, habría que hacer n tan grande como fuese posible.

En la práctica, hay un límite para la frecuencia en que se puede añadir el interés a las cuentas de ahorro. Sin embargo, examinemos lo que ocurre a la expresión (3) cuando la frecuencia anual n tiende a infinito. Si ponemos $r/n = 1/m$, es $n = mr$ y así

$$K\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = K\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mrt} = K\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \tag{4}$$

Cuando $n \to \infty$ (con r fijo), $m = n/r \to \infty$ luego, por (8.17), tenemos que $(1 + 1/m)^m \to e$. Así la expresión (4) tiende a Ke^{rt} cuando n tiende a infinito. Cuando n se va haciendo grande, la acumulación del interés se hace más y más frecuentemente. En el límite hablamos de **interés compuesto continuo** o **interés continuo**. Después de t años, una cantidad inicial K se convertirá en

$$K(t) = Ke^{rt} \qquad \textbf{compuesto continuo} \tag{8.26}$$

El número r se llama la **tasa de interés** o **tipo de interés en tanto por uno**. Derivando (8.26) obtenemos el siguiente hecho importante:

> A interés continuo de tasa r, el principal crece a la tasa constante relativa r, luego se tiene que $K'(t)/K(t) = r$.

Se deduce de (8.26) que $K(1) = Ke^r$, o sea que el principal se multiplica por el factor e^r durante el primer año. En general, $K(t + 1) = Ke^{r(t+1)} = Ke^{rt}e^r = K(t)e^r$, luego a interés continuo, el principal viene multiplicado *cada* año por el factor fijo e^r.

Comparación de las distintas formas de interés

Para un tipo de interés del $p\%$ ($= 100r$) anual, el interés continuo es el mejor para el depositario. (Véase Problema 3.) Sin embargo, para tipos de interés relativamente bajos, la diferencia entre la composición anual y continua del interés es bastante pequeña.

Ejemplo 8.9

Hallar en qué se convierte 1 dólar al cabo de un año, a un interés del 8% anual cuando este

interés se acumule:

(**a**) al final del año

(**b**) cada seis meses

(**c**) continuamente

Solución: En este caso, $r = 8/100 = 0{,}08$, luego obtenemos lo siguiente:

(**a**) $K = (1 + 0{,}08) = 1{,}08$

(**b**) $K = (1 + 0{,}08/2)^2 = 1{,}0816$

(**c**) $K = e^{0{,}08} \approx 1{,}08329$

Si aumentamos el tipo de interés o el número de años sobre los que el interés se acumula, aumenta la diferencia entre la composición anual y continua de interés.

Nota: El consumidor que desee obtener un préstamo se puede encontrar ante varias ofertas de entidades financieras. Por tanto, es de una importancia considerable el compararlas. Para hacer esas comparaciones se usa a menudo el concepto de **tipo de interés efectivo**. Imaginemos una oferta a un tipo de interés anual del $p\%$ pagadero n veces durante el año. Un principal de K se habrá convertido al cabo de un año en $K(1 + r/n)^n$, donde $r = p/100$. Se define el *tipo de interés efectivo* P como la tipo de interés porcentual anual que, compuesto continuamente, produce el mismo interés total durante el año. Si $R = P/100$, después de 1 año, la cantidad inicial K se convierte en Ke^R. Por tanto R viene definido por la ecuación

$$Ke^R = K(1 + r/n)^n$$

Simplificando por K y tomando ln de ambos lados se tiene

$$R = n \ln(1 + r/n) \tag{8.27}$$

Si $r = 0{,}08$ y $n = 1$, por ejemplo, entonces $R = \ln(1 + 0{,}08) \approx 0{,}077$. Así un tipo anual de interés del 8% corresponde a un tipo de interés efectivo (continuo) de un 7,7%, aproximadamente.

El valor actual de una deuda futura

Supongamos que se debe pagar una cantidad K en un plazo de t años, a contar a partir de la fecha de hoy. ¿Cuál es el *valor actual* de esta cantidad a un tipo de interés del $p\%$ anual? Equivalentemente, ¿cuánto hay que depositar hoy en una cuenta de ahorro al $p\%$ de interés anual para tener la cantidad K dentro de t años?

Si se paga anualmente el interés, el capital A se convertirá en $A(1 + p/100)^t$ dentro de t años, luego debe ser $A(1 + p/100)^t = K$. Así, $A = K(1 + p/100)^{-t} = K(1 + r)^{-t}$, donde $r = p/100$. Sin embargo, si el interés es continuo, el capital A se convertirá en Ae^{rt} después de t años. Por tanto, $Ae^{rt} = K$, ó $A = Ke^{-rt}$. Poniendo juntos los dos se tiene lo siguiente:

Si el tipo de interés es del $p\%$ anual y $r = p/100$, una deuda de K a pagar dentro de t años tiene el siguiente valor actual:

$$\begin{aligned} K(1 + r)^{-t}, &\quad \text{con abonos anuales de interés} \\ Ke^{-rt}, &\quad \text{a interés continuo} \end{aligned} \tag{8.28}$$

Problemas

1 Una suma de 1.000$ produce un interés del 5% anual. ¿Cuál será su valor dentro de (a) 10 años y (b) 50 años, cuando los intereses se abonan

(i) anualmente (ii) mensualmente (ii) continuamente?

2 Supongamos que el precio de un bien dentro de x años viene dado por $f(x) = Ae^{kx}$, donde A y k son constantes.

(a) Hallar A y k cuando $f(0) = 4$ y $f'(0) = 1$. En este caso ¿cuál es el precio dentro de 5 años?

(b) Suponemos ahora que $A = 4$ y $k = 0{,}25$. Cuando el precio ha crecido hasta 18, se le puede controlar, de tal manera que el crecimiento anual del precio se reduce al 10%. ¿Cuándo se controla el precio por vez primera? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el precio se duplique, antes y después del control?

Problemas avanzados

3 Hemos demostrado en la discución que sigue a la ecuación 4 que $(1 + r/n)^n \to e^r$ cuando $n \to \infty$. Para cada $r > 0$ fijo, afirmamos que $(1 + r/n)^n$ es estrictamente creciente como función de n, luego que

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r \qquad (\text{para } n = 1, 2, \ldots) \qquad (*)$$

Esto prueba que un interés continuo al p% anual, con $r = p/100$, es mejor para el prestamista que abonos de intereses n veces al año cada uno de una fracción $p/100n$ del capital.

Para probarlo, se define la función g, para todo $x > 0$ por

$$g(x) = \left(1+\frac{r}{x}\right)^x \qquad (r \text{ una constante positiva})$$

Probar que

$$g'(x) = g(x)\left[\ln\left(1+\frac{r}{x}\right) - \frac{r/x}{1+r/x}\right]$$

(Úsese derivación logarítmica.) Póngase $h(u) = \ln(1 + u) - u/(1 + u)$; entonces $h(0) = 0$. Probar que $h'(u) > 0$ para $u > 0$ y, por tanto, que $g'(x) > 0$ para todo $x > 0$. ¿Qué conclusión se puede sacar?

9

Optimización en una variable

Si quieres realismo literal, mira al mundo que te rodea;
si quieres comprender, mira a las teorías.
—*R. Dorfman* (1964)

La búsqueda de la mejor manera de alcanzar un objetivo implica resolver los llamados **problemas de optimización**. Se pueden extraer ejemplos de casi todas las parcelas de la actividad humana. Un gestor busca aquellas combinaciones de factores (tales como capital y trabajo) que maximicen los beneficios o minimicen los costes. Un médico puede querer saber cuándo la concentración de un medicamento en el torrente circulatorio es máxima. Un granjero puede querer saber qué cantidad de abono por metro cuadrado maximiza el beneficio. Una compañía petrolera puede querer hallar la tasa óptima de extracción de uno de sus pozos.

El estudio de un problema de optimización de esta clase usando métodos matemáticos requiere construir un modelo matemático del problema. Normalmente esto no es fácil y solamente en casos sencillos el modelo nos conducirá a un problema de maximizar o minimizar una función de una variable, que es el tema principal de este capítulo.

En general, ningún método matemático es más importante en aplicaciones a la economía que los que se diseñan para resolver problemas de optimización. Aunque los problemas de optimización en economía requieren normalmente varias variables, los ejemplos de optimización cuadrática de la Sección 3.2 indican que se pueden generar muchas intuiciones económicas a partir de optimización en una variable.

9.1 DEFINICIONES BÁSICAS

Recuérdese de la Sección 7.2 que, si $f(x)$ tiene dominio D, entonces

$$c \in D \text{ es un } \textbf{máximo} \text{ de } f \iff f(x) \leq f(c), \text{ para todo } x \in D \tag{9.1}$$

$$d \in D \text{ es un } \textbf{mínimo} \text{ de } f \iff f(x) \geq f(d), \text{ para todo } x \in D \tag{9.2}$$

En (9.1) se llama a $f(c)$ el **valor máximo** y en (9.2) se llama a $f(d)$ el **valor mínimo**. Si el valor de f en c es estrictamente mayor que el valor en cualquier otro punto de D, entonces c es un **máximo estricto**. Análogamente, d es un **mínimo estricto** si $f(x) > f(d)$ para todo $x \in D$, $x \neq d$. Usamos los nombres de **puntos óptimos** y **valores óptimos**, o para designarlos indistintamente.

Si f es una función con dominio D, entonces se define $-f$ en D por la relación $(-f)(x) = -f(x)$. Nótese que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in D$ si y sólo si $-f(x) \geq -f(c)$ para todo $x \in D$. Así c es un máximo para f en D si y sólo si c es un mínimo para $-f$ en D. Esta observación sencilla, que se ilustra en la Figura 9.1, se usa para convertir problemas de maximización en problemas de minimización y viceversa.

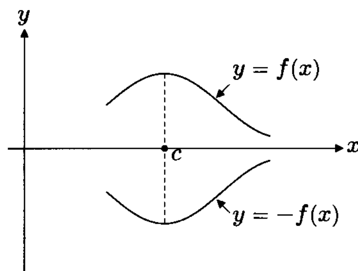


FIGURA 9.1: El punto *c* es un máximo de *f*(*x*) y uno de mínimo de −*f*(*x*).

Nuestra tarea principal en este capítulo es estudiar cómo se determinan los posibles máximos y mínimos de una función. A este respecto, la siguiente definición es crucial:

$$x_0 \text{ es un } \textbf{punto estacionario} \text{ de } f \text{ si } f'(x_0) = 0 \tag{9.3}$$

La interpretación geométrica de los puntos estacionarios es que son aquéllos en los que la tangente a la gráfica de la función es paralela al eje x.

Antes de comenzar a estudiar sistemáticamente las propiedades de los máximos y mínimos, damos unos ejemplos geométricos razonando sobre la gráfica de la función. Nos van a enseñar el papel que juegan los puntos estacionarios de una función en la teoría de la optimización.

La Figura 9.2 representa la gráfica de una función f que tiene dos puntos estacionarios, c y d. Hay un máximo en c y un mínimo en d.

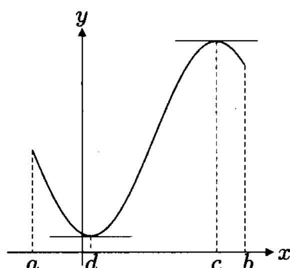


FIGURA 9.2

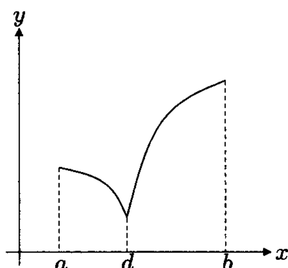


FIGURA 9.3

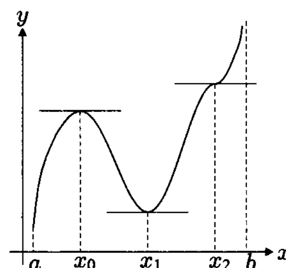


FIGURA 9.4

La Figura 9.3 representa la gráfica de una función sin puntos estacionarios. Tiene un máximo en el extremo b del intervalo y un mínimo en d, donde la función no es derivable. En b, la derivada (a izquierda) no es 0.

Finalmente, la Figura 9.4 representa la gráfica de una función f con tres puntos estacionarios, x_0, x_1 y x_2. Hay un mínimo en el extremo a del intervalo, mientras que f no tiene ningún valor máximo porque tiende a ∞ cuando x tiende a b. En el punto estacionario x_0 la función f tiene un máximo local, en el sentido de que su valor en ese punto es mayor que el valor en los puntos próximos (es decir, los de un entorno de x_0). Análogamente, la función tiene un mínimo local en x_1, mientras que x_2 es un punto estacionario en el que no hay ni máximo ni mínimo local. Se llama a x_2 un *punto de inflexión*.

En las tres figuras anteriores están representadas las propiedades más importantes de los problemas de optimización de una variable. Debemos establecer unos fundamentos analíticos firmes para la teoría de la optimización y no basarnos simplemente en intuiciones geométricas, porque esta teoría es muy importante para las aplicaciones prácticas.

9.2 EL TEST DE LA DERIVADA PRIMERA PARA LOS PUNTOS ÓPTIMOS

En muchos casos importantes podemos hallar los valores máximos o mínimos de una función estudiando el signo de su derivada primera. Supongamos que $f(x)$ es derivable en un intervalo I y que tiene un único punto estacionario $x = c$. Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ tal que $x \leq c$, mientras que $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$ tal que $x \geq c$, entonces $f(x)$ es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha. De aquí se deduce que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \leq c$ y $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \geq c$. Por tanto, $x = c$ es un máximo de f en I (véase Figura 9.5).

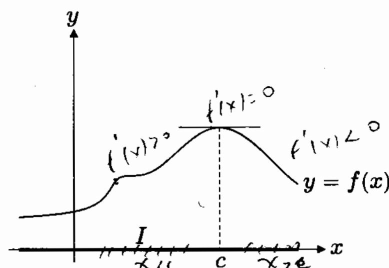


FIGURA 9.5 El punto $x = c$ es un máximo.

Con el cambio evidente, se verifica un resultado semejante para mínimos, como se ilustra en la Figura 9.6. En breves palabras:[1]

El test de la derivada primera para máximo o mínimo

Si $f'(x) \geq 0$ para $x \leq c$ y $f'(x) \leq 0$ para $x \geq c$, entonces $x = c$ es un máximo de f. (9.4)

Si $f'(x) \leq 0$ para $x \leq c$ y $f'(x) \geq 0$ para $x \geq c$, entonces $x = c$ es un mínimo de f.

[1] Muchos libros de matemáticas para economistas dicen que siempre se deben comprobar las llamadas condiciones de segundo orden, aun en los casos en que el test (9.4) de la derivada primera es más fácil.

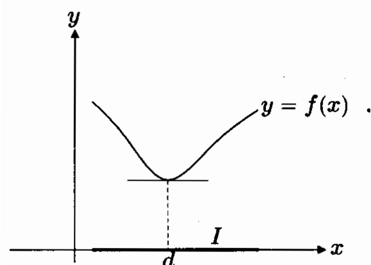


FIGURA 9.6 El punto $x = d$ es un mínimo.

Ejemplo 9.1

La concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo, medida en miligramos por litro, t horas después de su inyección, viene dada por la fórmula

$$c(t) = \frac{t}{t^2 + 4}$$

Hallar el momento de máxima concentración.

Solución: Derivando con respecto a t se obtiene

$$c'(t) = \frac{1 \cdot (t^2 + 4) - t \cdot 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{4 - t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{(2 + t)(2 - t)}{(t^2 + 4)^2}$$

Como $t \geq 0$, el signo de la fracción es el del término $(2 - t)$ porque los otros términos son positivos. Si $t \leq 2$, entonces $c'(t) \geq 0$, mientras que si $t \geq 2$, entonces $c'(t) \leq 0$. Por (9.4) tenemos que $t = 2$ hace máxima a $c(t)$. Así, la concentración del medicamento es máxima 2 horas después de su inyección. Como $c(2) = 0{,}25$, la concentración máxima es de 0,25 miligramos por litro.

Ejemplo 9.2

En el sistema métrico norteamericano tradicional, supongamos que se cosechan $Y(N)$ medidas (*bushels*) de trigo por acre de terreno cuando se usan N libras de fertilizante por acre*. Si P es el precio en dólares de cada medida de trigo y q es el de la libra de fertilizante, los beneficios en dólares por acre son de

$$\pi(N) = PY(N) - qN \qquad (N \geq 0) \tag{1}$$

Supongamos que, para un cierto N^*, $\pi'(N) \geq 0$ para $N \leq N^*$ y $\pi'(N) \leq 0$ para $N \geq N^*$. Entonces N^* maximiza beneficios y $\pi'(N^*) = 0$, esto es, $PY'(N^*) - q = 0$, luego

$$PY'(N^*) = q \tag{2}$$

Vamos a dar una interpretación económica de esta condición. Supongamos que se usan N^* libras de fertilizante y hacemos crecer N^* en una unidad. ¿Cuánto ganamos? Si N^* aumenta una unidad, entonces se producen $Y(N^* + 1) - Y(N^*)$ medidas más de trigo. Ahora bien, $Y(N^* + 1) - Y(N^*) \approx Y'(N^*)$. Por cada una de esas medidas obtenemos P dólares, luego

aumentando N^* en una unidad, ganamos $\approx PY'(N^*)$ dólares

Por otra parte,

aumentando N^* en una unidad, gastamos q dólares

* N. del T. 1 bushel = 8 galones ≈ 36 litros, 1 acre = 40,47 áreas

porque una libra de fertilizante cuesta eso. Así, (2) se interpreta de la manera siguiente: para maximizar los beneficios hay que aumentar el fertilizante hasta el nivel N^* en el cual una libra adicional iguala ganancias y pérdidas.

En un cierto estudio realizado en Iowa en 1952, se estimó la función $Y(N)$ en

$$Y(N) = -13{,}62 + 0{,}984N - 0{,}05N^{3/2}$$

Si el precio del trigo es de 1,40$ por medida y el del fertilizante es de 0,18$ por libra, hallar la cantidad de fertilizante que maximiza los beneficios.

Solución: En este caso,

$$\pi(N) = 1{,}4(-13{,}62 + 0{,}984N - 0{,}05N^{3/2}) - 0{,}18N$$

luego

$$\pi'(N) = 1{,}4\left[0{,}984 - (3/2)\cdot 0{,}05\cdot N^{1/2}\right] - 0{,}18 \tag{3}$$

Así, $\pi'(N^*) = 0$ siempre que

$$1{,}4\cdot(3/2)\cdot 0{,}05(N^*)^{1/2} = 1{,}4\cdot 0{,}984 - 0{,}18$$

Esto implica que

$$(N^*)^{1/2} = \frac{1{,}4\cdot 0{,}984 - 0{,}18}{1{,}4(3/2)0{,}05} \approx \frac{1{,}1976}{0{,}105} \approx 11{,}406$$

Por tanto,

$$N^* \approx (11{,}406)^2 \approx 130$$

Observando (3) vemos que $\pi'(N) \geq 0$ para $N \leq N^*$ y $\pi'(N) \leq 0$ para $N \geq N^*$. Por consiguiente, $N^* \approx 130$ maximiza los beneficios.

Ejemplo 9.3 **("No seas ni prestamista ni prestatario[2]")**

Una estudiante tiene en la actualidad unos ingresos de y_1 y espera unos ingresos futuros de y_2. Planea un consumo presente de c_1 y un consumo futuro de c_2 para maximizar la función de utilidad

$$\ln c_1 + \frac{1}{1+\delta}\ln c_2$$

donde δ es su tasa de descuento. Si obtiene ahora un crédito de tal forma que puede consumir más de lo que le permiten sus ingresos, i.e., $c_1 > y_1$, el consumo futuro, después de pagar el crédito $c_1 - y_1$ a una tasa de interés de r, será de

$$c_2 = y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)$$

Alternativamente, si ahorra ahora de tal forma que $c_1 < y_1$, el consumo futuro será

$$c_2 = y_2 + (1+r)(y_1 - c_1)$$

después de percibir los intereses de los ahorros. Hallar el plan óptimo de préstamo o ahorro.

Solución: Tanto si la estudiante ahorra como si obtiene un crédito, el consumo del segundo periodo viene dado por

$$c_2 = y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)$$

---

[2] En Shakespeare, el consejo de Polonius a Hamlet fue: "No seas ni prestamista ni prestatario".

Por tanto, ella querrá maximizar

$$U = \ln c_1 + \frac{1}{1+\delta} \ln[y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)]$$

Derivando esta función respecto a c_1 se tiene

$$\frac{dU}{dc_1} = \frac{1}{c_1} - \frac{1+r}{1+\delta} \cdot \frac{1}{y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)}$$

Reduciendo a común denominador obtenemos

$$\frac{dU}{dc_1} = \frac{(1+\delta)[y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)] - (1+r)c_1}{c_1(1+\delta)[y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)]} \tag{1}$$

Reordenando el numerador e igualando a 0 la derivada tenemos

$$\frac{dU}{dc_1} = \frac{(1+\delta)[(1+r)y_1 + y_2] - (2+\delta)(1+r)c_1}{c_1(1+\delta)[y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)]} = 0 \tag{2}$$

Esta ecuación tiene una única solución, que es

$$c_1^* = \frac{(1+\delta)[(1+r)y_1 + y_2]}{(2+\delta)(1+r)} = y_1 + \frac{(1+\delta)y_2 - (1+r)y_1}{(2+\delta)(1+r)} \tag{3}$$

En (2) vemos que, para $c_1 > c_1^*$, se tiene que $dU/dc_1 < 0$, mientras que para $c_1 < c_1^*$ se tiene $dU/dc_1 > 0$. Deducimos que c_1^* hace máxima a U. Más aún, la estudiante ahorra si y sólo si $(1+\delta)y_2 < (1+r)y_1$. En el caso más probable en que $(1+\delta)y_2 > (1+r)y_1$ porque los ingresos futuros sean considerablemente mayores que los actuales, pedirá un crédito. Sólo si por casualidad $(1+\delta)y_2$ es igual a $(1+r)y_1$ la estudiante no ahorrará ni pedirá un crédito. Este estudio ha despreciado la diferencia entre tipos de interés de ahorro y de crédito, cosa que no ocurre nunca en la realidad.

Problemas

1 Supongamos que y designa el peso total de los cerdos sacrificados en el matadero de Chicago durante 1948 (en millones de libras) y sea x el total del trabajo semanal (en miles de horas). Nichols calculó la relación

$$y = -2{,}05 + 1{,}06x - 0{,}04x^2$$

Determinar el valor de x que maximiza y, estudiando la variación del signo de y'.

2 Hallar la derivada de la función h definida por

$$h(x) = \frac{8x}{3x^2 + 4}$$

para todo x. Usar la variación del signo de $h'(x)$ para hallar el valor máximo/mínimo de $h(x)$.

3 Consideremos la función V definida por

$$V(x) = 4x(9-x)^2 = 4x^3 - 72x^2 + 324x \qquad (x \in [0, 9])$$

(véase el Problema 1(e) de la Sección 1.3 para la interpretación de V.)

(a) Calcular $V'(x)$ y probar que V es creciente en $(0, 3)$ y decreciente en $(3, 9)$. Hallar el máximo de V en $[0, 9]$.

(b) Explicar lo que el resultado de la parte (a) implica para el Problema 1(e) de la Sección 1.3.

(c) Resolver también el problema por derivación logarítmica de $V(x)$, para $x \in (0, 9)$. ¿Qué método prefiere el lector?

4 (a) Probar que

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^4+1} \implies f'(x) = \frac{4x(1+x^2)(1+x)(1-x)}{(x^4+1)^2} \qquad (*)$$

(b) Usar $(*)$ para hallar el valor máximo de f en $[0, \infty)$. Probar que $f(-x) = f(x)$ para todo x. ¿Cuáles son los máximos de f en $(-\infty, \infty)$?

5 A veces se pueden hallar los máximos y mínimos de una función simplemente estudiando su expresión. Por ejemplo, consideremos $f(x) = \sqrt{x-5} - 100$, definida para $x \geq 5$. Como $\sqrt{x-5}$ es ≥ 0 para todo $x \geq 5$, es $f(x) \geq -100$ para todo $x \geq 5$. Como $f(5) = -100$, deducimos que $x = 5$ es un mínimo. Usar razonamientos directos semejantes para hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{8}{3x^2+4}$ (b) $g(x) = 3 - (x-2)^2$ (c) $h(x) = 5(x+2)^4 - 3$

(d) $F(x) = \dfrac{-2}{2+x^2}$ (e) $G(x) = 2 - \sqrt{1-x}$ (f) $H(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$, $(x \in [-1, 1])$

6 Estudiar las variaciones de signo de la derivada de cada función del Problema 5 y confirmar las conclusiones obtenidas allí.

Problemas avanzados

7 Si el impuesto T que paga una persona por su renta bruta Y está dado por $T = a(bY + c)^p + kY$, donde a, b, c son constantes positivas, entonces el tipo medio de impuesto es

$$\overline{T}(Y) = \frac{T}{Y} = a\frac{(bY+c)^p}{Y} + k \qquad (p > 1)$$

Hallar el valor de Y que maximiza el impuesto medio.

8 Dados n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, hallar el número x que los aproxima mejor, en el sentido de que

$$d(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

es lo más pequeño posible. ¿Cómo se llama a este valor x?

9.3 MANERAS ALTERNATIVAS DE HALLAR MÁXIMOS Y MÍNIMOS

A veces es difícil o imposible hallar los puntos óptimos estudiando la variación de signo de la derivada primera. Hay otras formas de caracterizar los puntos óptimos, que son a menudo más útiles, como se demuestra en esta sección.

Comenzamos examinando el papel que juegan los puntos estacionarios de una función para calcular puntos óptimos. Supongamos que sabemos que una función f tiene un máximo en un punto c del intervalo I. Este máximo puede muy bien estar en un extremo del intervalo, como en el caso de la Figura 9.3. Sin embargo, si c no es un extremo del intervalo, y si f es derivable, parece obvio desde el punto de vista geométrico que la tangente a la gráfica en c debe ser horizontal. En otras palabras, c debe ser un punto estacionario. Se tiene la misma conclusión para un mínimo. En el Teorema 7.4 de la Sección 7.2 dimos un enunciado formal y una demostración de este importante resultado. Así, la condición $f'(c) = 0$ es *necesaria* para que un punto interior c sea un punto óptimo, siempre que f' exista en él. Sin embargo, la condición no es suficiente. En la Figura 9.4 de la Sección 9.1 los puntos x_0, x_1, x_2 son estacionarios pero ninguno es un máximo o mínimo. (En efecto, x_0 es un máximo local, x_1 es un mínimo local y x_2 es un punto de inflexión.)

Cómo buscar los máximos y mínimos

Supongamos que sabemos que una función f tiene un máximo y/o un mínimo en un intervalo acotado I. El máximo o mínimo puede estar en un extremo o en uno de los puntos interiores de I. Si está en un punto interior, y si f es derivable, por el Teorema 7.4 de la Sección 7.2 la derivada f' es cero en ese punto. Además está la posibilidad de que el máximo o mínimo esté en un punto en el que f no sea derivable. Por tanto, los máximos o mínimos pueden ser únicamente de los tres tipos siguientes:

1. puntos interiores de I en los que $f'(x) = 0$
2. los dos extremos de I
3. puntos de I en los que no exista f'

La Figura 9.3 de la Sección 9.1 suministra un ejemplo típico de un mínimo en un punto del tipo 3. Sin embargo, las funciones que estudian los economistas suelen ser derivables en todo punto. La regla siguiente cubre, por tanto, la mayoría de los problemas interesantes.

Problema:
Hallar los valores máximos y mínimos de una función derivable f definida en un intervalo $[a, b]$ cerrado y acotado.

Solución:

(a) Hallar todos los puntos estacionarios de f en (a, b) —esto es, hallar todos los puntos $x \in (a, b)$ que satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$. (9.5)
(b) Evaluar f en los extremos a y b del intervalo y en todos los puntos estacionarios que se han hallado en (**a**).
(c) El mayor valor de la función hallado en (**b**) es el valor máximo de f en $[a, b]$.
(d) El menor valor de la función hallado en (**b**) es el valor mínimo de f en $[a, b]$.

Toda función derivable es continua, luego el teorema de los valores extremos (Teorema 7.3) nos asegura que existen máximos y mínimos. En principio podemos hallar esos puntos siguiendo el procedimiento que acabamos de dar. (En algunos ejemplos muy particulares puede haber un número infinito de puntos estacionarios. Estas funciones "patológicas" no aparecen casi nunca en problemas aplicados.)

Ejemplo 9.4

Hallar los valores máximo y mínimo de

$$f(x) = \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{2}{3}x + 1, \qquad (x \in [-3, 3])$$

Solución: La función es derivable en todo punto, y

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}(x^2 - x - 2) = \tfrac{1}{3}(x + 1)(x - 2)$$

Así hay dos puntos en el intervalo $(-3, 3)$ para los que $f'(x) = 0$, a saber, $x = -1$ y $x = 2$. Evaluando f en esos puntos y en los extremos del intervalo tenemos

$$f(-3) = -3/2, \qquad f(-1) = 25/18, \qquad f(2) = -1/9, \qquad f(3) = 1/2$$

El valor mínimo es $-3/2$ en $x = -3$ y el valor máximo es $25/18$ en $x = -1$.

Cómo buscar los máximos y mínimos

Supongamos que sabemos que una función f tiene un máximo y/o un mínimo en un intervalo acotado I. El máximo o mínimo puede estar en un extremo o en uno de los puntos interiores de I. Si está en un punto interior, y si f es derivable, por el Teorema 7.4 de la Sección 7.2 la derivada f' es cero en ese punto. Además está la posibilidad de que el máximo o mínimo esté en un punto en el que f no sea derivable. Por tanto, los máximos o mínimos pueden ser únicamente de los tres tipos siguientes:

1. puntos interiores de I en los que $f'(x) = 0$
2. los dos extremos de I
3. puntos de I en los que no exista f'

La Figura 9.3 de la Sección 9.1 suministra un ejemplo típico de un mínimo en un punto del tipo 3. Sin embargo, las funciones que estudian los economistas suelen ser derivables en todo punto. La regla siguiente cubre, por tanto, la mayoría de los problemas interesantes.

Problema:
Hallar los valores máximos y mínimos de una función derivable f definida en un intervalo $[a, b]$ cerrado y acotado.

Solución:
(a) Hallar todos los puntos estacionarios de f en (a, b) —esto es, hallar todos los puntos $x \in (a, b)$ que satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$. (9.5)
(b) Evaluar f en los extremos a y b del intervalo y en todos los puntos estacionarios que se han hallado en (**a**).
(c) El mayor valor de la función hallado en (**b**) es el valor máximo de f en $[a, b]$.
(d) El menor valor de la función hallado en (**b**) es el valor mínimo de f en $[a, b]$.

Toda función derivable es continua, luego el teorema de los valores extremos (Teorema 7.3) nos asegura que existen máximos y mínimos. En principio podemos hallar esos puntos siguiendo el procedimiento que acabamos de dar. (En algunos ejemplos muy particulares puede haber un número infinito de puntos estacionarios. Estas funciones "patológicas" no aparecen casi nunca en problemas aplicados.)

Ejemplo 9.4

Hallar los valores máximo y mínimo de

$$f(x) = \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{2}{3}x + 1, \qquad (x \in [-3, 3])$$

Solución: La función es derivable en todo punto, y

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}(x^2 - x - 2) = \tfrac{1}{3}(x + 1)(x - 2)$$

Así hay dos puntos en el intervalo $(-3, 3)$ para los que $f'(x) = 0$, a saber, $x = -1$ y $x = 2$. Evaluando f en esos puntos y en los extremos del intervalo tenemos

$$f(-3) = -3/2, \qquad f(-1) = 25/18, \qquad f(2) = -1/9, \qquad f(3) = 1/2$$

El valor mínimo es $-3/2$ en $x = -3$ y el valor máximo es $25/18$ en $x = -1$.

Ejemplo 9.5

Una empresa que produce un cierto bien quiere maximizar sus beneficios. Los ingresos totales generados en un cierto periodo por la producción y venta de Q unidades es $R(Q)$ dólares, mientras que $C(Q)$ designa el coste total en dólares del proceso. El beneficio obtenido como resultado de producir y vender Q unidades es, pues,

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) \tag{1}$$

Supongamos que hay una cota máxima $\overline{Q}$ de la producción en el periodo dado, por limitaciones técnicas. Supongamos que R y C son funciones derivables de Q en el intervalo $[0, \overline{Q}]$. La función de beneficios π es también derivable y, consiguientemente, π *tiene* un valor máximo. En ciertos casos, este máximo puede darse en $Q = 0$ o en $Q = \overline{Q}$. Si no, el nivel máximo de producción Q^* verifica que $\pi'(Q^*) = 0$ y así

$$R'(Q^*) = C'(Q^*) \tag{2}$$

Así *se debe ajustar la producción en un punto en el que el ingreso marginal sea igual al coste marginal.*

Supongamos que la empresa obtiene un precio fijo P por unidad vendida. Entonces $R(Q) = PQ$ y (2) toma la forma

$$P = C'(Q^*) \tag{3}$$

Así, en el caso en que la empresa no controle el precio *hay que ajustar la producción al nivel al cual el coste marginal es igual al precio unitario del artículo* (suponiendo que π no tiene un máximo en 0 o $\overline{Q}$).

Para ciertas expresiones de $R(Q)$ y $C(Q)$, puede ocurrir que (2) tenga varias soluciones. Si esto es así, se tiene el beneficio máximo en aquel punto de entre las soluciones de (2) que dé el valor más alto a $\pi(Q)$.

Hay una interpretación de (2) en la línea de la que dimos para la condición de optimalidad en el ejemplo del trigo del Ejemplo 9.2 de la Sección 9.2. Supongamos que aumentamos la producción en una unidad desde el nivel Q^*; los ingresos aumentarán $R(Q^* + 1) - R(Q^*) \approx R'(Q^*)$. El coste aumenta en $C(Q^* + 1) - C(Q^*) \approx C'(Q^*)$, porque éste es el aumento del coste debido al crecimiento de la producción en una unidad. La ecuación (2) iguala $R'(Q^*)$ y $C'(Q^*)$, de tal forma que el ingreso marginal procedente de la venta de una unidad extra se cancela con el coste marginal de producirla.

Supongamos que hay un impuesto de t dólares por unidad sobre la producción del bien. Entonces la función de beneficios se convierte en

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) - tQ \tag{4}$$

porque la venta de Q unidades produce un coste adicional de tQ. Suponiendo de nuevo que el beneficio máximo no está en $Q = 0$ o $Q = \overline{Q}$, sólo puede ocurrir en el nivel Q^* en el que $\pi'(Q^*) = 0$. Ahora bien, $\pi'(Q) = R'(Q) - C'(Q) - t$, luego la condición de beneficio máximo es

$$R'(Q^*) = C'(Q^*) + t \tag{5}$$

Lo que ganamos aumentando en una unidad la producción desde el nivel Q^* es aún (aproximadamente) $R'(Q^*)$. Lo que perdemos es $C'(Q^*) + t$, porque tenemos que pagar t dólares de impuestos por la unidad de exceso en la producción.

En los ejemplos anteriores, en los se usan siempre funciones explícitas, no hemos tenido problemas en hallar las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. Sin embargo, en ciertos casos, el hallar todas la

soluciones de $f'(x) = 0$ puede constituir un problema enorme. Por ejemplo, la función continua

$$f(x) = x^{26} - 32x^{23} - 11x^5 - 2x^3 - x + 28 \qquad (x \in [-1, 5])$$

tiene un máximo y un mínimo en $[-1, 5]$, pero es imposible hallar las soluciones exactas de la ecuación $f'(x) = 0$.

En los problemas prácticos de optimización se suelen encontrar dificultades de este tipo. De hecho, la ecuación $f'(x) = 0$ puede resolverse exactamente sólo en casos muy especiales. Afortunadamente, hay disponibles métodos numéricos para resolver aproximadamente estas ecuaciones, con precisión arbitraria y, normalmente, con la ayuda de un computador.

Nota: Supongamos que f es derivable en un intervalo $[a, b]$ y sea x_0 un máximo de f en $[a, b]$. Si $x_0 = a$, se tiene que $f'(a)$ no puede ser positiva porque entonces existirían puntos a la derecha de a en los que f tendría un valor superior a $f(a)$. De manera análoga, si $x_0 = b$ es un máximo de f en $[a, b]$, entonces $f'(b)$ no puede ser negativa. Si $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$. La Figura 9.7 muestra los tres casos.

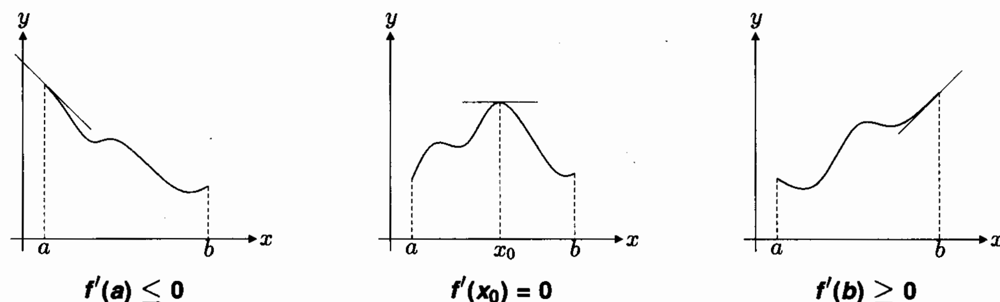


FIGURA 9.7 Máximo en *a*, x_0 ó *b*.

Problemas

1 Hallar el máximo y el mínimo de

$$f(x) = 4x^2 - 40x + 80, \qquad x \in [0, 8]$$

Dibujar la gráfica de f en $[0, 8]$.

2 Hallar el máximo y el mínimo de cada función en el intervalo indicado:

(a) $f(x) = -2x - 1, \quad [0, 3]$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 8, \quad [-1, 2]$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

(d) $f(x) = x^5 - 5x^3, \quad [-1, \sqrt{5}]$

(e) $f(x) = x^3 - 4.500x^2 + 6 \cdot 10^6 x, \quad [0, 3.000]$

3 Hallar dos números positivos cuya suma sea 16 y cuyo producto sea el máximo posible.

4 Un club deportivo planea fletar un avión. Para 60 pasajeros, el precio es de 800$ cada uno. Por cada persona adicional sobre 60, se descuentan 10$ a todos los viajeros. El avión puede cargar 80 pasajeros, como máximo.

(a) ¿Cuál es el importe total cuando hay 61, 70 y 80 pasajeros?

(b) ¿Cuál es el importe total si vuelan $60 + x$ pasajeros?

(c) Hallar el número de pasajeros que maximiza el total de la suma pagada por los miembros del club.

5 Consideremos el ejemplo 9.5 y sea $R(Q) = pQ$ y $C(Q) = \beta Q + \gamma Q^2$.

(a) Hallar la solución Q^* de la ecuación (2) en este caso.

(b) ¿Qué valor de Q maximiza los beneficios en los casos siguientes, suponiendo que $Q \in [0, 500]$?

(i) $R(Q) = 1.840Q$ y $C(Q) = 2Q^2 + 40Q + 5.000$

(ii) $R(Q) = 2.240Q$ y $C(Q) = 2Q^2 + 40Q + 5.000$

(iii) $R(Q) = 1.840Q$ y $C(Q) = 2Q^2 + 1.940Q + 5.000$

6 La altura de una planta al cabo de t meses está dada por

$$h(t) = \sqrt{t} - \tfrac{1}{2}t \qquad (t \in [0, 3])$$

¿En qué momento alcanza su máxima altura?

7 Hallar el máximo de $y = x^2 e^{-x}$ en $[0, 4]$.

8 Sea $C(Q)$ la función de costes totales de una empresa en la producción de Q unidades de un bien. Se llama la *función de costes medios* a $A(Q) = C(Q)/Q$. Si $C(Q)$ es derivable, demostrar que $A(Q)$ tiene un punto estacionario en $Q_0 > 0$ si y sólo si el coste marginal y el coste medio son iguales en Q_0. ($C'(Q_0) = A(Q_0)$.)

9 En el problema anterior, sea $C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$, donde $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$ y $d > 0$. Probar que $A(Q) = C(Q)/Q$ tiene un mínimo en el intervalo $(0, \infty)$. Hallar el mínimo en el caso $b = 0$.

10 En el Problema 8, sea $C(Q) = aQ^b + c$ para $a > 0$, $b > 1$ y $c \geq 0$. Probar que la función de costes medios tiene un mínimo en $(0, \infty)$ y hallarlo.

9.4 MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

En lo que va de capítulo hemos estudiado los que se llaman normalmente problemas de optimización *global*. La razón de esta denominación es que hemos buscado los valores máximo y mínimo absolutos de una función sobre todo su dominio. Estos máximos y mínimos son los que interesan en problemas de optimización aplicada. Sin embargo, nos interesan a veces los máximos y mínimos locales de una función. En este caso, comparamos los valores de una función en el punto en cuestión solamente con los valores en puntos de un entorno pequeño de él. Por ejemplo, en la Figura 9.8 e imaginando que la gráfica representa un perfil montañoso, las cimas P_1 y P_2 representan máximos locales, mientras que los valles Q_1 y Q_2 representan mínimos locales.

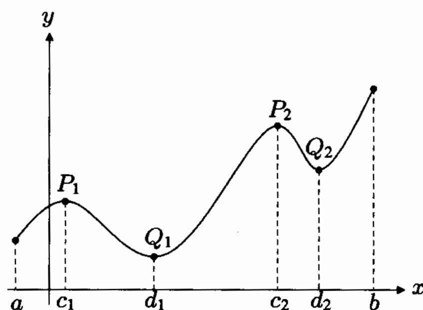


FIGURA 9.8 Los puntos c_1 y c_2 son máximos locales; d_1 y d_2 son mínimos locales.

Si $f(x)$ está definida en el dominio A, las definiciones precisas son así:

La función f tiene un **máximo local** en c si existe un intervalo (α, β) centrado en c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in A \cap (\alpha, \beta)$. (9.6)

La función f tiene un **mínimo local** en d si existe un intervalo (α, β) centrado en d tal que $f(x) \geq f(d)$ para todo $x \in A \cap (\alpha, \beta)$. (9.7)

Nota: Estas definiciones implican que el punto a de la Figura 9.8 es un mínimo local y b es un máximo local (y global). Algunos autores restringen la definición de máximo o mínimo local a puntos *interiores* del dominio de la función. Según esta definición, un máximo global que no es interior al dominio no es un máximo local. Como nosotros queremos que un máximo o mínimo global sea siempre un máximo o mínimo local, nos atenemos a las definiciones (9.6) y (9.7).

Es obvio el significado de la expresión valores máximo/mínimo locales de una función y las denominaciones genéricas de **puntos óptimos locales** y **valores óptimos locales**.

El Teorema 7.4 de la Sección 7.2 es muy útil en la búsqueda de máximos y mínimo. Además, para puntos óptimos locales, se sigue verificando que: *en un punto óptimo local del interior del dominio de una función derivable, la derivada debe ser cero*. Este resultado es claro si recordamos que, en la demostración del Teorema 7.4, usamos sólo el comportamiento de la función en un intervalo pequeño centrado en el punto óptimo. Consiguientemente, para hallar los posibles máximos y mínimos locales de una función f definida en un intervalo I, podemos buscar de nuevo entre los siguientes tipos de puntos:

1. puntos interiores de I donde $f'(x) = 0$
2. los dos extremos de I
3. puntos de I para los que no exista f'

Hemos dado así condiciones *necesarias* para que una función f definida en un intervalo I tenga un punto óptimo local. Sin embargo, el problema ahora es: ¿cómo decidimos si un punto que verifica las condiciones necesarias es un máximo o mínimo local, o ninguno de los dos? A diferencia de los puntos óptimos globales, no sirve de nada calcular los valores de la función en los diferentes puntos. Para ver por qué, consideremos de nuevo la función cuya gráfica es la de la Figura 9.8. El punto c_1 es un máximo local y d_2 es un mínimo local, pero el valor de la función en c_1 es *más pequeño* que en d_2.

El test de la derivada primera

Hay dos formas de determinar si un punto estacionario dado es un máximo o mínimo local, o ninguno de los dos. Una de ellas se basa en el estudio del signo de la primera derivada en un entorno del punto estacionario, y es una variante de (9.4) de la Sección 9.2.

Teorema 9.1 (El test de la derivada primera para puntos óptimos locales)

Supongamos que c es un punto estacionario de $y = f(x)$.

(a) Si $f'(x) \geq 0$ en un intervalo (a, c) a la izquierda de c y $f'(x) \leq 0$ en un intervalo (c, b) a la derecha de c, entonces $x = c$ es un máximo local de f.

(b) Si $f'(x) \leq 0$ en un intervalo (a, c) a la izquierda de c y $f'(x) \geq 0$ en un intervalo (c, b) a la derecha de c, entonces $x = c$ es un mínimo local de f.

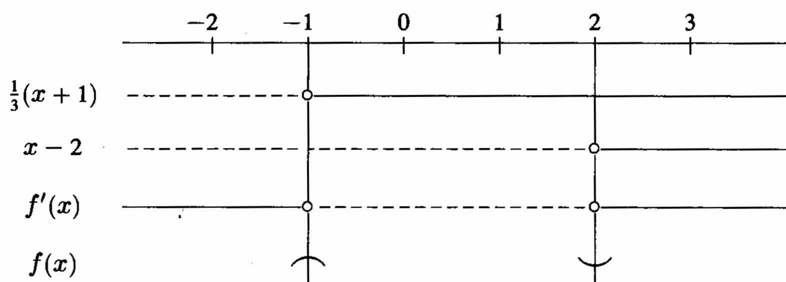
(c) Si $f'(x) > 0$ en un intervalo (a, c) a la izquierda de c y en un intervalo (c, b) a la derecha de c, $x = c$ no es un punto óptimo local de f. Lo mismo ocurre si $f'(x) < 0$ a ambos lados de c.

Solamente el caso (c) no está ya cubierto por (9.4), Sección 9.2. En efecto, si $f'(x) > 0$ en (a, c) y en (c, b), entonces $f(x)$ es estrictamente creciente en $(a, c]$ y en $[c, b)$. Así $x = c$ no puede ser un punto óptimo local.

Ejemplo 9.6

Clasificar los puntos estacionarios de $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$.

Solución: En este caso (véase Ejemplo 9.4) tenemos que $f'(x) = \frac{1}{3}(x + 1)(x - 2)$, luego $x = -1$ y $x = 2$ son los puntos estacionarios. El diagrama de signos de $f'(x)$ es:



Deducimos de este diagrama de signos que $x = -1$ es un máximo local mientras que $x = 2$ es un mínimo local.

Ejemplo 9.7

Clasificar los puntos estacionarios de

$$f(x) = \frac{6x^3}{x^4 + x^2 + 2}$$

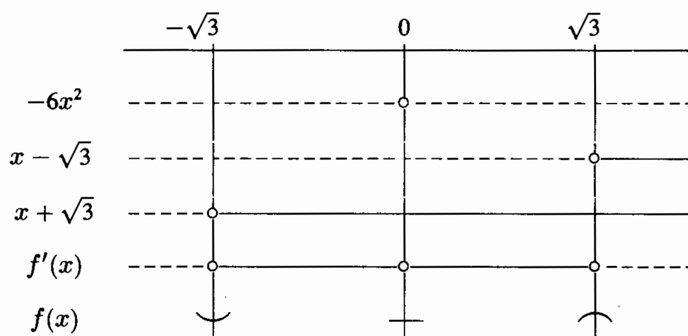
Solución: Como $x^4 + x^2 + 2$ es ≥ 2 para todo x, el denominador no se anula nunca, luego $f(x)$ está definida para todo x. Derivando $f(x)$ se obtiene

$$f'(x) = \frac{-6x^6 + 6x^4 + 36x^2}{(x^4 + x^2 + 2)^2} = \frac{-6x^2(x^4 - x^2 - 6)}{(x^4 + x^2 + 2)^2}$$

Para estudiar las variaciones de signo de $f'(x)$ hay que factorizar $x^4 - x^2 - 6$. De hecho, $x^4 - x^2 - 6 = (x^2)^2 - (x^2) - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 2)$. Por tanto,

$$f'(x) = \frac{-6x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 2)}{(x^4 + x^2 + 2)^2}$$

El denominador y el factor $(x^2 + 2)$ del numerador son siempre positivos. Por consiguiente, las variaciones de signo de $f'(x)$ vienen determinadas por los otros factores del numerador. Se describen en el diagrama de signos que se da a continuación. De su estudio, y de (**a**) en el Teorema 9.1 deducimos que $x = \sqrt{3}$ es un máximo local, y de (**b**) que $x = -\sqrt{3}$ es un mínimo local. Según (**c**), $x = 0$ no es un máximo local ni un mínimo local porque $f'(x) > 0$ en $(-\sqrt{3}, 0)$ y en $(0, \sqrt{3})$.



La gráfica de esta función es la de la Figura 9.9. Nótese que $f(-x) = -f(x)$ para todo x, luego la gráfica es simétrica respecto al origen.

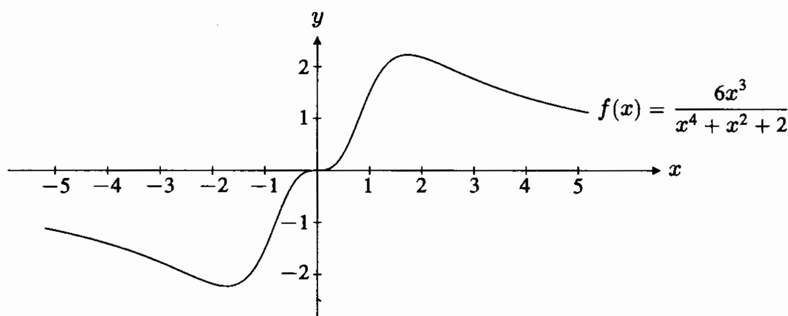


FIGURA 9.9

El test de la derivada segunda

Para la mayor parte de los problemas de interés práctico, en los que hay una función explícita, el Teorema 9.1 va a permitir el decidir cuándo un punto estacionario es un máximo o un mínimo local, o ninguno de los dos. Nótese que el teorema requiere conocer $f'(x)$ en puntos de un entorno del punto estacionario dado. Damos ahora un teorema que describe condiciones suficientes, que dependen solamente de propiedades de la función en el punto estacionario.

Teorema 9.2 (El test de la derivada segunda)

Sea f una función derivable dos veces en un intervalo I. Supongamos que c es un punto interior de I. Entonces:

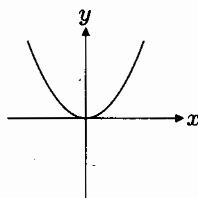
(**a**) $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0 \Longrightarrow c$ es un máximo local estricto.
(**b**) $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0 \Longrightarrow c$ es un mínimo local estricto.
(**c**) $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0 \Longrightarrow$?

Demostración: Probemos la parte (**a**). Supongamos que $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$. Por definición de $f''(c)$, la derivada de $f'(x)$ en c es

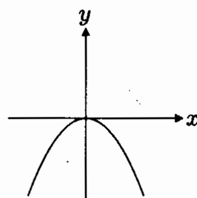
$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h} \tag{$*$}$$

Como $f''(c) < 0$ se deduce de $(*)$ que $f'(c+h)/h < 0$ si $|h|$ es suficientemente pequeño. En particular, si h es un número positivo pequeño, entonces $f'(c+h) < 0$, luego f' es negativa en un intervalo a la derecha de c. De la misma forma vemos que f' es positiva en un intervalo a la izquierda de c. Entonces c es un máximo local estricto de f. Se puede probar la parte (**b**) de manera análoga. Para la parte (**c**), véanse los comentarios a continuación.

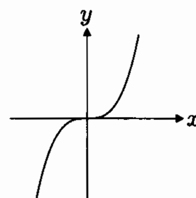
El Teorema 9.2 deja en el aire el caso (**c**) en que $f'(c) = f''(c) = 0$. En este caso puede ocurrir "cualquier cosa". Cada una de las tres funciones $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$ y $f(x) = x^3$ verifica que $f'(0) = f''(0) = 0$. En $x = 0$ tienen, respectivamente, un mínimo (local), un máximo (local) y un punto de inflexión, como se ve en las Figuras 9.10 a 9.12. Normalmente (como aquí), se puede usar el Teorema 9.1 para clasificar los puntos estacionarios en los que $f'(c) = f''(c) = 0$. (Para la definición de punto de inflexión, ver (9.11) en la Sección 9.5.)



$f'(0) = f''(0) = 0$.
0 es un mínimo.
FIGURA 9.10



$f'(0) = f''(0) = 0$.
0 es un máximo.
FIGURA 9.11



$f'(0) = f''(0) = 0$.
0 es un punto de inflexión.
FIGURA 9.12

Se puede usar el Teorema 9.2 para obtener una condición necesaria para puntos óptimos locales que sea útil. Supongamos que f es derivable en el intervalo I y que c es un máximo local interior a I; entonces $f'(c) = 0$. Además no puede ser $f''(c) > 0$ porque, por el Teorema 9.2 (**b**) esta desigualdad implicaría que c es un mínimo local estricto. Por tanto tiene que ser $f''(c) \leq 0$. De la misma manera vemos que $f''(c) \geq 0$ es una condición necesaria de un mínimo local. Brevemente:

$$c \text{ es un máximo local de } f \Longrightarrow f''(c) \leq 0 \tag{9.8}$$

$$c \text{ es un mínimo local de } f \Longrightarrow f''(c) \geq 0 \tag{9.9}$$

La función que estudiamos en el Ejemplo 9.7 es un ejemplo típico de cuándo es conveniente estudiar las variaciones de signo de la primera derivada para clasificar los puntos estacionarios. (El uso del Teorema 9.2 requiere calcular $f''(x)$, que es una expresión complicada).

En los modelos económicos teóricos, es más corriente restringir los signos de las derivadas segundas que postular un cierto comportamiento de las variaciones de signo de las primeras derivadas. Consideramos un ejemplo típico.

Ejemplo 9.8

Si una empresa que produce un bien tiene una función de ingresos $R(Q)$, una función de costes $C(Q)$ y hay un impuesto sobre la venta de t dólares por unidad, entonces $Q^* > 0$ puede maximizar los beneficios sólo si

$$R'(Q^*) = C'(Q^*) + t \tag{$*$}$$

(véase Ejemplo 9.5 de la Sección 9.3, ecuación (5).) Supongamos que $R''(Q^*) < 0$ y $C''(Q^*) > 0$. La ecuación $(*)$ define implícitamente a Q^* como una función derivable de

t. Hallar dQ^*/dt y estudiar su signo. Calcular también la derivada con respecto a t del valor óptimo $\pi(Q^*)$ de la función de beneficios y probar que $d\pi(Q^*)/dt = -Q^*$.

Solución: Derivando $(*)$ con respecto a t obtenemos

$$R''(Q^*)\frac{dQ^*}{dt} = C''(Q^*)\frac{dQ^*}{dt} + 1$$

Despejando dQ^*/dt se tiene

$$\frac{dQ^*}{dt} = \frac{1}{R''(Q^*) - C''(Q^*)} \tag{**}$$

Las hipótesis sobre los signos de R'' y C'' implican que $dQ^*/dt < 0$. Así, el número óptimo de unidades producidas bajará si la tasa del impuesto t aumenta.

El valor óptimo de los beneficios es $\pi(Q^*) = R(Q^*) - C(Q^*) - tQ^*$. Teniendo en cuenta que Q^* depende de t, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\pi^*(Q^*)}{dt} &= R'(Q^*)\frac{dQ^*}{dt} - C'(Q^*)\frac{dQ^*}{dt} - Q^* - t\frac{dQ^*}{dt}\\ &= [R'(Q^*) - C'(Q^*)]\frac{dQ^*}{dt} - Q^* - t\frac{dQ^*}{dt} = -Q^*\end{aligned}$$

(hemos usado $(*)$). Así vemos que, aumentando la tasa del impuesto en una unidad, el beneficio óptimo bajará Q^* unidades. Nótese que los términos de dQ^*/dt desaparecen de esta última expresión a causa de la condición de primer orden $(*)$. Éste es un ejemplo del "teorema de la envolvente" que estudiaremos en la Sección 18.7.

Ejemplo 9.9 (**¿Cuándo hay que cortar un árbol?**)

Consideremos un árbol plantado en el instante $t = 0$ y sea $P(t)$ su valor de mercado en el instante t, donde $P(t)$ es derivable. ¿Cuándo hay que cortar el árbol para hacer máximo el valor actual descontado? Se supone un tipo de interés continuo de $100r\%$ anual.

Solución: Por (8.28), Sección 8.5, el valor actual es

$$f(t) = P(t)e^{-rt} \tag{1}$$

y su derivada es

$$f'(t) = P'(t)e^{-rt} + P(t)(-r)e^{-rt} = e^{-rt}[P'(t) - rP(t)] \tag{2}$$

Una condición necesaria para que $t^* > 0$ haga máxima $f(t)$ es que $f'(t^*) = 0$. En (2) vemos que esto ocurre cuando

$$P'(t^*) = rP(t^*) \tag{3}$$

Por tanto, hay que cortar el árbol en el instante t^* en el que el aumento del valor del árbol en el intervalo de tiempo $(t^*, t^* + 1)$ $(\approx P'(t^*))$ es igual al interés que se obtendría, durante este intervalo de tiempo, al invertir la cantidad $P(t^*)$ a la tasa de interés r $(\approx rP(t^*))$.

Estudiemos la condición de segundo orden. De (2) deducimos que

$$f''(t) = -re^{-rt}[P'(t) - rP(t)] + e^{-rt}[P''(t) - rP'(t)]$$

Evaluando $f''(t)$ en t^* y usando (3) obtenemos

$$f''(t^*) = e^{-rt^*}[P''(t^*) - rP'(t^*)] \tag{4}$$

Suponiendo que $P(t^*) > 0$ y $P''(t^*) < 0$ obtenemos de (3) que $P'(t^*) > 0$. Entonces (4) implica que $f''(t^*) < 0$, luego el t^* definido en (3) es un máximo local. Damos un ejemplo en el Problema 4.

No hemos tenido en cuenta en este ejemplo el uso posterior que se dé al suelo en que se ha plantado el árbol —por ejemplo, para plantar otro árbol (véase Problema 5).

Nota: Aceptando la maximización del valor actual descontado como el criterio razonable para decidir cuándo hay que cortar un árbol, queda automáticamente invalidada la suposición ingenua de que hay que hacerlo cuando el valor de mercado es el mayor. En vez de esto, se corta el árbol un poco antes, por la 'impaciencia" asociada al descuento.

Problemas

1 Consideremos la función f definida por

$$f(x) = x^3 - 12x$$

para todo x. Hallar los dos puntos estacionarios de f y clasificarlos usando los tests de las derivadas primera y segunda.

2 Hallar todos los puntos óptimos locales y los valores óptimos correspondientes para las funciones dadas por las fórmulas siguientes:

(a) $f(x) = -2x - 1$ (b) $f(x) = x^3 - 3x + 8$ (c) $f(x) = x + 1/x$

(d) $f(x) = x^5 - 5x^3$ (e) $f(x) = x^2/2 - 3x + 5$ (f) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

3 Sea f la función dada por

$$f(x) = (1 + 2/x)\sqrt{x+6}$$

(a) Hallar su dominio, sus ceros y los intervalos donde es positiva.

(b) Hallar los posibles puntos óptimos locales y los valores correspondientes.

(c) Estudiar $f(x)$ cuando $x \to 0^-$, $x \to 0^+$ y $x \to \infty$. Hallar también el límite de $f'(x)$ cuando $x \to \infty$. ¿Tiene f un máximo o un mínimo en el dominio?

4 En el problema del Ejemplo 9.9, consideremos el caso en que

$$f(t) = (t^2 + 10t + 25)e^{-0{,}05t} \qquad (t \geq 0)$$

(a) Hallar el valor de t que maximiza $f(t)$. Probar que es el máximo.

(b) Calcular $\lim_{t\to\infty} f(t)$ y dibujar la gráfica de f.

5 Consideremos el Ejemplo 9.9. Supondremos que se planta un nuevo árbol inmediatamente después de cortar el anterior. Si suponemos que se planta un nuevo árbol en los instantes t, $2t$, $3t$, etcétera, el valor actual de todos los árboles será de

$$f(t) = P(t)e^{-rt} + P(t)e^{-2rt} + \cdots$$

(a) Hallar la suma de esta serie geométrica infinita.

(b) Probar que, si $f(t)$ tiene un máximo para un $t^* > 0$, entonces

$$P'(t^*) = r\,\frac{P(t^*)}{1 - e^{-rt^*}}$$

Comparar esta condición con la (3) del Ejemplo 9.9.

6 Hallar los valores de a, b y c para que

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

(a) tenga un mínimo local en $x = 0$

(b) tenga puntos estacionarios en $x = 1$ y $x = 3$

7 La Figura 9.13 contiene la gráfica de la *derivada* de una función f. Razonar cuáles de los puntos a, b, c, d, e son máximos o mínimos locales de f

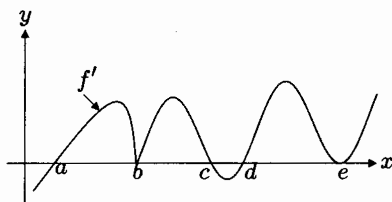


FIGURA 9.13

8 Sea la función f definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$$

(a) Hallar $f'(x)$, $f''(x)$ y los puntos óptimos locales de f.

(b) Hallar los puntos óptimos globales y dibujar la gráfica de f.

(c) Usar los resultados anteriores para hallar los puntos óptimos globales de $g(x) = f(e^x)$.

9 Consideremos la función

$$f(x) = \frac{3}{x^4 - x^2 + 1}$$

(a) Hallar $f'(x)$ y todos los máximos y mínimos locales de f. ¿Tiene f puntos óptimos globales?

(b) Dibujar la gráfica de f.

Problemas avanzados

10 Discutir los puntos óptimos locales de la función $f(x) = x^3 + ax + b$ según los valores de a, b. Usar el resultado para probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene tres raíces reales distintas si y sólo si $4a^3 + 27b^2 < 0$.

11 Sea $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$ definida para todo x.

(a) Calcular $f'(x)$ y $f''(x)$.

(b) Hallar los puntos óptimos locales de f y dibujar la gráfica de f.

9.5 FUNCIONES CONVEXAS Y CÓNCAVAS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

¿Qué información se puede extraer del signo de la derivada segunda? Recuérdese que el signo de la derivada primera determina si una función es creciente o decreciente:

$$f'(x) \geq 0 \text{ en } (a, b) \iff f(x) \text{ es creciente en } (a, b) \tag{1}$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ en } (a, b) \iff f(x) \text{ es decreciente en } (a, b) \tag{2}$$

La derivada segunda $f''(x)$ es la derivada de $f'(x)$. Por tanto:

$$f''(x) \geq 0 \text{ en } (a, b) \iff f'(x) \text{ es creciente en } (a, b) \tag{3}$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ en } (a, b) \iff f'(x) \text{ es decreciente en } (a, b) \tag{4}$$

La Figura 9.14 ilustra la equivalencia (3). La pendiente $f'(x)$ de la tangente es creciente cuando x crece. Por otra parte, la pendiente de la tangente a la gráfica de la Figura 9.15 es decreciente cuando x crece. (Colóquese una regla que se mantenga tangente a la gráfica de la función. Cuando la regla se desliza a lo largo de la curva, de izquierda a derecha, la tangente gira en el sentido contrario a las agujas del reloj en la Figura 9.14 y en el mismo sentido en la Figura 9.15.)

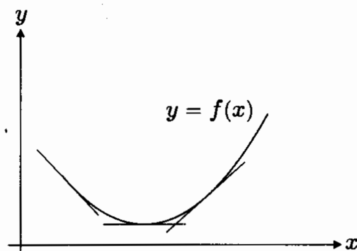


FIGURA 9.14 La pendiente de la tangente crece cuando x crece. $f'(x)$ es creciente.

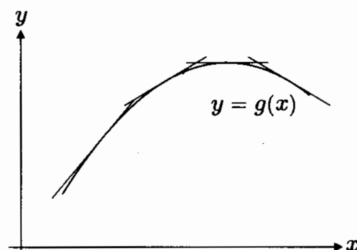


FIGURA 9.15 La pendiente de la tangente decrece cuando x crece. $g'(x)$ es decreciente.

Damos las definiciones siguientes, suponiendo que f es continua en el intervalo I y derivable dos veces en el interior de I (que se designa por I^0):

$$f \text{ es } \textbf{convexa} \text{ en } I \iff f''(x) \geq 0 \text{ para todo } x \text{ de } I^0$$
$$f \text{ es } \textbf{cóncava} \text{ en } I \iff f''(x) \leq 0 \text{ para todo } x \text{ de } I^0 \tag{9.10}$$

La distinción entre convexidad y concavidad de una función es crucial en muchos modelos económicos. Estudiar los casos recogidos en la Figura 9.16.

Ejemplo 9.10

Comprobar la convexidad/concavidad de las funciones siguientes:

$$\textbf{(a)}\ f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \text{y} \quad \textbf{(b)}\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

Solución:

(a) Se tiene que $f'(x) = 2x - 2$ luego $f''(x) = 2$. Como $f''(x) > 0$ para todo x, f es convexa.

(b) Se tiene que $f'(x) = 2ax + b$ luego $f''(x) = 2a$. Si $a = 0$, entonces f es lineal y f convexa y cóncava a la vez. Si $a > 0$ entonces $f''(x) > 0$ luego f es convexa. Si $a < 0$ entonces $f''(x) < 0$, luego f es cóncava. Comparar con las gráficas de la Figura 3.1 de la Sección 3.1.

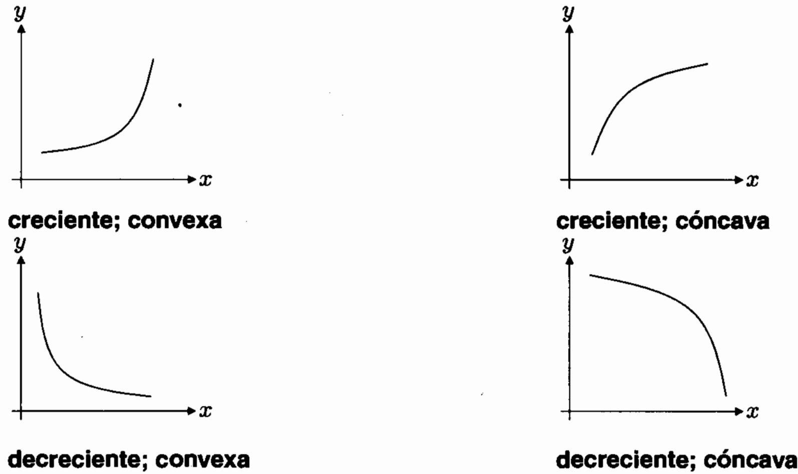


FIGURA 9.16

Ejemplos típicos

Consideramos dos ejemplos típicos de funciones convexas y cóncavas.

Hemos dibujado grosso-modo en la Figura 9.17 la gráfica de la función P que describe la población del mundo, es decir

$$P(t) = \text{población mundial (en miles de millones) en el año } t$$

En la figura se ve que no sólo $P(t)$ es creciente, sino que la tasa de crecimiento aumenta, esto es, cada año el *crecimiento* es mayor. De aquí se deduce evidentemente que $P(t)$ es una función convexa de t.

La gráfica de la Figura 9.18 muestra la cosecha de trigo $Y(N)$ cuando se usan N libras de fertilizante por acre, basándose en experimentos sobre fertilizantes realizados en Iowa en 1952 (véase Ejemplo 9.2 en la Sección 9.2). La función tiene un máximo en $N = N_0 \approx 172$. Un aumento de la cantidad de fertilizante por encima de N_0 originará que la producción de trigo decrezca. Además, $Y(N)$ es cóncava. Si $N < N_0$ el aumentar N en una unidad revertirá en un *aumento* de $Y(N)$, menor cuanto mayor sea N. Por otra parte, si $N > N_0$, el aumentar N en una unidad revertirá en una *disminución* de $Y(N)$, mayor cuanto mayor sea N.

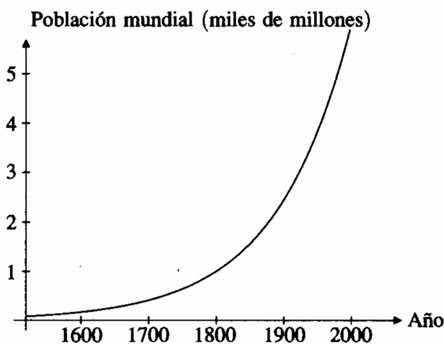


FIGURA 9.17

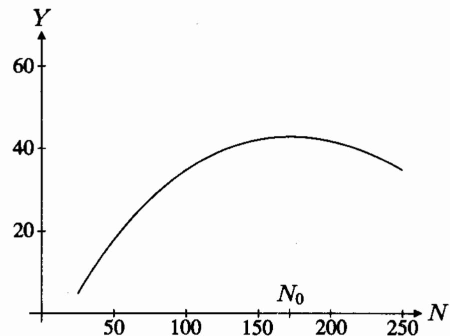


FIGURA 9.18

Ejemplo 9.11

Estudiar la concavidad/convexidad de la función de producción

$$Y = AK^a \qquad (A > 0; \quad 0 < a < 1)$$

definida para todo $K > 0$.

Solución: Derivando Y dos veces con respecto a K se obtiene

$$Y'' = Aa(a-1)K^{a-2}$$

Como $a \in (0,1)$, es $Aa(a-1) < 0$, luego $Y'' < 0$ para todo $K > 0$. Por tanto, la función es cóncava. La Figura 9.19 muestra la gráfica de $Y = AK^a$ para $0 < a < 1$. Si $a > 1$, es $Y'' > 0$ y, por tanto, Y es una función convexa de K, como se ve en la Figura 9.20.

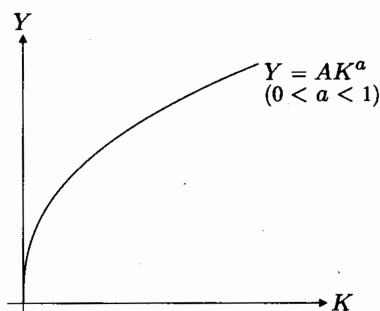


FIGURA 9.19 $Y = AK^a$, $A > 0$, $a \in (0,1)$.

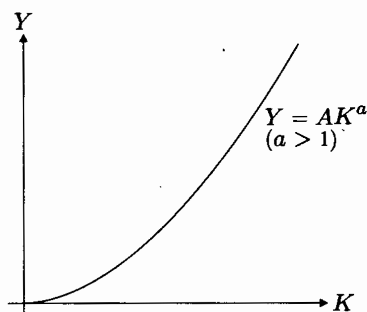


FIGURA 9.20 $Y = AK^a$, $A > 0$, $a > 1$.

Ejemplo 9.12

Supongamos que las funciones U y g son crecientes y cóncavas, luego $U' \geq 0$, $U'' \leq 0$, $g' \geq 0$ y $g'' \leq 0$. Probar que la función compuesta

$$f(x) = g\big(U(x)\big)$$

es también creciente y cóncava.

Solución: Usando la regla de la cadena tenemos que

$$f'(x) = g'\big(U(x)\big) \cdot U'(x) \tag{$*$}$$

Como g' y U' son ≥ 0, es $f'(x) \geq 0$. Por tanto, f es creciente. (*Una transformación creciente de una función creciente es creciente.*)

Para hallar $f''(x)$ hay que derivar el producto de las dos funciones $g'(U(x))$ y $U'(x)$. Por la regla de la cadena, la derivada de $g'(U(x))$ es igual a $g''(U(x)) \cdot U'(x)$. Por tanto,

$$f''(x) = g''[U(x)] \cdot (U'(x))^2 + g'(U(x)) \cdot U''(x) \qquad (**)$$

Como $g'' \leq 0$, $g' \geq 0$ y $U'' \leq 0$, se deduce que $f''(x) \leq 0$. (*Una transformación cóncava creciente de una función cóncava es cóncava*).

Puntos de inflexión

Las funciones que estudiamos en economía son a menudo convexas en unas partes del dominio y cóncavas en otras. Los puntos en que una función cambia de convexa a cóncava, o viceversa, se llaman puntos de inflexión. Los puntos de inflexión constituyen un tema importante de estudio en análisis matemático. Los estudiamos en el caso de las funciones que son derivables al menos dos veces. Su definición formal es como sigue:

Puntos de inflexión

El punto c es un **punto de inflexión** de una función f derivable dos veces cuando existe un intervalo (a, b) centrado en c tal que se verifica una de las dos condiciones siguientes:

$$\text{(a) } f''(x) \geq 0 \text{ si } a < x < c \text{ y } f''(x) \leq 0 \text{ si } c < x < b \qquad (9.11)$$

ó

$$\text{(b) } f''(x) \leq 0 \text{ si } a < x < c \text{ y } f''(x) \geq 0 \text{ si } c < x < b$$

En pocas palabras, $x = c$ es un punto de inflexión si $f''(x)$ cambia de signo en c. También decimos que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica. Se da un ejemplo de un punto de inflexión en la Figura 9.21.

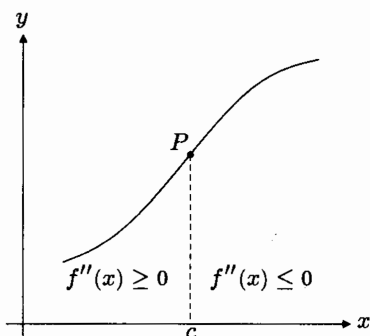


FIGURA 9.21 El punto *P* es un punto de inflexión de la gráfica (*x* = *c* es un punto de inflexión de la función).

Si imaginamos que la Figura 9.21 muestra el perfil de una colina, el punto P donde la pendiente es más pronunciada es un punto de inflexión.

Teorema 9.3 (Test de puntos de inflexión)

Sea f una función con derivada segunda continua en un intervalo I y sea c un punto interior de I.

(a) Si c es un punto de inflexión de f, entonces $f''(c) = 0$.
(b) Si $f''(c) = 0$ y f'' cambia de signo en c, entonces c es un punto de inflexión de f.

Demostración:

(**a**) Como $f''(x) \leq 0$ a un lado de c y $f''(x) \geq 0$ al otro, $f''(c) = 0$.

(**b**) Si f'' cambia de signo en el punto c, entonces c es un punto de inflexión de f según (9.11).

Según el teorema 9.3 (**a**), la condición $f''(c) = 0$ es *necesaria* para que c sea un punto de inflexión. Sin embargo no es suficiente porque $f''(c) = 0$ no implica que f'' cambie de signo en $x = c$. El ejemplo siguiente contiene un caso típico.

Ejemplo 9.13

Demostrar que $f(x) = x^4$ no tiene un punto de inflexión en $x = 0$, a pesar de que su derivada segunda se anula en el origen, i.e., $f''(0) = 0$.

Solución: Se tiene que $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2$, luego $f''(0) = 0$. Pero $f''(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, luego f'' no cambia de signo en $x = 0$. Por tanto, $x = 0$ no es un punto de inflexión. (De hecho, $x = 0$ es un mínimo global como muestra la Figura 9.10.)

Ejemplo 9.14

Hallar los posibles puntos de inflexión de $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$.

Solución: Las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad f''(x) = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}\left(x - \tfrac{1}{2}\right)$$

Por tanto, $f''(x) < 0$ para $x < 1/2$, $f''(1/2) = 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 1/2$. Por el Teorema 9.3(**b**), $x = 1/2$ es un punto de inflexión de f.

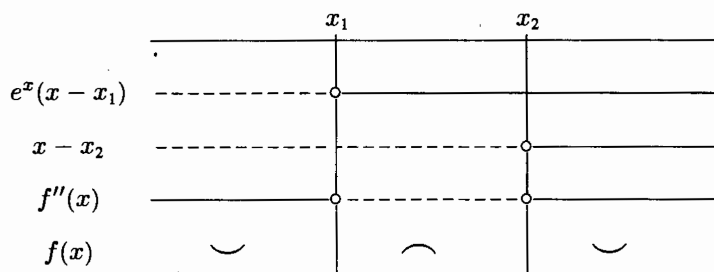
Ejemplo 9.15

Calcular los puntos de inflexión de $f(x) = x^2e^x$. Dibujar la gráfica (véase Ejemplo 8.2, Sección 8.1).

Solución: La derivada primera de f es $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$, luego la segunda es

$$f''(x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 4x + 2) = e^x(x - x_1)(x - x_2)$$

donde $x_1 = -2 - \sqrt{2} \approx -3{,}41$ y $x_2 = -2 + \sqrt{2} \approx -0{,}59$ son las dos raíces de la ecuación $x^2 + 4x + 2 = 0$. Se da más adelante el diagrama de signos de $f''(x)$. En él vemos que f tiene dos puntos de inflexión en $x = x_1$ y $x = x_2$. La gráfica es convexa en los intervalos $(-\infty, x_1]$ y $[x_2, \infty)$, y cóncava en $[x_1, x_2]$. Véase la Figura 9.22 para cuya confección se han utilizado los resultados del Ejemplo 8.2.



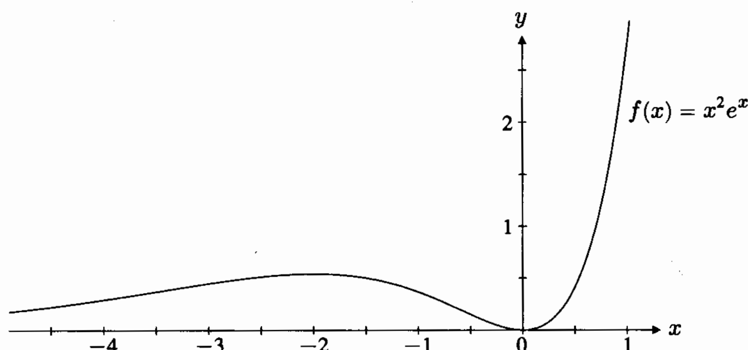


FIGURA 9.22 $f(x) = x^2e^x$

Ejemplo 9.16

Una empresa produce un bien usando sólo una materia prima. Sea $x = f(v)$, $v \geq 0$, el máximo de la producción que se puede obtener a partir de v unidades de materia prima. Se llama a esta f la **función de producción**. Frecuentemente se supone que la productividad marginal $f'(v)$ es creciente hasta un cierto nivel v_0 y luego decrece. La Figura 9.23 contiene un prototipo de una de estas funciones de producción. Si f es derivable dos veces, $f''(v)$ es ≥ 0 en $[0, v_0)$ y ≤ 0 en (v_0, ∞). Así, f es primero convexa y luego cóncava, con un punto de inflexión en v_0. Se da un ejemplo de una función de esta clase en el Problema 9.

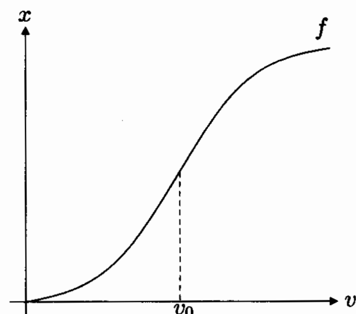


FIGURA 9.23 *f* **es una función de producción.** v_0 **es un punto de inflexión.**

Un resultado útil

Supongamos que $f''(x) \leq 0$ para todo x de un intervalo I. Entonces $f'(x)$ es decreciente en I. Por tanto, si $f'(c) = 0$ en un punto interior c de I, entonces $f'(x)$ debe ser ≥ 0 a la izquierda de c

y $f'(x) \leq 0$ a la derecha. Esto implica que la función es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha. Deducimos de aquí que $x = c$ es un máximo de f en I. La Figura 9.24 recoge esta importante observación. Se tiene el resultado correspondiente para el mínimo de una función convexa.

Teorema 9.4 (Máximos y mínimos de funciones cóncavas y convexas)

Supongamos que f es una función cóncava (convexa) en un intervalo I. Si c es un punto estacionario de f interior a I, entonces c es un máximo (mínimo) de f en I. En pocas palabras, si c es un punto interior de I, entonces

$$f''(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in I \text{ y } f'(c) = 0 \Longrightarrow x = c \text{ es un máximo de } f \text{ en } I \tag{9.12}$$

$$f''(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in I \text{ y } f'(c) = 0 \Longrightarrow x = c \text{ es un mínimo de } f \text{ en } I \tag{9.13}$$

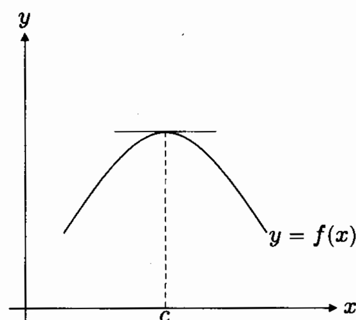


FIGURA 9.24 ***f* es cóncava, *f'*(*c*) = 0 y *c* es un máximo.**

Ejemplo 9.17

Supongamos que el coste total de producción de Q unidades de un bien es

$$C(Q) = aQ^2 + bQ + c, \qquad (Q > 0)$$

donde a y c son constantes positivas. Probar que la función de costes medios $A(Q) = aQ + b + c/Q$ tiene un mínimo en $Q^* = \sqrt{c/a}$ (ver también el Problema 8 de la Sección 9.3).

Solución: La derivada primera de $A(Q)$ es

$$A'(Q) = a - c/Q^2$$

y el único punto estacionario es $Q^* = \sqrt{c/a}$. Como $A''(Q) = 2c/Q^3 > 0$ para todo $Q > 0$, $A(Q)$ es convexa y, por el Teorema 9.4, $Q^* = \sqrt{c/a}$ es el mínimo.

Problemas

1 Determinar la concavidad/convexidad de $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 8x - 3$.

2 Sea f la función definida por $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10$ para todo x.

(a) Hallar $f'(x)$ y $f''(x)$.

(b) Hallar los puntos estacionarios de f y los intervalos en que f es creciente.

(c) Hallar los puntos de inflexión de f y los intervalos de concavidad y convexidad.

3 Una empresa competitiva recibe un precio p por cada unidad de su producción, paga un precio w por cada unidad de su única materia prima, y tiene unos costes fijos de F. Su producción cuando usa x unidades de materia prima es $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Dar la expresión de las funciones de ingresos, costes y beneficios de la empresa.

(b) Escribir la expresión de la condición de primer orden para la maximización del beneficio, dando una interpretación económica de ella.

(c) Comprobar si realmente los beneficios se hacen máximos en un punto que verifique la condición de primer orden.

(d) Explicar cómo cambiarían las respuestas si $f(x) = x^2$.

4 Hallar los puntos óptimos y los puntos de inflexión de la función f cuya gráfica es la de la Figura 9.25

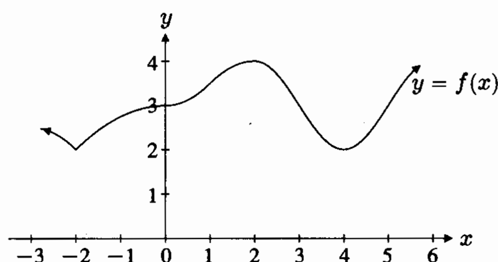


FIGURA 9.25

5 Hallar dónde son convexas las funciones siguientes y determinar los puntos de inflexión:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ (c) $h(x) = xe^x$

6 Hallar a y b para que la gráfica de

$$f(x) = ax^3 + bx^2$$

pase por $(-1, 1)$ y tenga un punto de inflexión en $x = 1/2$.

7 Hallar los intervalos en que la siguiente función cúbica de costes es convexa o cóncava, así como su único punto de inflexión:

$$C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d, \qquad (a > 0; \quad b < 0; \quad c > 0; \quad d > 0)$$

8 En el Ejemplo 9.5, sea $R(Q) = PQ$ y $C(Q) = aQ^b + c$, donde P, a, b y c son constantes positivas con $b > 1$. Hallar el valor de Q que maximiza los beneficios $\pi(Q) = PQ - (aQ^b + c)$. Usar el Teorema 9.4.

Problemas avanzados

9 Con respecto al Ejemplo 9.16, sea $f(v) = (v-1)^{1/3} + 1$ para $v \geq 0$.

(a) Probar que f es una función creciente de v y que $f''(v) > 0$ en $[0, 1)$, $f''(v) < 0$ en $(1, \infty)$. Dibujar la gráfica de f.

(b) Supongamos que el precio unitario del bien es 1 y que el precio que la empresa paga por unidad de materia prima es p. Los beneficios son entonces $\pi(v) = f(v) - pv$. Supongamos que $v_m > 0$ maximiza $\pi(v)$ para el valor dado de $p > 0$. Hallar v_m en función de p.

(c) Dibujar la gráfica de π para el caso $p = 1$. Usar el mismo diagrama que en la parte (a).

(d) Hallar las raíces no negativas de la ecuación $\pi(v) = 0$. ¿Para qué valores de p hay tres raíces reales?

(e) Para todos los valores de p, hallar la solución del problema

$$\text{maximizar } \pi(v) \text{ con la restricción } v \geq 0$$

9.6 MÁS SOBRE FUNCIONES CÓNCAVAS Y CONVEXAS

Hemos definido convexidad y concavidad solamente para funciones dos veces derivables. Una caracterización geométrica alternativa de convexidad y concavidad sugiere una definición más general, que sea válida incluso para funciones no derivables. Esta última definición va a tener la ventaja de poderse extender fácilmente a funciones de varias variables.

> La función f se llama **cóncava** (**convexa**) si el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica no está nunca por encima (debajo) de la gráfica. (9.14)

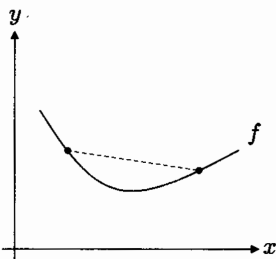


FIGURA 9.26 ***f* es convexa.**

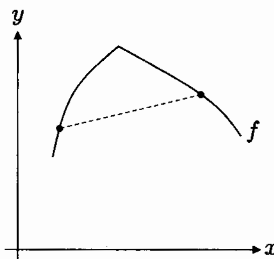


FIGURA 9.27 ***f* es cóncava.**

Las definiciones vienen recogidas en las Figuras 9.26 y 9.27. Se puede demostrar que, para funciones dos veces derivables, la definición (9.14) es equivalente a la de convexidad/concavidad en términos del signo de la derivada segunda.

Para poder usar (9.14) para estudiar la convexidad/concavidad de una función, debemos tener una formulación algebraica de la definición. Para obtenerla, nótese que se puede escribir un punto arbitrario x del intervalo $[a, b]$ $(a < b)$ en la forma

$$x = (1 - \lambda)a + \lambda b = a + \lambda(b - a) \qquad (\lambda \in [0, 1])$$

En efecto, si $b > a$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces $a \leq a + \lambda(b - a) \leq b$. Recíprocamente, si $x \in [a, b]$ y ponemos $\lambda = (x - a)/(b - a)$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$ y

$$(1 - \lambda)a + \lambda b = \left(1 - \frac{x - a}{b - a}\right) a + \frac{x - a}{b - a} b = \frac{ba - a^2 - xa + a^2 + xb - ab}{b - a} = x$$

(Vemos que $\lambda = (x - a)/(b - a)$ es la razón entre la distancia de x a a y la de a a b, o amplitud del segmento.)

Consideremos ahora la Figura 9.28. Queremos calcular el número s. Según la fórmula punto-punto (2.7) de la Sección 2.5, la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene como ecuación

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

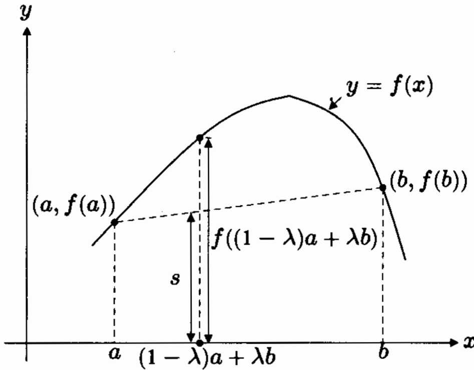


FIGURA 9.28

Sea $x = (1-\lambda)a + \lambda b$. Entonces $y = s$, y así

$$s - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\big[(1-\lambda)a + \lambda b - a\big] = \lambda\big[f(b) - f(a)\big]$$

lo que implica que $s = (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$. Ahora bien, como λ toma todos los valores en $[0, 1]$, el número $(1-\lambda)a + \lambda b$ tomará todos los valores en $[a, b]$. La condición de que el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ esté siempre debajo de la gráfica de f (o contenido en ella) equivale, por tanto, a que $s \leq f((1-\lambda)a+\lambda b)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Ahora deben quedar claras las siguientes definiciones formales:

La función f es **cóncava** en el intervalo I si, para todo $a, b \in I$ y todo $\lambda \in (0, 1)$,

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \geq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \tag{9.15}$$

La función f es convexa si $-f$ es cóncava (véase Figura 9.1). Así se verifica lo siguiente:

La función f es **convexa** en el intervalo I si, para todo $a, b \in I$ y todo $\lambda \in (0, 1)$,

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \tag{9.16}$$

Nótese que estas definiciones son válidas incluso para funciones que no son derivables.

Si en la definición (9.15) exigimos que la desigualdad sea estricta para todo λ cuando $a \neq b$, la función f se llama **estrictamente cóncava**; la gráfica de f estará siempre estrictamente por encima del segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica. Por ejemplo, la función de la Figura 9.28 es estrictamente cóncava. La Figura 9.29 muestra un caso típico de una función cóncava, pero no estrictamente cóncava. La función f es **estrictamente convexa** si $-f$ es estrictamente cóncava.

Ejemplo 9.18

Probar que $f(x) = |x|$ es convexa en $(-\infty, \infty)$. (Véase la gráfica de f en la Figura 9.30.)

Solución: Sean a y b números arbitrarios y sea $\lambda \in [0, 1]$. Tenemos que probar que la diferencia D entre el miembro de la izquierda y el de la derecha de la desigualdad (9.16) es siempre ≤ 0.

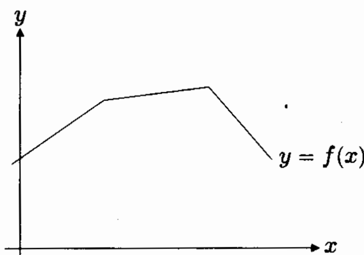


FIGURA 9.29 Cóncava; no estrictamente cóncava.

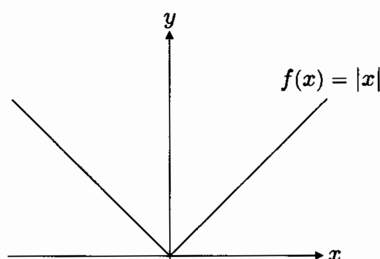


FIGURA 9.30 Convexa; no derivable en $x = 0$.

Puesto que $|xy| = |x|\,|y|$ y $|x+y| \leq |x| + |y|$ para cualquier par de números reales x, y, se deduce que

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)a+\lambda b) - [(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)] &= |(1-\lambda)a+\lambda b| - (1-\lambda)|a| - \lambda|b| \\ &\leq (1-\lambda)|a| + \lambda|b| - (1-\lambda)|a| - \lambda|b| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, $f(x) = |x|$ es convexa.

Para funciones dos veces derivables, es normalmente más fácil estudiar la concavidad/convexidad por el signo de la derivada segunda que usando (9.15) y (9.16). Sin embargo, para razonamientos teóricos, estas definiciones son muy útiles y se generalizan fácilmente a funciones de varias variables.

Ejemplo 9.19

Supongamos que $U(x)$ es una función cóncava definida en un intervalo I. Sea g una función cóncava creciente definida en un intervalo que contenga al rango de U y definamos $f(x) = g(U(x))$. Demostrar que $f(x)$ es cóncava en I. (Hemos probado este resultado en el Ejemplo 9.12 de la Sección 9.5 bajo hipótesis de derivabilidad "innecesarias".)

Solución: Sean $a, b \in I$ con $a < b$ y $\lambda \in [0, 1]$. Por la definición de f,

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) = g(U((1-\lambda)a+\lambda b)) \tag{1}$$

Como U es cóncava,

$$U((1-\lambda)a+\lambda b) \geq (1-\lambda)U(a) + \lambda U(b) \tag{2}$$

Como g es creciente, $r \geq s$ implica $g(r) \geq g(s)$. Así, aplicando g a cada lado de (2) se obtiene

$$g(U((1-\lambda)a+\lambda b)) \geq g\big((1-\lambda)U(a)+\lambda U(b)\big) \tag{3}$$

Por la concavidad de g,

$$\begin{aligned} g((1-\lambda)U(a)+\lambda U(b)) &\geq (1-\lambda)g(U(a))+\lambda g(U(b)) \\ &= (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b) \end{aligned} \quad (4)$$

De (1), (3) y (4), vemos que $f((1-\lambda)a+\lambda b) \geq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$, luego f *es* cóncava.

Un test fácil de concavidad/convexidad es el siguiente, que damos sin demostración:

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 \text{ para todo } x \in (a,b) &\Longrightarrow f(x) \text{ es estrictamente cóncava en } (a,b) \\ f''(x) > 0 \text{ para todo } x \in (a,b) &\Longrightarrow f(x) \text{ es estrictamente convexa en } (a,b) \end{aligned} \quad (9.17)$$

Las implicaciones recíprocas no son ciertas. Por ejemplo, podemos demostrar que $f(x) = x^4$ es estrictamente convexa en el intervalo $(-\infty, \infty)$, pero $f''(x)$ no es > 0 para todo punto porque $f''(0) = 0$.

Nota: Las siguientes funciones están entre las más usuales que son cóncavas (convexas) en sus dominios:

Cóncavas: $ax^2+bx+c \ (a \leq 0)$; $\quad x^a \ (0 \leq a \leq 1,\ x > 0)$; $\quad \ln x \ (x > 0)$ (1)

Convexas: $ax^2+bx+c \ (a \geq 0)$; $\quad x^a \ (a \geq 1,\ x > 0)$; $\quad e^{ax}$; $\quad |x|$ (2)

De las definiciones (9.15) y (9.16) se deduce inmediatamente que combinaciones lineales no negativas $af(x) + bg(x)$ $(a,\ b \geq 0)$ de funciones cóncavas (convexas) $f(x)$ y $g(x)$ son cóncavas (convexas). Usando estos hechos y (1) y (2) podemos determinar a menudo fácilmente la concavidad/convexidad. En las Secciones 17.7 y 17.8, demostraremos otras muchas propiedades que nos servirán de ayuda para decidir la concavidad (convexidad).

Desigualdad de Jensen

Si en la definición (9.15) de función cóncava ponemos $a = x_1$, $b = x_2$, $1-\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$, la definición quedará así: $f(x)$ es cóncava en I si, para todo x_1 y x_2 de I y para todo $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

La desigualdad de Jensen es una generalización de ésta.

Desigualdad de Jensen

Una función f es cóncava en el intervalo I si y sólo si se verifica la desigualdad siguiente para todo $x_1, \ldots, x_n$ de I y para todo $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \quad (9.18)$$

Se obtiene el resultado correspondiente para el caso de una función f convexa cambiando el sentido de la desigualdad de (9.18). La versión vectorial, más general, de este resultado se encuentra en la Sección 17.6.

Ejemplo 9.20 (Suavizado de la producción)
Consideremos una empresa que produce un único bien. El coste de mantenimiento de un nivel anual de producción y durante una fracción λ de año es $\lambda C(y)$, donde $C'(y) > 0$ y $C''(y) \geq 0$ para todo $y \geq 0$. En la práctica, el nivel de producción puede fluctuar a lo largo del año. Probar que, para una producción anual total dada Y, se minimiza el coste total de la empresa eligiendo un flujo constante de producción.

Solución: Supongamos que la empresa elige niveles de producción distintos $y_1, \ldots, y_n$ al año durante fracciones $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ del año, respectivamente. La producción total es $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = Y$, a un coste total de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C(y_i)$. Aplicando la desigualdad de Jensen a la función convexa C se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C(y_i) \geq C\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\Big) = C(Y)$$

El miembro de la derecha es el coste de mantener el nivel de producción constante Y a lo largo del año, y éste es el coste mínimo.

Problemas

1 Supongamos que $f(x) = 1 - x^2$.

(a) Probar que $D = f((1-\lambda)a + \lambda b) - (1-\lambda)f(a) - \lambda f(b)$ se puede escribir en la forma

$$D = \lambda(1-\lambda)(a^2 - 2ab + b^2) = \lambda(1-\lambda)(a-b)^2$$

(b) Si $\lambda \in (0,1)$, ¿qué signo tiene D? ¿Es f cóncava, convexa, o ninguna de las dos?

(c) ¿Es f estrictamente cóncava/convexa?

(d) Comprobar el resultado de la parte (c) usando (9.17).

2 Supongamos que una función f es cóncava. ¿Qué condiciones deben verificar a y b para que $g(x) = af(x) + b$ sea cóncava también?

3 Averiguar si las siguientes funciones con cóncavas/convexas (se supone que $x > 0$ en (b) y (c))

(a) $\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ (b) $2x - 3 + 4\ln x$ (c) $5x^{0,5} - 10x^{1,5}$ (d) $3x^2 - 2x + 1 + e^{-x-3}$

Problemas avanzados

4 Un consumidor hace planes de por vida para decidir una línea de consumo $c_1, \ldots, c_T$ que haga máximo $(1/T)\sum_{t=1}^{T} u(c_t)$ con la restricción presupuestaria $(1/T)\sum_{t=1}^{T} c_t \leq (1/T)\sum_{t=1}^{T} y_t$. En estas expresiones y_t es el flujo de ingresos, y la función de utilidad verifica que $u'(c) > 0$ y $u''(c) < 0$.

(a) Usar la desigualdad de Jensen para demostrar que el consumo óptimo es constante e igual al ingreso medio a lo largo de su vida.

(b) Sustituir $(1/T)\sum_{t=1}^{T} u(c_t)$ por $\sum_{t=1}^{T}(1+r)^{-t}u(c_t)$, con la nueva restricción presupuestaria

$$\sum_{t=1}^{T}(1+r)^{-t}(c_t - y_t) \leq 0$$

donde $r > -1$ es la tasa de interés. Hallar el nuevo flujo óptimo de consumo

5 Probar que, si f y g son cóncavas, entonces

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

es cóncava. Interpretar este resultado. (Nótese que, para x dado, $h(x)$ es el menor de los dos números $f(x)$ y $g(x)$.)

10

Integración

En realidad, los modelos desempeñan básicamente el mismo papel en la economía que en la moda. Suministran un marco articulado en el que exhibir el material de manera ventajosa, . . . un papel útil, pero acompañado de los peligros que el diseñador puede aportar con su inclinación personal por el modelo, mientras que el cliente puede olvidar que el modelo está más aguzado que la realidad.
—*J. H. Drèze* (1984)

El problema geométrico de hallar la inclinación de una curva en un punto nos lleva al concepto de derivada de una función. Luego ocurre que la derivada tiene interpretaciones importantes además de la geométrica. En economía es particularmente importante el hecho de que la derivada representa la tasa de variación de una función.

Se puede introducir también geométricamente el concepto principal que se estudia en este capítulo. En efecto, comenzamos por el problema de medir áreas de ciertas regiones planas que están limitadas no sólo por rectas. La resolución de este problema necesita del concepto de integral definida de una función en un intervalo. Este concepto tiene también un cierto número de interpretaciones importantes, además de la geométrica.

Hacia el año 360 AC, el matemático griego Eudoxo inventó un método general para hallar áreas de regiones planas, que fue conocido como el *método de exhaución.* La idea era inscribir y circunscribir a la región (por ejemplo, un círculo) regiones geométricas más sencillas, como rectángulos, triángulos o regiones poligonales generales —cuyas áreas sepamos medir. Ahora bien, si el área de la región inscrita y la de la circunscrita tienden al mismo límite cuando se van refinando los polígonos, este límite es, por definición, el *área* de la región.

Eudoxo y Arquímedes usaron el método de exhaución para hallar las áreas de un cierto número de regiones planas concretas. Se desarrollaron métodos similares para hallar longitudes de curvas y volúmenes de sólidos. Sin embargo, ocurrió que el método de exhaución sólo valía en un número limitado de casos, en parte por la entidad de los problemas algebraicos que el proceso requiere. Pasaron casi 1.900 años desde Arquímedes antes de que nadie hiciera progresos significativos en la medición de áreas de regiones planas. En el siglo XVIII, se inventó un nuevo método para

calcular áreas, llamado integración, que está estrechamente relacionado con el cálculo diferencial. El demostrar la relación entre derivación e integración es uno de los logros principales del análisis matemático. Se ha dicho incluso que éste es el descubrimiento aislado más importante de la ciencia. Barrow, que fue maestro de Newton, y Newton y Leibniz en particular, son los matemáticos cuyos nombres están asociados a este descubrimiento.

Después de estos comentarios introductorios, comenzamos por resolver el problema geométrico de hallar las áreas de ciertas regiones planas concretas. Después desarrollamos la teoría de la integración basándonos en estos fundamentos.

10.1 ÁREAS BAJO CURVAS

El problema que vamos a estudiar en esta Sección se ilustra en la Figura 10.1. Se puede formular así: ¿Cómo calcular el área A bajo la gráfica de f desde a a b, suponiendo que $f(x)$ es positiva y continua?

Para responder a esta cuestión, introducimos primero la función $A(x)$ que mide el área bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, x]$, como se ve en la Figura 10.2. Claramente, $A(a) = 0$, porque no hay área de a hasta a, y el área de la Figura 10.1 es $A = A(b)$.

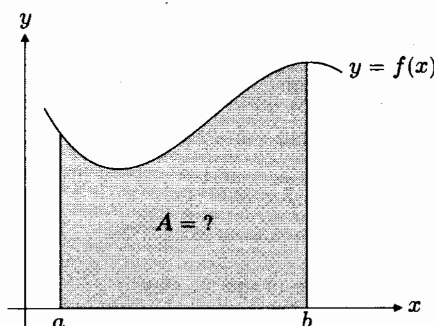


FIGURA 10.1

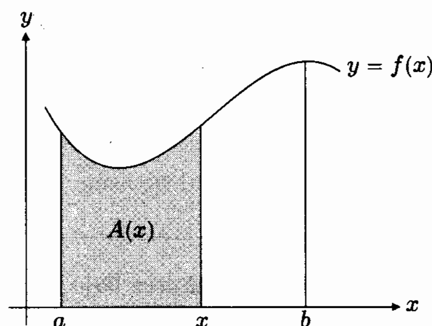


FIGURA 10.2

Puesto que f es siempre positiva, es obvio en la Figura 10.2 que $A(x)$ crece cuando x crece. Supongamos que hacemos crecer x en una cantidad positiva Δx. Entonces $A(x + \Delta x)$ es el área bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, x + \Delta x]$. Por tanto, $A(x + \Delta x) - A(x)$ es el área ΔA bajo la curva en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, como se ve en la Figura 10.3.

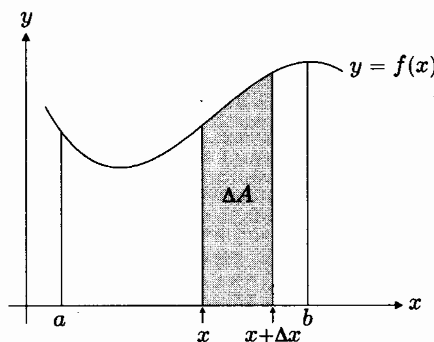


FIGURA 10.3

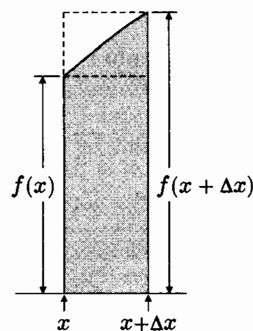


FIGURA 10.4

La Figura 10.4 representa al área ΔA vista con una lupa de aumento. No puede ser mayor que el área del rectángulo de lados Δx y $f(x+\Delta x)$, y no menor que el área del rectángulo de lados Δx y $f(x)$. Por tanto, para todo $\Delta x > 0$,

$$f(x)\,\Delta x \leq A(x+\Delta x) - A(x) \leq f(x+\Delta x)\,\Delta x \qquad (*)$$

De aquí se deduce que

$$f(x) \leq \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq f(x+\Delta x) \qquad (**)$$

(Si $\Delta x < 0$, las desigualdades $(*)$ cambian de sentido, mientras que las de $(**)$ no. El razonamiento siguiente vale igualmente para $\Delta x < 0$.) Consideremos qué ocurre con $(**)$ cuando $\Delta x \to 0$. El intervalo $[x, x+\Delta x]$ se reduce al único punto x y, por la continuidad de f, el valor $f(x+\Delta x)$ tiende a $f(x)$. El cociente de Newton $[A(x+\Delta x) - A(x)]/\Delta x$, encajado entre $f(x)$ y algo que tiende a $f(x)$, debe tender por tanto a $f(x)$ cuando $\Delta x \to 0$.[1] Así llegamos a la notable conclusión de que la función $A(x)$ que mide el área bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, x]$ es derivable y su derivada es

$$A'(x) = f(x) \qquad \text{(para todo } x \in (a,b))$$

Esto prueba que *la derivada de la función de área $A(x)$ es la función $f(x)$ de "altura" de la curva.*

Supongamos que $F(x)$ es otra función continua con derivada $f(x)$, luego $F'(x) = A'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Como $(d/dx)[A(x) - F(x)] = A'(x) - F'(x) = 0$, se debe verificar que $A(x) = F(x) + C$ para una cierta constante C (véase Teorema 7.7 de la Sección 7.3). Recuérdese que $A(a) = 0$. Por tanto, $0 = A(a) = F(a) + C$, luego $C = -F(a)$. Por tanto,

$$A(x) = F(x) - F(a) \quad \text{cuando} \quad F'(x) = f(x) \qquad (10.1)$$

Esto nos lleva al siguiente

Método para hallar el área bajo la curva $y = f(x)$ y sobre el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$: (10.2)

1. Hallar una función arbitraria F que sea continua en $[a,b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.
2. El área buscada es entonces $F(b) - F(a)$.

Se llama **antiderivada** de f a toda función F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x de un intervalo abierto. Nótese que siempre hay infinitas antiderivadas de f porque $(d/dx)[F(x) + C] = F'(x) = f(x)$, para toda constante real C.

Ejemplo 10.1

Calcular el área bajo la parábola $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$.

Solución: El área buscada es la región sombreada A de la Figura 10.5. Siguiendo lo indicado en el paso 1 de (10.2), debemos hallar una función que tenga a x^2 por derivada. Buscamos una función potencial. De hecho $(d/dx)ax^n = anx^{n-1} = x^2$ implica $n = 3$ y $a = 1/3$. Así,

[1] La función f de las figuras es creciente en el intervalo $[x, x+\Delta x]$. Es fácil ver que se llega a la misma conclusión cualquiera que sea el comportamiento de f en el intervalo $[x, x+\Delta x]$. Sustitúyase en el miembro de la izquierda de $(*)$ $f(x)$ por $f(c)$, donde c es el máximo de la función continua f en el intervalo; y en el miembro de la derecha, cámbiese $f(x+\Delta x)$ por $f(d)$, donde d es el máximo de f en $[x, x+\Delta x]$.

tomando $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ es $F'(x) = x^2$. Por tanto, el área buscada es

$$A = F(1) - F(0) = \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 - \tfrac{1}{3} \cdot 0^3 = \tfrac{1}{3}$$

La Figura 10.5 sugiere que esta respuesta es razonable, porque la región sombreada parece tener aproximadamente 1/3 del área de un cuadrado de lado 1.

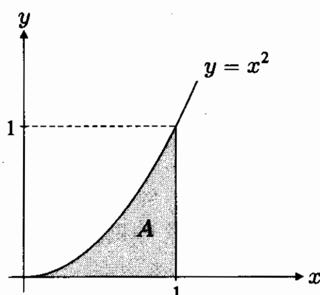


FIGURA 10.5

Nota: Si el lector tratase de calcular el área de la Figura 10.5 por el método de exhaución, se daría cuenta de la extrema sencillez del método (10.2).

Ejemplo 10.2

Hallar el área A bajo la recta $f(x) = cx + d$ en el intervalo $[a, b]$. (Suponemos que se eligen las constantes c y d de tal forma que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$.)

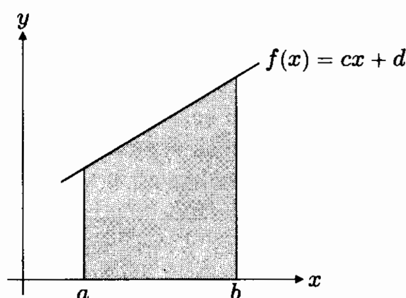


FIGURA 10.6

Solución: Se representa el área en la Figura 10.6. Si se pone $F(x) = \frac{1}{2}cx^2 + dx$, entonces $F'(x) = cx + d$ y así

$$\begin{aligned} A = F(b) - F(a) &= (\tfrac{1}{2}cb^2 + db) - (\tfrac{1}{2}ca^2 + da) \\ &= \tfrac{1}{2}c(b^2 - a^2) + d(b - a) \end{aligned}$$

Hallar la misma área de otra forma y comprobar que se obtiene el mismo resultado.

El razonamiento por el que se justificó (10.2) se basaba en consideraciones intuitivas. Sin embargo, el concepto de área al que da lugar coincide con el usual en regiones limitadas por rectas. El Ejemplo 10.2 es un caso paradigmático.

Definimos formalmente el área bajo la gráfica de una función continua y no negativa f en el intervalo $[a, b]$ como el número $F(b) - F(a)$, donde $F'(x) = f(x)$. Supongamos que $G(x)$ es cualquier otra función tal que $G'(x) = f(x)$ para $x \in (a, b)$. Entonces $G(x) = F(x) + C$ para una constante C. Por tanto,

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

Este argumento nos dice que el área que estamos calculando mediante (10.2) es independiente de la antiderivada de f elegida. Además, por el Teorema 10.1 de la Sección 10.3, *toda* función f continua en $[a, b]$ tiene una antiderivada.

¿Qué ocurre si $f(x)$ tiene valores negativos en $[a,b]$?

Hemos supuesto anteriormente que f era continua y con valores positivos. Consideremos el caso en que f es una función definida y continua en $[a, b]$ con $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$. La gráfica de f, el eje x, y las rectas $x = a$ y $x = b$ siguen limitando un área. Si $F'(x) = f(x)$, definimos este área como $-[F(b) - F(a)]$. Damos esta definición porque queremos que el área de una región sea siempre positiva.

Ejemplo 10.3

Calcular el área sombreada en la Figura 10.7. Se trata del área entre el eje x y la gráfica de $f(x) = e^{x/3} - 3$ en el intervalo $[0, 3\ln 3]$.

Solución: Tenemos que hallar una función $F(x)$ cuya derivada sea $e^{x/3} - 3$. Por prueba y error llegamos a la conclusión de que $F(x) = 3e^{x/3} - 3x$. (Comprobar que $F'(x) = e^{x/3} - 3$). El área es por tanto igual a

$$-[F(3\ln 3) - F(0)] = -(3e^{\ln 3} - 3 \cdot 3\ln 3 - 3e^0) = -(9 - 9\ln 3 - 3) = 9\ln 3 - 6 \approx 3{,}89$$

¿Es razonable la respuesta? Sí, porque el conjunto sombreado de la Figura 10.7 parece tener algo menos de 4 unidades de área.

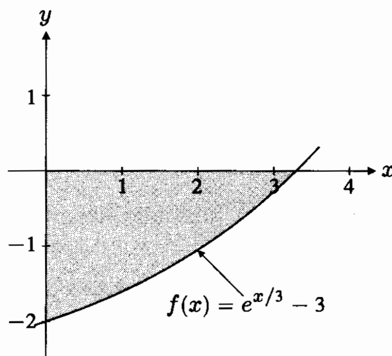


FIGURA 10.7

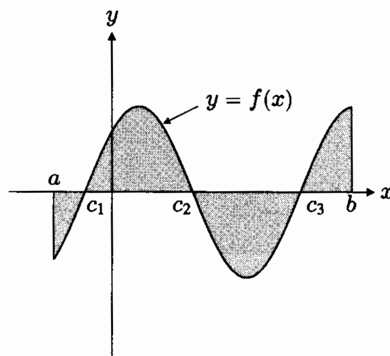


FIGURA 10.8

Supongamos que f está definida y es continua en $[a, b]$, positiva en algunos subintervalos, y negativa en otros, como en la Figura 10.8. El área total limitada por la gráfica de f, el eje x, y las rectas $x = a$ y $x = b$ se calcula entonces determinando las áreas positivas en cada subintervalo $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, $[c_2, c_3]$ y $[c_3, b]$ según las definiciones anteriores, y luego sumándolas

Problemas

1 Calcular el área bajo la gráfica de $f(x) = x^3$ en $[0, 1]$ usando (10.2).

2 En cada uno de los casos siguientes, dibujar grosso-modo la gráfica de f y sombrear el área del conjunto limitado por el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de f. Calcular también el área de ese conjunto.

(a) $f(x) = 3x^2$ en $[0, 2]$ (b) $f(x) = x^6$ en $[0, 1]$

(c) $f(x) = e^x$ en $[-1, 1]$ (d) $f(x) = 1/x^2$ en $[1, 10]$

3 Calcular el área A limitada por la gráfica de $f(x) = 1/x^3$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = -1$. (Hacer un dibujo.)

4 Hallar el área A limitada por la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

10.2 INTEGRALES INDEFINIDAS

El problema de calcular áreas bajo gráficas de funciones nos ha conducido al de hallar *antiderivadas*. Esto es, dada una función f se trata de hallar otra F cuya derivada sea f.

Aunque el nombre de antiderivada es muy apropiado, seguiremos la práctica tradicional y llamaremos a F una **integral indefinida** de f. Se usa el símbolo $\int f(x)\,dx$ para designar una integral indefinida de f. Dos funciones con la misma derivada en un intervalo deben diferir en una constante, luego escribimos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{cuando} \qquad F'(x) = f(x) \tag{10.3}$$

Por ejemplo,

$$\int x^3\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 + C \qquad \text{porque} \qquad \left(\tfrac{1}{4}x^4\right)' == x^3$$

donde ( )$'$ designa derivación. El símbolo $\int$ es el **signo integral**, la función $f(x)$ de (10.3) es el **integrando** y C es la **constante de integración**. La parte dx en la notación de la integral indica que x es la **variable de integración**.

Sea a un número fijo $\neq -1$. Como la derivada de $x^{a+1}/(a+1)$ es x^a, se tiene

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \qquad (a \neq -1) \tag{10.4}$$

Éste es un resultado muy importante sobre integración, que nos dice que la integral indefinida de cualquier potencia de x (excepto x^{-1}) se halla aumentando en 1 el exponente de x, dividiendo por el nuevo exponente y sumando a todo la constante de integración. Algunos ejemplos son:

(a) $\displaystyle\int x\,dx = \int x^1\,dx = \frac{1}{1+1}x^{1+1} + C = \frac{1}{2}x^2 + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

Cuando $a = -1$, la fórmula (10.4) no vale porque habría que dividir por cero en el miembro de la derecha, y eso no tiene sentido. El integrando es $1/x$ y el problema consiste en hallar una función cuya derivada sea $1/x$. Sabemos que $\ln x$ verifica esta propiedad, pero está definida solamente para $x > 0$. Sin embargo, $\ln(-x)$ está definida para $x < 0$ y, por la regla de la cadena, su derivada es

$[1/(-x)]\,(-1) = 1/x$. Recuérdese, asimismo, que $|x| = x$ cuando $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$. Así, tanto si integramos sobre un intervalo en el que $x > 0$ como si lo hacemos para $x < 0$, tenemos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \tag{10.5}$$

Consideremos ahora la función exponencial. La derivada de e^x es e^x. Así, $\int e^x\,dx = e^x + C$. Más generalmente,

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad (a \neq 0) \tag{10.6}$$

porque la derivada de $(1/a)e^{ax}$ es e^{ax}.

Cuando $a > 0$ se puede escribir $a^x = e^{x\ln a}$. El resultado que se da a continuación es una aplicación de (10.6) cuando $\ln a \neq 0$ (esto es, cuando $a \neq 1$):

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \qquad (a > 0 \text{ y } a \neq 1) \tag{10.7}$$

Algunas reglas generales

Dos reglas de derivación son $(aF(x))' = aF'(x)$ y $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x)$. De ellas se deducen inmediatamente las dos reglas de integración siguientes:

Propiedad del múltiplo constante

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad (a \text{ es una constante real}) \tag{10.8}$$

La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{10.9}$$

Usando repetidas veces estas dos propiedades obtenemos la regla general siguiente

$$\int [a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)]\, dx = a_1 \int f_1(x)\, dx + \cdots + a_n \int f_n(x)\, dx \tag{10.10}$$

que da la integral indefinida de cualquier combinación lineal de funciones continuas.

Ejemplo 10.4

Calcular la integral $\int (3x^4 + 5x^2 - 2)\, dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}\int (3x^4 + 5x^2 - 2)\, dx &= 3\int x^4\, dx + 5\int x^2\, dx - 2\int 1\, dx \\ &= 3\left(\tfrac{1}{5}x^5 + C_1\right) + 5\left(\tfrac{1}{3}x^3 + C_2\right) - 2(x + C_3) \\ &= \tfrac{3}{5}x^5 + \tfrac{5}{3}x^3 - 2x + 3C_1 + 5C_2 - 2C_3 \\ &= \tfrac{3}{5}x^5 + \tfrac{5}{3}x^3 - 2x + C\end{aligned}$$

Como C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias, $3C_1 + 5C_2 - 2C_3$ sigue siendo una constante arbitraria. Así la hemos sustituido por C en la última línea, por sencillez.

No hace falta escribir todos los pasos intermedios de una integral de este tipo. Escribimos más sencillamente

$$\begin{aligned}\int (3x^4 + 5x^2 - 2)\, dx &= 3\int x^4\, dx + 5\int x^2\, dx - 2\int 1\, dx \\ &= \frac{3}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 2x + C\end{aligned}$$

Podemos *derivar* funciones muy complicadas usando sistemáticamente las reglas adecuadas. Por el contrario, calcular la integral indefinida de funciones, incluso muy sencillas, puede ser una tarea muy difícil o imposible. Sin embargo, es muy sencillo comprobar cuándo una integral indefinida que se ha calculado es correcta: basta derivarla y ver si se obtiene el integrando.

Ejemplo 10.5

Comprobar que

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\, dx = \frac{2}{3a^2}(ax - 2b)\sqrt{ax+b} + C$$

en un intervalo donde $ax + b > 0$.

Solución: Escribimos $F(x) = (2/3a^2)(ax - 2b)\sqrt{ax+b} = (2/3a^2)u \cdot v$, donde $u = ax - 2b$ y $v = \sqrt{ax+b}$. Entonces

$$F'(x) = \frac{2}{3a^2}(u'v + uv')$$

donde, introduciendo la nueva variable $w = ax + b$, tenemos

$$u' = a, \qquad v = \sqrt{ax+b} = \sqrt{w} \quad \Longrightarrow \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{w}}\, w' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

Por tanto,

$$F'(x) = \frac{2}{3a^2}\left[a\sqrt{ax+b} + (ax-2b)\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}\right]$$
$$= \frac{2}{3a^2}\left[\frac{2a(ax+b)+(ax-2b)a}{2\sqrt{ax+b}}\right] = \frac{2}{3a^2}\frac{2a^2x+2ab+a^2x-2ab}{2\sqrt{ax+b}}$$
$$= \frac{2}{3a^2}\frac{3a^2x}{2\sqrt{ax+b}} = \frac{x}{\sqrt{ax+b}}$$

lo que prueba que la integral dada es correcta.

Problemas con valores iniciales

Como hemos visto anteriormente, hay infinitas "antiderivadas" o integrales indefinidas de una función dada, esto es, funciones cuya derivada es la dada. Por ejemplo, la derivada de $\frac{1}{5}x^5+C$ es x^4 sea cual sea la constante C. Las gráficas de estas funciones son traslaciones unas de otras en la dirección del eje y. Dado un punto arbitrario (x_0, y_0), existe una y sólo una de esas curvas que pasa por (x_0, y_0).

Ejemplo 10.6

Hallar todas las funciones $F(x)$ tales que

$$F'(x) = -(x-1)^2 \tag{1}$$

y dibujar algunas de sus gráficas en el plano xy. En particular, hallar la función cuya gráfica pasa por el punto $(x_0, y_0) = (1,1)$.

Solución: La ecuación (1) implica que

$$F(x) = \int -(x-1)^2\,dx = -\tfrac{1}{3}(x-1)^3 + C$$

Todos los valores de C son posibles. La Figura 10.9 contiene algunas de las gráficas. Para hallar la curva que pasa por $(1,1)$ se resuelve la ecuación $F(1) = 1$, ó

$$-\tfrac{1}{3}(1-1)^3 + C = 1$$

La solución es $C = 1$, luego la función buscada es

$$F(x) = 1 - \tfrac{1}{3}(x-1)^3$$

Se puede formular la última cuestión del Ejemplo 10.6 de la manera siguiente: hallar la única función $F(x)$ tal que $F'(x) = -(x-1)^2$ y $F(1) = 1$. Se llama a esto un **problema con valores iniciales** y a $F(1) = 1$ se le llama una **condición inicial**.

Ejemplo 10.7

El coste marginal de producción de x unidades de un bien de consumo es de $1 + x + 3x^2$ y los costes fijos son 150. Hallar la función de costes totales.

Solución: Llamando $c(x)$ a la función de costes totales tenemos

$$(1)\quad c'(x) = 1 + x + 3x^2 \quad \text{y} \quad (2)\quad c(0) = 150$$

porque $c(0)$ es el coste que se tiene aun cuando no se produzca nada. Integrando (1) se obtiene

$$c(x) = x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 + C \tag{3}$$

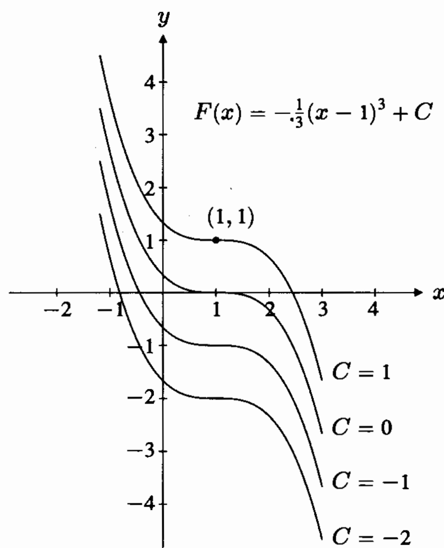


FIGURA 10.9 $F(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^3 + C$.

Haciendo $x = 0$ en (3) se obtiene $c(0) = C$ y así $C = 150$ por (2). Por tanto, la función de costes totales que se busca es

$$c(x) = x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 + 150$$

Hasta ahora hemos usado siempre x como variable de integración. En economía, las variables tienen a menudo otros nombres.

Ejemplo 10.8

Calcular las integrales indefinidas siguientes:

$$\textbf{(a)} \quad \int \frac{B}{r^{2,5}}\,dr \qquad\qquad \textbf{(b)} \quad \int (a + bq + cq^2)\,dq$$

Solución: (**a**) Poniendo $B/r^{2,5} = Br^{-2,5}$ vemos que se puede aplicar la fórmula (10.4), y obtenemos

$$\int \frac{B}{r^{2,5}}\,dr = B\int r^{-2,5}\,dr = B\frac{1}{-2,5+1}\,r^{-2,5+1} + C = -\frac{B}{1,5}\,r^{-1,5} + C$$

(**b**) $\int (a + bq + cq^2)\,dq = aq + \frac{1}{2}\,bq^2 + \frac{1}{3}\,cq^3 + C$

Problemas

1 Calcular las integrales siguientes usando (10.4):

(a) $\displaystyle\int x^{13}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$

2 Calcular las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int (t^3 + 2t - 3)\,dt$ (b) $\displaystyle\int (x-1)^2\,dx$ (c) $\displaystyle\int (x-1)(x+2)\,dx$

(d) $\displaystyle\int (x+2)^3\,dx$ (e) $\displaystyle\int (e^{3x} - e^{2x} + e^x)\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x + 4}{x}\,dx$

3 Calcular las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int \frac{(y-2)^2}{\sqrt{y}}\,dy$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int x(1+x^2)^{15}\,dx$

(*Indicación:* En (a), desarrollar $(y-2)^2$ y luego dividir cada término por $\sqrt{y}$. En (b), efectuar la división (larga) de polinomios. En (c), ¿cuál es la derivada de $(1+x^2)^{16}$?)

4 (a) Probar que

$$\int (ax+b)^p\,dx = \frac{1}{a(p+1)}(ax+b)^{p+1} + C \qquad (a \neq 0,\ p \neq -1)$$

(b) Calcular las integrales siguientes:

(i) $\displaystyle\int (2x+1)^4\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \sqrt{x+2}\,dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$

5 Probar que

$$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)(ax+b)^{3/2} + C$$

6 Resolver los siguientes problemas con valores iniciales:

(a) Calcular $F(x)$ si $F'(x) = \frac{1}{2} - 2x$ y $F(0) = 1/2$.

(b) Calcular $F(x)$ si $F'(x) = x(1-x^2)$ y $F(1) = 5/12$.

7 En la fabricación de un producto, el coste marginal de producir x unidades es de $c'(x) = 3x + 4$. Si los costes fijos son 40, hallar la función de costes totales $c(x)$.

8 Hallar la forma general de una función f cuya derivada segunda es x^2. Si además exigimos que $f(0) = 1$ y $f'(0) = -1$, ¿cuál sería $f(x)$?

9 (a) Supongamos que $f''(x) = 2$ para todo x y $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$. Hallar primero $f'(x)$ y luego $f(x)$.

(b) Análogamente, supongamos que $f''(x) = 1/x^2 + x^3 + 2$ para $x > 0$ y $f(1) = 0$, $f'(1) = 1/4$. Hallar $f(x)$.

10.3 LA INTEGRAL DEFINIDA

Sea f una función continua definida en el intervalo $[a,b]$. Supongamos que la función F es continua en $[a,b]$ y con derivada $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. La diferencia $F(b) - F(a)$ se llama la **integral definida** de f en $[a,b]$. Como ya advertimos en la Sección 10.1, esta diferencia no depende de qué integral indefinida F elijamos entre las infinitas posibles. Por tanto, la integral definida de f en $[a,b]$ es un número que depende solamente de la función f y de los números a y b. La designamos por

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{10.11}$$

Esta notación explicita la función $f(x)$ que se integra (llamada el **integrando**) y el intervalo de integración $[a,b]$. Los números a y b se llaman, respectivamente, **límite inferior de integración** y **límite superior de integración**. La letra x es una **variable muda** en el sentido de que la integral es independiente de su nombre. Por ejemplo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(\xi)\,d\xi$$

En otros escritos de matemáticas, la diferencia $F(b) - F(a)$ se designa frecuentemente por $F(x) \Big|_a^b$, o por $[F(x)]_a^b$. Pero $\Big|_a^b F(x)$ es corriente también, y ésta es la notación que vamos a usar. Así:

Definición de la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a) \tag{10.12}$$

donde $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

La definición (10.12) no requiere que $a < b$. Sin embargo, si $a > b$ y $f(x)$ es positiva en el intervalo $[b, a]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número negativo.

Nótese que hemos introducido el concepto de integral definida sin darle necesariamente una interpretación geométrica. La razón es que se pueden dar interpretaciones diferentes dependiendo del contexto. Por ejemplo, si $f(r)$ es una función de densidad de la renta, entonces $\int_a^b f(r)\,dr$ es la proporción de personas con rentas entre a y b. (Véase la sección siguiente).

Los resultados de los Ejemplos 10.1 y 10.2 se pueden escribir de la forma siguiente, con la nueva notación:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \Big|_0^1 \tfrac{1}{3}x^3 = \tfrac{1}{3}$$

$$\int_a^b (cx + d)\,dx = \Big|_a^b \left(\tfrac{1}{2}cx^2 + dx\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}cb^2 + db\right) - \left(\tfrac{1}{2}ca^2 + da\right) = \tfrac{1}{2}c(b^2 - a^2) + d(b - a)$$

Aunque son semejantes las notaciones para integrales definidas e indefinidas se trata de conceptos completamente diferentes. De hecho, $\int_a^b f(x)\,dx$ designa a un número, mientras que $\int f(x)\,dx$ representa a una función cualquiera de las del conjunto infinito formado por las funciones cuya derivada es $f(x)$. La relación entre ambas es que $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ en un intervalo I si y sólo si $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ para todo a, b de I.

Propiedades de la integral definida

Se pueden deducir unas cuantas propiedades de la definición (10.12) de integral definida. Si f es una función continua en un intervalo que contiene a, b, c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{10.13}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{10.14}$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \qquad (\alpha \text{ es un número arbitrario}) \tag{10.15}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{10.16}$$

Todas estas reglas se deducen fácilmente de (10.12). Por ejemplo, se puede probar (10.16) de la forma siguiente. Sea F continua en $[a,b]$, y supongamos que $F'(x) = f(x)$ para todo x del interior de un intervalo lo suficientemente amplio para que incluya a a, b y c. Entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Cuando se interpreta la integral definida como un área, (10.16) refleja la propiedad de aditividad de las áreas, como se ve en la Figura 10.10. Por supuesto, (10.16) se generaliza fácilmente al caso de una partición del intervalo $[a,b]$ en un número finito arbitrario de subintervalos.

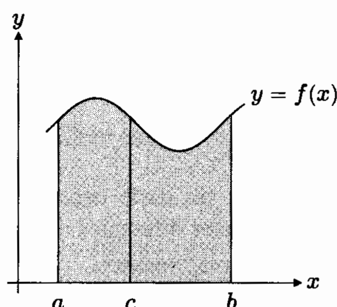


FIGURA 10.10 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

La propiedad del múltiplo constante (10.8) y la de la suma (10.9) son válidas también para integrales definidas. En efecto, si f y g son continuas en $[a,b]$ y si α y β son números reales, entonces

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \tag{10.17}$$

La demostración es sencilla. Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces $[\alpha F(x) + \beta G(x)]' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, y por tanto

$$\begin{aligned}\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx &= \Big|_a^b [\alpha F(x) + \beta G(x)] = [\alpha F(b) + \beta G(b)] - [\alpha F(a) + \beta G(a)] \\ &= \alpha[F(b) - F(a)] + \beta[G(b) - G(a)] \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

Evidentemente, la regla (10.17) se puede ampliar a más de dos funciones.

Observaciones importantes

De la definición de integral indefinida se deduce que la derivada de la integral es igual al integrando:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) \tag{10.18}$$

También

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C \tag{10.19}$$

Además,

$$\int_a^t f(x)\,dx = \Big|_a^t F(x) = F(t) - F(a)$$

Por tanto, derivando con respecto a t, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)\,dx = F'(t) = f(t) \tag{10.20}$$

En otras palabras: *La derivada de la integral definida respecto al límite superior de integración es igual al integrando evaluado en ese límite.*

De manera análoga,

$$\int_t^a f(x)\,dx = \Big|_t^a F(x) = F(a) - F(t)$$

luego

$$\frac{d}{dt}\int_t^a f(x)\,dx = -F'(t) = -f(t) \tag{10.21}$$

En otras palabras: *La derivada de la integral definida respecto al límite inferior de integración es igual a menos el integrando evaluado en ese límite.*

Se pueden generalizar los resultados (10.20) y (10.21). De hecho, si $a(t)$ y $b(t)$ son derivables y $f(x)$ es continua, entonces

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx = f(b(t))\,b'(t) - f(a(t))\,a'(t) \tag{10.22}$$

Para demostrar esta fórmula, sea $F'(x) = f(x)$. Entonces $\int_u^v f(x)\,dx = F(v) - F(u)$ luego, en particular,

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx = F(b(t)) - F(a(t))$$

Derivando el miembro de la derecha de esta ecuación respecto a t por la regla de la cadena obtenemos $F'(b(t))b'(t) - F'(a(t))a'(t)$. Pero $F'(b(t)) = f(b(t))$ y $F'(a(t)) = f(a(t))$ luego de aquíse obtiene (10.22). (La fórmula (10.22) es un caso particular de la fórmula de Leibniz que se estudiará en la Sección 16.2.)

Las funciones continuas son integrables

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Hemos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ como el número $F(b) - F(a)$, donde $F(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$. En algunos casos podemos hallar una expresión explícita de $F(x)$. Por ejemplo, $\int_0^1 x^5\,dx$ vale $1/6$ porque la derivada de $(1/6)x^6$ es x^5. Por otra parte, dada la integral

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$$

(relacionada estrechamente con la "distribución normal" de la estadística), se puede demostrar que no hay ninguna función estándar[2] cuya derivada sea e^{-x^2}. No obstante, el integrando es una función continua en $[0, 2]$ y debe haber un área bajo la gráfica entre 0 y 2.

De hecho se puede demostrar que toda función continua tiene una antiderivada:

[2] Véase (11.4), Sección 11.2 para otros ejemplos de "integrales irresolubles".

Teorema 10.1

Si f es una función continua en $[a, b]$, existe una función $F(x)$ derivable en $[a, b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Demostración (en forma esquemática):

Sea $x \in (a, b)$. Subdividamos el intervalo $[a, x]$ en n partes iguales; así los puntos de la subdivisión son $a + (x-a)/n$, $a + 2(x-a)/n, \ldots, a + (n-1)(x-a)/n$. Para cada número natural n, definamos la nueva función F_n como una aproximación a F mediante la fórmula

$$F_n(x) = \frac{x-a}{n}\left[f(a) + f\left(a + \frac{x-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{x-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + (n-1)\frac{x-a}{n}\right)\right]$$

(Interpretar esta definición de $F_n(x)$.) Definamos $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$. Es posible (pero no fácil) probar que existe este límite para cada $x \in [a, b]$, que F es continua en $[a, b]$, y finalmente, que la derivada de $F(x)$ en (a, b) es $f(x)$.

La integral de Riemann

El tipo de integral que acabamos de estudiar, basada en la antiderivada, se llama la *integral de Newton–Leibniz* (N—L). Los matemáticos estudian otros tipos de integrales. Todos ellos dan el mismo resultado que la integral de (N—L) en el caso de funciones continuas. Damos un breve apunte de la llamada *integral de Riemann.* La idea de la definición está estrechamente relacionada con el método de exhaución que describimos en la introducción a este capítulo.

Sea f una función *acotada* en el intervalo $[a, b]$ y n un número natural. Subdividamos $[a, b]$ en n partes tomando puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Pongamos $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, y elijamos un número arbitrario ξ_i en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ (hacer una figura). La suma

$$f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

se llama una *suma de Riemann* asociada a la función f. Esta suma dependerá no sólo de f sino también de la subdivisión y de la elección de los ξ_i. Supongamos que, cuando n tiende a infinito y, simultáneamente, el mayor de los números $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}$ tiende a 0, existe el límite de la suma. Entonces f se llama *integrable Riemann* o *R–integrable* en el intervalo $[a, b]$ y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

El valor de la integral es independiente de la elección de los ξ_i. Se puede probar que toda función continua es R–integrable y que la R–integral se calcula por la fórmula (10.12) en este caso. Así, la integral de (N—L) y la R–integral coinciden para las funciones continuas.

Problemas

1 Calcular las integrales siguientes usando (10.12):

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 (2x + x^2)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-2}^3 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)dx$

2 Calcular las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int_0^2 (t^3 - t^4)\,dt$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \left(2t^5 - \frac{1}{t^2}\right)dt$ (c) $\displaystyle\int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} + t\right)dx$

3 Los beneficios de una empresa en función de su producción x ($x > 0$) son

$$f(x) = 4.000 - x - \frac{3.000.000}{x}$$

(a) Calcular la producción que maximiza los beneficios. Dibujar la gráfica de f.

(b) La producción actual varía entre 1.000 y 3.000 unidades. Calcular los beneficios medios

$$I = \frac{1}{2.000}\int_{1.000}^{3.000} f(x)\,dx$$

4 Calcular las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{3x}{10}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \xi^2\,d\xi$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \alpha e^{\beta\tau}\,d\tau$ $(\beta \neq 0)$ (d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{y}\,dy$

5 Calcular las derivadas siguientes usando (10.22) o cualquier otro método:

(a) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_0^t x^2\,dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_t^3 e^{-x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{-t}^t e^{-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{\sqrt{t}}^t \ln x\,dx$ (e) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{t^{1/6}}^{t^{1/3}} x^6\,dx$ (f) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{-t}^t \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$

6 Calcular $\int_0^2 2x^2(2-x)^2\,dx$. Comprobar grosso-modo la respuesta dibujando la gráfica de $f(x) = 2x^2(2-x)^2$ en $[0,2]$.

7 Hallar el área comprendida entre las parábolas de ecuaciones $y + 1 = (x-1)^2$ y $3x = y^2$. (Los puntos de intersección tienen coordenadas enteras.)

8 Calcular las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x})\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^b \left(A\frac{x+b}{x+c} + \frac{d}{x}\right)dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx$

Problemas avanzados

9 Una teoría de inversión usa la función W definida por

$$W(T) = \frac{K}{T}\int_0^T e^{-\rho t}\,dt \qquad (K \text{ y } \rho \text{ constantes positivas})$$

para todo $T > 0$. Calcular la integral, probar después que $W(T)$ toma valores en el intervalo $(0, K)$ y es estrictamente decreciente.

10 (a) Probar que, si f es continua en $[a,b]$, existe un número $x^* \in [a,b]$ tal que

$$f(x^*) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Esta expresión se llama el **teorema del valor medio para integrales** y $f(x^*)$ se llama *el valor medio* de f en $[a,b]$. (*Indicación:* Poner $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ y usar el Teorema 7.5 de la Sección 7.3.)

(b) Hallar el valor medio de $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0,4]$ e ilustrar.

10.4 APLICACIONES ECONÓMICAS DE LA INTEGRACIÓN

Hemos motivado la integral definida como una herramienta para calcular el área bajo una curva. Sin embargo tiene otras interpretaciones importantes. Por ejemplo, también tenemos que recurrir a la integral definida cuando queremos hallar el volumen de un sólido de revolución o la longitud de una curva. No pocos de los conceptos más importantes de la estadística se expresan mediante integrales de distribuciones continuas de probabilidad. En esta sección se dan algunos ejemplos que prueban más directamente la importancia de las integrales en economía.

Extracción del petróleo de un pozo

Supongamos que en el instante $t = 0$ comenzamos a extraer petróleo de un pozo cuyas reservas se calculan en K barriles. Definamos

$$x(t) = \text{cantidad de petróleo en barriles que queda en el instante } t$$

En particular, $x(0) = K$. Si suponemos que no podemos rellenar el pozo, $x(t)$ es una función decreciente de t. La cantidad de petróleo extraída en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ (donde $\Delta t > 0$) es $x(t) - x(t + \Delta t)$. La cantidad extraída por unidad de tiempo es, por tanto,

$$\frac{x(t) - x(t + \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{$*$}$$

Si suponemos que $x(t)$ es derivable, el límite de la fracción $(*)$ cuando Δt tiende a cero es igual a $-\dot{x}(t)$. Si $u(t)$ designa la tasa de extracción en el instante t, tenemos

$$\dot{x}(t) = -u(t) \qquad \text{con} \qquad x(0) = K \tag{10.23}$$

La solución al problema con valores iniciales (10.23) es

$$x(t) = K - \int_0^t u(\tau)\, d\tau \tag{10.24}$$

En efecto, comprobamos (10.24) de la forma siguiente. Primeramente, al hacer $t = 0$ obtenemos $x(0) = K$. Además, derivando (10.24) con respecto a t según la regla (10.20) de la Sección 10.3 obtenemos $\dot{x}(t) = -u(t)$. El resultado (10.24) se puede interpretar así: la cantidad de petróleo que queda en el instante t es igual a la cantidad inicial K menos el total que ha sido extraído durante el periodo de tiempo $[0, t]$, a saber $\int_0^t u(\tau)\, d\tau$.

Si la tasa de extracción es constante, digamos $u(t) = \overline{u}$, entonces (10.24) da

$$x(t) = K - \int_0^t \overline{u}\, d\tau = K - \Big|_0^t \overline{u}\tau = K - \overline{u}t$$

En particular, el pozo se agotará cuando $K - \overline{u}t = 0$, o sea cuando $t = K/\overline{u}$. (Por supuesto, podríamos haber hallado directamente la respuesta en el caso de tasa constante sin tener que recurrir a la integración, pero no en otro caso.)

Este ejemplo sirve de ilustración de dos conceptos cuya distinción es importante en varios razonamientos económicos. La magnitud $x(t)$ es una *reserva* o un *stock*, medido en barriles. Por otra parte, $u(t)$ es un *flujo*, medido en barriles *por unidad de tiempo*.

Reserva de divisas de un país

Supongamos que $F(t)$ designa las reservas de divisas de un país en el instante t. Suponiendo que

F es derivable, la tasa de variación de estas reservas por unidad de tiempo es

$$f(t) = F'(t) \tag{10.25}$$

Si $f(t) > 0$, esto significa que hay un flujo neto de divisas que entran en el país en el instante t, mientras que $f(t) < 0$ significa que salen divisas. Del concepto de integral definida se deduce que

$$F(t_1) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt \tag{10.26}$$

Esta expresión mide la variación de las reservas en divisas en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. La Figura 10.11 representa un ejemplo. Hay un flujo neto de entrada de divisas entre t_0 y t', luego un flujo neto de salida entre t' y t'' y, finalmente, un flujo neto de entrada entre t'' y t_1. (Nótese que $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt$ no es igual al área total limitada por la gráfica, el eje x y las rectas $t = t_0$ y $t = t_1$ en este caso. Véase el final de la Sección 10.1.)

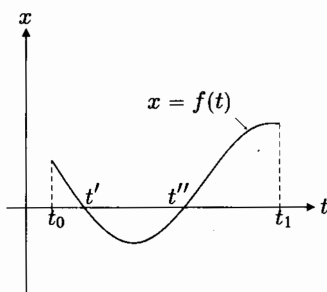


FIGURA 10.11 La tasa de variación de las reservas de divisas.

Distribución de la renta

En muchos países las autoridades hacen públicos datos anónimos sobre la renta de las personas físicas. Se pueden usar estos datos para poner de relieve algunas propiedades de la distribución de la renta en un año dado, o bien cómo esta distribución varía de año en año.

Medimos la renta en dólares y designamos por $F(r)$ a la proporción de individuos que ganan no más de r dólares. Si la población es de n individuos, $nF(r)$ es el número de individuos con renta no superior a r. Si r_0 es la renta más baja del grupo y r_1 la más alta, nos interesa la función F en el intervalo $[r_0, r_1]$. Por definición, F no es continua y, por tanto, no derivable en $[r_0, r_1]$ porque r toma sólo valores que son múltiplos de 0,01$ y $F(r)$ tiene que ser múltiplo de $1/n$. Sin embargo, si la población es muy grande, es posible normalmente "suavizar" la función (es decir, sustituirla por otra función derivable casi idéntica a ella), lo que da una buena aproximación de la verdadera distribución de renta. Supongamos, por tanto, que F es una función con derivada continua f, esto es

$$f(r) = F'(r) \qquad (\text{para todo } r \in (r_0, r_1))$$

Por la definición de derivada tenemos que

$$f(r)\, \Delta r \approx F(r + \Delta r) - F(r)$$

para todo Δr suficientemente pequeño. Así, $f(r)\, \Delta r$ es aproximadamente igual a la proporción de individuos que ganan entre r y $r + \Delta r$. La función f se llama la **función de densidad de la renta** y F se llama la **función de distribución acumulada** o, simplemente, la **función de distribución**[3]

[3] El lector que sepa estadística elemental verá la analogía con las funciones de densidad de la probabilidad y con las funciones de distribución (acumuladas).

asociada a f.

Supongamos que f es una función de densidad continua de la renta de una cierta población con rentas en el intervalo $[r_0, r_1]$. Si $r_0 \leq a \leq b \leq r_1$, la discusión previa y la noción de integral definida implican que $\int_a^b f(r)\, dr$ es la proporción de individuos con rentas en $[a, b]$. Así,

$$n \int_a^b f(r)\, dr \quad = \quad \text{el } \textbf{número de individuos} \text{ con rentas en el intervalo } [a, b] \tag{10.27}$$

Vamos a hallar expresiones relativas a la renta de los que ganan entre a y b dólares. Designemos por $M(r)$ la renta total de aquéllos que ganan no más de r dólares y consideremos el intervalo de renta $[r, r + \Delta r]$. Hay aproximadamente $nf(r)\,\Delta r$ individuos con rentas en ese intervalo. Cada uno de ellos tiene una renta aproximadamente igual a r, luego la renta total de esos individuos, $M(r + \Delta r) - M(r)$, es aproximadamente igual a $nrf(r)\,\Delta r$. Así tenemos

$$\frac{M(r + \Delta r) - M(r)}{\Delta r} \approx nrf(r)$$

La aproximación mejora (en general) cuando Δr disminuye. Tomando límites cuando $\Delta r \to 0$ obtenemos $M'(r) = nrf(r)$, luego $n \int_a^b rf(r)\, dr = M(b) - M(a)$. Por tanto,

$$n \int_a^b rf(r)\, dr \quad = \quad \text{la } \textbf{renta total} \text{ de los individuos con rentas en el intervalo } [a, b] \tag{10.28}$$

Se puede refinar el razonamiento que conduce a (10.28): $M(r + \Delta r) - M(r)$ es la renta total de los que tienen su renta en el intervalo $[r, r + \Delta r]$, con $\Delta r > 0$. En este intervalo de renta hay $n[F(r + \Delta r) - F(r)]$ individuos, cada uno de los cuales gana a lo más $r + \Delta r$ y como mínimo r. Así,

$$nr[F(r + \Delta r) - F(r)] \leq M(r + \Delta r) - M(r) \leq n(r + \Delta r)[F(r + \Delta r) - F(r)] \tag{1}$$

Si $\Delta r > 0$, dividiendo por Δr obtenemos

$$nr\,\frac{F(r + \Delta r) - F(r)}{\Delta r} \leq \frac{M(r + \Delta r) - M(r)}{\Delta r} \leq n(r + \Delta r)\frac{F(r + \Delta r) - F(r)}{\Delta r} \tag{2}$$

(Si $\Delta r < 0$, las desigualdades de (1) no cambian de sentido mientras que las de (2) se invierten.) Cuando $\Delta r \to 0$ obtenemos $nrF'(r) \leq M'(r) \leq nrF'(r)$, luego

$$M'(r) = nrF'(r) = nrf(r) \tag{3}$$

La razón entre la renta total y el número de individuos que pertenecen a un cierto intervalo $[a, b]$ de renta se llama la renta media de los individuos en ese intervalo de renta. Tenemos, por tanto,

$$m = \frac{\int_a^b rf(r)\, dr}{\int_a^b f(r)\, dr} = \text{la } \textbf{renta media} \text{ de los individuos con rentas en el intervalo } [a, b] \tag{10.29}$$

Una función de densidad de la renta que aproxima bastante bien las distribuciones reales de renta, especialmente para rentas grandes, es la que determina la **distribución de Pareto**. En este caso, la proporción de individuos que gana como mucho r dólares viene dada por

$$f(r) = Br^{-\beta} \tag{10.30}$$

donde B y β son constantes positivas. Las estimaciones empíricas de β están usualmente en el intervalo $2{,}4 < \beta < 2{,}6$. Para valores de r cercanos a 0, la fórmula no sirve para nada cuando $\beta \geq 1$, porque $\int_a^b f(r)\,dr \to \infty$ cuando $r \to 0$ (véase Sección 11.3.)

Ejemplo 10.9

En una población con rentas entre a y b, supongamos que la distribución de la renta viene dada por la función de densidad

$$f(r) = Br^{-2,5} \qquad (B \text{ es una constante positiva}) \tag{1}$$

Determínese la renta media de este grupo.

Solución: Se tiene que

$$\int_a^b f(r)\,dr = \int_a^b Br^{-2,5}\,dr = B \Big|_a^b \left(-\tfrac{2}{3}r^{-1,5}\right) = \tfrac{2}{3}B\left(a^{-1,5} - b^{-1,5}\right)$$

También

$$\int_a^b rf(r)\,dr = \int_a^b rBr^{-2,5}\,dr = B \Big|_a^b r^{-1,5}\,dr = -2B \Big|_a^b r^{-0,5} = 2B\left(a^{-0,5} - b^{-0,5}\right)$$

Por tanto, la renta media del grupo es

$$m = \frac{2B\left(a^{-0,5} - b^{-0,5}\right)}{(2/3)B\left(a^{-1,5} - b^{-1,5}\right)} = 3\frac{a^{-0,5} - b^{-0,5}}{a^{-1,5} - b^{-1,5}} \tag{2}$$

Supongamos que b es muy grande. Entonces $b^{-0,5}$ y $b^{-1,5}$ están próximos a 0, y así (2) implica que $m \approx 3a$. La renta media de los que ganan al menos a es, por tanto, aproximadamente $3a$.

La influencia de la distribución de la renta en la demanda

Supongamos que se oferta a los individuos de una población un bien cuya demanda depende solamente del precio p y de la renta r de cada individuo. Sea $D(p, r)$ una función continua que designa al número de unidades demandadas por un individuo con renta r cuando el precio unitario es p. Si las rentas del grupo oscilan entre a y b y la distribución de la renta viene dada por la función de densidad $f(r)$, ¿cuál es la demanda total del bien cuando su precio es p?

Supongamos fijado el precio p y designemos por $T(r)$ a la demanda total del bien de todos los individuos que ganan a lo más r. Consideremos el intervalo de renta $[r, r + \Delta r]$. Hay aproximadamente $nf(r)\,\Delta r$ individuos cuyas rentas están en ese intervalo. Como cada uno de ellos demanda aproximadamente $D(p, r)$ unidades del bien, la demanda total de esos individuos será aproximadamente de $nD(p, r)f(r)\,\Delta r$. Por otra parte, la demanda total verdadera de los individuos con rentas en el intervalo $[r, r + \Delta r]$ viene dada por $T(r + \Delta r) - T(r)$. Así debemos tener $T(r + \Delta r) - T(r) \approx nD(p, r)f(r)\,\Delta r$ y, por tanto,

$$\frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r} \approx nD(p, r)f(r)$$

La aproximación mejora (en general) cuando Δr disminuye y, tomando límite cuando $\Delta r \to 0$, obtenemos $T'(r) = nD(p,r)f(r)$. Se tiene que $T(b)-T(a) = n\int_a^b D(p,r)f(r)\,dr$ por definición de integral definida. Pero $T(b) - T(a)$ es la medida que buscábamos de la demanda total del bien por todos los individuos del grupo. Dependerá, naturalmente, del precio p. Así la designamos por $x(p)$ y tenemos

$$x(p) = \int_a^b nD(p,r)f(r)\,dr \qquad \textbf{(demanda total)} \tag{10.31}$$

Ejemplo 10.10

Supongamos que la distribución de la renta es la del Ejemplo 10.9 y sea $D(p,r) = Ap^{-1,5}r^{2,08}$. (Esta función describe la demanda de leche en Noruega durante el periodo 1925–1935. Véase Ejemplo 15.2.) Calcúlese la demanda total.

Solución: Usando (10.31) se tiene

$$x(p) = \int_a^b nAp^{-1,5}r^{2,08}Br^{-2,5}\,dr = nABp^{-1,5}\int_a^b r^{-0,42}\,dr$$

Por tanto,

$$x(p) = nABp^{-1,5}\left|_a^b \frac{1}{0,58}r^{0,58} = \frac{nAB}{0,58}p^{-1,5}(b^{0,58} - a^{0,58})\right.$$

Valor actual descontado de una línea continua futura de renta

En la Sección 6.6 estudiamos el valor actual de una serie de futuros pagos que habrá que hacer en unos momentos específicos. A menudo es más natural considerar el problema desde el punto de vista de los ingresos, suponiendo que éstos crecen de forma continua. Este es un aspecto distinto y complementario del anterior.

Supongamos que se va a recibir continuamente una renta desde un tiempo $t = 0$ a uno $t = T$ a la tasa de $f(t)$ dólares por año en el instante t. Supongamos que el interés se compone continuamente a la tasa r.

Designemos por $P(t)$ al valor actual descontado de la línea de renta en el intervalo $[0,t]$. Esto quiere decir que $P(t)$ representa la suma de dinero que hay que depositar en el instante $t = 0$ para igualar el resultado de depositar continuamente la línea de renta $f(t)$ en el intervalo de tiempo $[0,T]$.

Si dt es cualquier número, el valor actual descontado de la renta percibida en el intervalo $[t, t+dt]$ es $P(t+dt) - P(t)$. Si dt es pequeño, la renta percibida en ese intervalo es aproximadamente $f(t)\,dt$, y el valor actual descontado de esta cantidad es aproximadamente $f(t)e^{-rt}\,dt$.

Así, $P(t+dt) - P(t) \approx f(t)e^{-rt}\,dt$ y por tanto

$$\frac{P(t+dt) - P(t)}{dt} \approx f(t)e^{-rt}$$

Esta aproximación mejora más cuanto menor es dt y, en el límite cuando $dt \to 0$, tenemos

$$P'(t) = f(t)e^{-rt}$$

Por definición de integral definida, $P(T) - P(0) = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$. Como $P(0) = 0$, tenemos lo siguiente:

El **valor actual descontado** (VAD) (a tiempo 0) de una línea continua de renta a la tasa de $f(t)$ dólares anuales en el intervalo de tiempo $[0, T]$, a interés continuo de tasa r, viene dado por

$$\text{VAD} = \int_0^T f(t)e^{-rt}\, dt \tag{10.32}$$

La ecuación (10.32) da el valor en el instante 0 de la línea de renta $f(t)$ percibida en el intervalo de tiempo $[0, T]$. El valor de esta cantidad, en el instante T, con interés compuesto continuamente a la tasa r, es $e^{rT} \int_0^T f(t)e^{-rt}\, dt$. Como e^{rT} es una constante, podemos escribir la integral anterior en la forma $\int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\, dt$. Se llama a esto el valor futuro descontado de la línea de renta:

El **valor futuro descontado** (VFD) (al tiempo T) de una línea continua de renta a la tasa de $f(t)$ dólares anuales en el intervalo de tiempo $[0, T]$, a interés continuo de tasa r, viene dado por

$$\text{VFD} = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\, dt \tag{10.33}$$

Una modificación fácil de (10.32) nos dará el valor descontado en el instante $s \in [0, T]$ de una línea de renta $f(t)$ percibida durante el intervalo de tiempo $[s, T]$. En efecto, el valor descontado en el instante s de la renta $f(t)$ percibida en el pequeño intervalo de tiempo $[t, t + dt]$ es $f(t)e^{-r(t-s)}\, dt$. Así tenemos lo siguiente:

El **valor descontado** (VD) en el instante s de una línea continua de renta a la tasa de $f(t)$ dólares anuales en el intervalo de tiempo $[s, T]$, a interés continuo de tasa r, viene dado por

$$\text{VD} = \int_{t=s}^T f(t)e^{-r(t-s)}\, dt \tag{10.34}$$

Ejemplo 10.11

Hallar el VAD y el VFD de una línea constante de renta de 1.000 dólares anuales en los próximos 10 años, a una tasa de interés continuo del $r = 8\% = 0{,}08$ anual.

Solución:

$$\text{VAD} = \int_0^{10} 1.000e^{-0{,}08t}\, dt = \Big|_0^{10} 1.000 \left(-\frac{e^{-0{,}08t}}{0{,}08} \right) = \frac{1.000}{0{,}08}(1 - e^{-0{,}8}) \approx 6.883{,}39$$

$$\text{VFD} = e^{0{,}08 \cdot 10}\text{VAD} \approx e^{0{,}8} \cdot 6.883{,}39 \approx 15.319{,}27$$

Problemas

1 Supongamos que la tasa de extracción $u(t)$ de un pozo petrolífero decrece exponencialmente con el tiempo, es decir $u(t) = \bar{u}e^{-at}$, donde a es una constante positiva. Dada la reserva inicial $x(0) = x_0$, hallar la expresión $x(t)$ de la cantidad de petróleo que queda en el instante t. Hallar la condición para que el pozo no se agote.

2 (a) Seguir el modelo del Ejemplo 10.9 y hallar la renta media m en el intervalo $[b, 2b]$ cuando $f(r) = Br^{-2}$.

(b) Supongamos que la función de demanda individual es $D(p, r) = Ap^{\gamma}r^{\delta}$ con $A > 0$, $\gamma < 0$, $\delta > 0$, $\delta \neq 1$. Calcular la demanda total $x(p)$ usando la fórmula (10.31), suponiendo que hay n individuos en la población.

3 Supongamos que $K(t)$ designa el stock de capital de una economía en el instante t. Se define la **inversión neta** en el instante t, y se designa por $I(t)$, como la tasa de crecimiento $\dot{K}(t)$ de $K(t)$.

(a) Si $I(t) = 3t^2 + 2t + 5$ $(t \geq 0)$, ¿cuál es el aumento total del stock de capital en el intervalo de $t = 0$ a $t = 5$?

(b) Si $K(t_0) = K_0$, hallar la expresión del aumento total del stock de capital entre el instante $t = t_0$ y $t = T$ cuando la función de inversión $I(t)$ es la de la parte (a).

4 Hallar los valores actual y futuro de una línea constante de renta de 500 dólares anuales para los próximos 15 años, a una tasa de interés continuo del $r = 6\% = 0{,}06$ anual.

5 (a) Hallar valor actual descontado (VAD) de una línea constante de renta de a dólares anuales en los próximos T años, a una tasa de interés continuo del r anual.

(b) ¿Cuál es el límite del VAD cuando $T \to \infty$? Comparar este resultado con (6.22) de la Sección 6.6.

11

Otros temas de integración

El verdadero matemático
no es un malabarista de los números,
sino de los conceptos.
—*I. Stewart* (1975)

En este capítulo se continúa el estudio de la integración que comenzamos en el Capítulo 10. En particular, se dan algunos métodos de integración que se usan a menudo en economía y, mucho más frecuentemente, en estadística. Concretamente estudiamos la integración por partes y por sustitución, integrales de funciones discontinuas e integrales en intervalos infinitos. En la última parte de este capítulo tratamos las curvas de Lorenz, que pueden ser una forma útil de visualizar distribuciones de renta y algunas de sus propiedades.

11.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Necesitamos calcular a menudo integrales como $\int x^2 e^{2x}\,dx$ cuyo integrando es un producto de dos funciones. Sabemos que la derivada de $\frac{1}{3}x^3$ es x^2 y que la de $\frac{1}{2}e^{2x}$ es e^{2x}, pero la derivada de $(\frac{1}{3}x^3)(\frac{1}{2}e^{2x})$ ciertamente no es $x^2 e^{2x}$. En general, la integral de un producto no es el producto de las integrales porque la derivada de un producto *no* es el producto de las derivadas.

La regla de derivación de un producto de funciones nos permite deducir una regla importante y útil para integrar productos. Como

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (*)$$

tomando la integral indefinida de cada miembro y usando la regla para integrar una suma, obtenemos

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

donde las constantes de integración están implícitas en las integrales indefinidas del miembro de la derecha de esta ecuación. Reordenando esta última ecuación tenemos:

Fórmula de integración por partes

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \tag{11.1}$$

A primera vista, esta fórmula no parece muy útil. Sin embargo, los ejemplos que damos a continuación demuestran lo erróneo de esta impresión, una vez que se aprende a usarla propiamente.

Supongamos que se nos pide integrar una función $H(x)$ que se puede escribir en la forma $f(x)g'(x)$. Usando (11.1) se puede transformar el problema en el de integrar $f'(x)g(x)$.

Normalmente se puede escribir una función $H(x)$ de varias formas diferentes como $f(x)g'(x)$. Lo interesante está, entonces, en elegir f y g de tal manera que calcular $\int f'(x)g(x)\,dx$ sea más fácil que calcular $\int f(x)g'(x)\,dx$. A veces funciona el método, no dando una integral más sencilla, sino una semejante. Véase Ejemplo 11.2(**a**).

Ejemplo 11.1

Usar integración por partes para calcular $\int xe^x\,dx$.

Solución: Para usar (11.1) debemos escribir el integrando en la forma $f(x)g'(x)$. Pongamos $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$. Entonces $f(x)g'(x) = xe^x$ y así

$$\int \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underset{g'(x)}{\underset{\downarrow}{e^x}}\,dx = \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{e^x}} - \int \underset{f'(x)}{\underset{\downarrow}{1}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{e^x}}\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

La derivada de $xe^x - e^x + C$ es $e^x + xe^x - e^x = xe^x$, luego hemos calculado correctamente la integral.

La elección adecuada de f y g nos ha permitido calcular la integral. Veamos lo que ocurre si ponemos $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. De nuevo $f(x)g'(x) = e^x x = xe^x$ y, por (11.1):

$$\int \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{e^x}} \cdot \underset{g'(x)}{\underset{\downarrow}{x}}\,dx = \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{e^x}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{2}x^2}} - \int \underset{f'(x)}{\underset{\downarrow}{e^x}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{2}x^2}}\,dx$$

En este caso, la integral de la derecha es más complicada que la original. De esta forma, la segunda elección de f y g no simplifica la integral.

Este ejemplo nos demuestra que hay que poner mucho cuidado en descomponer el integrando. La intuición que nos llevará a una buena elección, si la hay, vendrá sólo con la práctica. Es frecuente que 'integradores" experimentados tengan que recurrir al método de prueba y error.

Ejemplo 11.2

Calcular las integrales siguientes:

(a) $I = \int \frac{1}{x}\ln x\,dx$ **(b)** $J = \int e^{2x}x^3\,dx$

Solución: (a) El elegir $f(x) = 1/x$ y $g'(x) = \ln x$ no funciona bien porque es difícil hallar $g(x)$. El elegir $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = 1/x$ funciona mejor:

$$I = \int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \int \underset{f(x)}{\ln x} \; \underset{g'(x)}{\frac{1}{x}} \, dx = \underset{f(x)}{\ln x} \; \underset{g(x)}{\ln x} - \int \underset{f'(x)}{\frac{1}{x}} \; \underset{g(x)}{\ln x} \, dx$$

En este caso, la última integral es exactamente la misma I del principio. Por tanto, de $I = (\ln x)^2 - I$ deducimos que $I = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. Sumando una constante arbitraria tenemos que

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

(**b**) Comenzamos razonando informalmente como sigue. La derivación hace x^3 más sencilla reduciendo el exponente de la derivada $3x^2$ desde 3 a 2. Por otra parte, e^{2x} es casi igualmente sencillo, tanto si la derivamos como si la integramos. Elegimos, por tanto, $f(x) = x^3$ y $g'(x) = e^{2x}$ de tal forma que derivamos f e integramos g'. Esto da $f'(x) = 3x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Por tanto,

$$J = \int x^3 e^{2x} \, dx = x^3\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \left(3x^2\right)\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) dx = \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \tfrac{3}{2}\int x^2 e^{2x} \, dx \tag{1}$$

La última integral *es* más sencilla que la primera porque x tiene un exponente más bajo. Integrando otra vez por partes obtenemos

$$\int x^2 e^{2x} \, dx = x^2\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) - \int (2x)\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} \, dx \tag{2}$$

Integrando por partes una tercera y última vez obtenemos

$$\int x e^{2x} \, dx = x\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x} \, dx = \tfrac{1}{2}x e^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x} + C \tag{3}$$

Llevando sucesivamente los resultados de (3) y (2) a (1) obtenemos (con $3C/2 = c$):

$$J = \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2 e^{2x} + \tfrac{3}{4}x e^{2x} - \tfrac{3}{8}e^{2x} + c$$

Es una buena idea comprobar el resultado demostrando que $dJ/dx = x^3 e^{2x}$.

Existe el resultado correspondiente para integrales definidas. De la definición de integral definida y de (*) (la regla del producto para la derivación), obtenemos

$$\int_a^b \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right] dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] dx = \Big|_a^b f(x)g(x)$$

lo que implica que

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = \Big|_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx \tag{11.2}$$

Ejemplo 11.3

Calcular $\int_0^3 x\sqrt{1+x} \, dx$.

Solución: Hay que escribir el integrando en la forma $f(x)g'(x)$. Si ponemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$, ¿cuál es g? Después de reflexionar un poco vemos que podemos tomar $g(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$. Entonces (11.2) da

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= \Big|_0^3 x\cdot\tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} - \int_0^3 1\cdot\tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx \\ &= 3\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 4^{3/2} - \tfrac{2}{3}\Big|_0^3 \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2} \\ &= 16 - \tfrac{4}{15}(4^{5/2}-1) = 16 - \tfrac{4}{15}\cdot 31 = 7\tfrac{11}{15}\end{aligned}$$

De otra forma: podríamos haber calculado la integral indefinida de $x\sqrt{1+x}$ primero y luego la definida usando la definición (10.12). La Figura 11.1 muestra el área bajo la gráfica de $y = x\sqrt{1+x}$ en el intervalo $[0,3]$ y el lector debería preguntarse si $7\frac{11}{15}$ es una estimación razonable del área A.

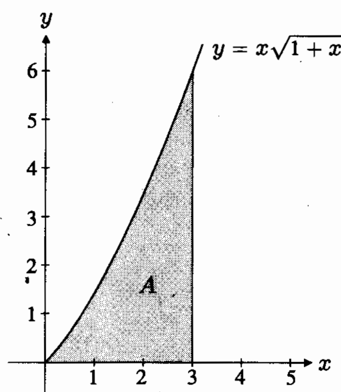


FIGURA 11.1

Problemas

1 Usar la integración por partes para calcular las siguientes integrales:

(a) $\int xe^{-x}\,dx$ (b) $\int 3xe^{4x}\,dx$ (c) $\int (1+x^2)e^{-x}\,dx$ (d) $\int x\ln x\,dx$

2 Calcular las integrales siguientes: (a) $\int_{-1}^{1} x\ln(x+2)\,dx$ (b) $\int_0^2 x2^x\,dx$ (c) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$

3 Usar el hecho de que $f(x) = 1\cdot f(x)$ para demostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

Aplicar esta fórmula al caso de $f(x) = \ln x$.

4 Supongamos que $\mu(t_0) = \mu(t_1) = 0$. Probar que, bajo hipótesis adecuadas sobre F y μ,

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)\dot{\mu}(t)\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} \dot{F}(t)\mu(t)\,dt$$

(Recuérdese que los puntos significan derivación con respecto a t.)

5 Probar que

$$\int x^{\rho} \ln x \, dx = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1} \ln x - \frac{x^{\rho+1}}{(\rho+1)^2} + C \qquad (\rho \neq -1)$$

6 Bajo hipótesis adecuadas sobre las funciones, probar que si $U(C(0)) = 0$, entonces

$$\int_0^T U(C(t))e^{-rt} \, dt = \frac{1}{r} \left(\int_0^T U'(C(t))C'(t)e^{-rt} \, dt - U(C(T))e^{-rT} \right)$$

Problemas avanzados

7 Calcular la integral siguiente cuando $\gamma > c$:

$$T^* = k \int_0^{\bar{u}} u^2 (\bar{u} - u)^{\gamma - 1} \, du$$

11.2 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Vamos a ver en esta sección que la regla de la cadena para la derivación da lugar a un método importante para calcular muchas integrales complicadas. Comenzamos con un ejemplo sencillo,

$$\int (x^2 + 10)^{50} 2x \, dx \tag{1}$$

Una forma de integrar esto sería escribir los 51 términos del desarrollo de $(x^2 + 10)^{50}$ y luego integrar término a término. Pero esto sería enormemente farragoso.[1] En lugar de esto, consideramos a $x^2 + 10$ como una nueva variable. Pensamos que el símbolo dx de (1) designa la diferencial de x y razonamos así: poniendo $u = x^2 + 10$, es $du = 2x \, dx$, y sustituyendo en (1) obtenemos

$$\int u^{50} \, du$$

Esta integral es fácil: $\int u^{50} \, du = \frac{1}{51} u^{51} + C$. Como $u = x^2 + 10$, parece que debe ser

$$\int (x^2 + 10)^{50} 2x \, dx = \tfrac{1}{51} (x^2 + 10)^{51} + C \tag{2}$$

Calculando la derivada de $\frac{1}{51}(x^2 + 10)^{51} + C$ por la regla de la cadena obtenemos $(x^2 + 10)^{50} 2x$, luego el resultado en (2) *queda confirmado*.

Vamos a aplicar este método a otro ejemplo, a saber

$$\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt[3]{1 + e^x}} \tag{3}$$

Esta vez definimos $u = 1 + e^x$ como una variable nueva. Entonces $du = e^x \, dx$ y así la integral se reduce a

$$\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-1/3} \, du$$

[1] Se puede desarrollar la expresión $(x^2 + 10)^{50}$ por la fórmula del binomio de Newton, (7.16) Sección 7.4.

Esta integral es igual a $\frac{3}{2}u^{2/3} + C$. Como $u = 1 + e^x$, parece que debe ser

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt[3]{1+e^x}} = \frac{3}{2}(1+e^x)^{2/3} + C \tag{4}$$

Usando otra vez la regla de la cadena podemos confirmar rápidamente que (4) es correcta porque la derivada de $\frac{3}{2}(1+e^x)^{2/3}$ es $(1+e^x)^{-1/3}e^x = e^x/\sqrt[3]{1+e^x}$. (De hecho la sustitución $u = \sqrt[3]{1+e^x}$ funciona aún mejor.)

En los dos ejemplos el integrando se ha escrito en la forma $f(u)u'$, donde $u = g(x)$. (En (1) se pone $f(u) = u^{50}$ y $u = g(x) = x^2 + 10$. En (3) se pone $f(u) = 1/\sqrt[3]{u}$ y $u = g(x) = 1 + e^x$.)

Apliquemos el mismo método a la integral más general

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx \tag{5}$$

Si hacemos $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$ y así (5) se reduce a

$$\int f(u)\,du$$

Supongamos que podemos hallar una antiderivada $F(u)$ tal que $F'(u) = f(u)$. Entonces

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

lo que implica que

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \tag{6}$$

¿Produce este método puramente formal el resultado correcto siempre que se aplica?

Para cerciorarnos de que sí, usamos la regla de la cadena para derivar $F(g(x)) + C$ respecto a x. La derivada es $F'(g(x))g'(x)$, que es igual a $f(g(x))g'(x)$, lo que confirma (6). Enmarcamos este resultado para futuras referencias:

Integración por sustitución

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \qquad (u = g(x)) \tag{11.3}$$

Nota: Las hipótesis para que esta fórmula sea válida son las siguientes: g es continuamente derivable y $f(u)$ es continua para todo u perteneciente al rango de g.

Es muy fácil integrar por sustitución cuando el integrando es de la forma $f(g(x))g'(x)$ como en los ejemplos anteriores. A veces necesitamos hacer algunos ajustes para conseguir esa forma.

Ejemplo 11.4

Calcular

$$\int 8x^2(3x^3 - 1)^{16}\,dx$$

Solución: Escribimos $u = 3x^3 - 1$. Entonces $du = 9x^2\,dx$ y así $8x^2\,dx = (8/9)9x^2\,dx = (8/9)\,du$. Por tanto,

$$\int 8x^2(3x^3-1)^{16}\,dx = (8/9)\int u^{16}\,du = (8/9)\cdot(1/17)u^{17} + C$$
$$= (8/153)(3x^3-1)^{17} + C$$

Se sugiere al lector que compruebe si ha entendido el método haciendo los Problemas 1 y 2 ahora.

Casos más complicados

Los ejemplos de integración por sustitución que hemos estudiado eran sencillos. Lo interesante de este método de integración es aplicarlo a casos en los que es difícil ver cómo se puede expresar el integrando en la forma $f\big(g(x)\big)g'(x)$.

Ejemplo 11.5

Calcular la integral

$$\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx \qquad (x>0)$$

Solución: Como $\sqrt{x}$ aparece en el numerador y en el denominador, puede ser una buena idea tratar de simplificar la integral sustituyendo $u = \sqrt{x} = g(x)$. Entonces $du = g'(x)\,dx = dx/2\sqrt{x}$. Esta última expresión no aparece en la integral dada. Sin embargo, podemos solventar este problema multiplicando el integrando por $2\sqrt{x}/2\sqrt{x}$, lo que da

$$\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,2\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \tag{$*$}$$

Si sustituimos $\sqrt{x}$ por u (luego x por u^2) y $dx/2\sqrt{x}$ por du, la integral queda

$$\int \frac{u^2-u}{u^2+u}2u\,du = 2\int \frac{u^2-u}{u+1}\,du = 2\int\left(u-2+\frac{2}{u+1}\right)du$$
$$= u^2 - 4u + 4\ln|u+1| + C$$

Hemos efectuado la división $(u^2-u)\div(u+1)$ para poder escribir la segunda igualdad. Sustituyendo u por $\sqrt{x}$ produce el resultado

$$\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = x - 4\sqrt{x} + 4\ln\big(\sqrt{x}+1\big) + C$$

Obsérvese que el artificio que hemos usado en $(*)$ es innecesario. Si $u=\sqrt{x}$, entonces $x = u^2$ y $dx = 2u\,du$, luego obtenemos inmediatamente

$$\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{u^2-u}{u^2+u}2u\,du = 2\int \frac{u^2-u}{u+1}\,du$$

El último método del Ejemplo anterior es el que se usa más frecuentemente. Lo resumimos en el recuadro de la página siguiente.

Es crucial en el paso 3 de este procedimiento que, después de sustituir, nos quede una función para integrar que sólo contenga u y du, y ninguna x. El error más común que se comete al integrar por sustitución es reemplazar dx por du, en vez de usar la fórmula $du = g'(x)\,dx$. Si una sustitución concreta no funciona, se puede ensayar con otra.

Método para hallar una integral complicada $\int G(x)\,dx$:

1. Elegir una "parte" de $G(x)$ y nombrarla como una nueva variable, $u = g(x)$.
2. Calcular $du = g'(x)\,dx$.
3. Usando la sustitución $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$, transformar (si es posible) $\int G(x)\,dx$ en una integral de la forma $\int f(u)\,du$.
4. Hallar (si es posible) $\int f(u)\,du = F(u) + C$.
5. Sustituir u por $g(x)$. La respuesta final es

$$\int G(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

Nota: Existe siempre la posibilidad de que no funcione ninguna sustitución porque la integral sea "irresoluble" (quizás algunos estudiantes suponen demasiado rápidamente que éste es el caso). Damos a continuación algunas integrales comunes que son realmente imposibles de calcular, excepto mediante la introducción de funciones especiales:

$$\int e^{x^2}\,dx, \quad \int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}\,dx \tag{11.4}$$

Ejemplo 11.6

Calcular las integrales siguientes:

$$\textbf{(a)} \int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx \qquad \textbf{(b)} \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Solución: (**a**) Seguimos los pasos 1 a 5:

1. Tomamos una "parte" de $x^3\sqrt{1+x^2}$ como una nueva variable. Probemos con $u = \sqrt{1+x^2}$.
2. De $u = \sqrt{1+x^2}$ deducimos $u^2 = 1 + x^2$ y así $2u\,du = 2x\,dx$, luego $u\,du = x\,dx$. (Nótese que esto es más fácil que diferenciar u directamente).
3. $$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \int x^2\sqrt{1+x^2}\cdot x\,dx = \int (u^2-1)u\cdot u\,du = \int (u^4-u^2)\,du$$
4. $$\int (u^4-u^2)\,du = \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3 + C$$
5. $$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{5}\big(\sqrt{1+x^2}\big)^5 - \tfrac{1}{3}\big(\sqrt{1+x^2}\big)^3 + C$$

(**b**) Usando el resultado de la parte (**a**),

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \Big|_0^1 \left[\tfrac{1}{5}\big(\sqrt{1+x^2}\big)^5 - \tfrac{1}{3}\big(\sqrt{1+x^2}\big)^3\right] = \tfrac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$$

Nota 1: Probar que la sustitución $u = 1 + x^2$ también funciona en este ejemplo.

Nota 2: Se puede pensar que una integral como $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$ debe ser aún más fácil de calcular que la del Ejemplo 11.6. Sin embargo la sustitución $u = \sqrt{1+x^2}$ nos lleva a la integral $\int xu^2\,du = \int \pm\sqrt{u^2-1}\,u^2\,du$, que casi igual que la primera. (Para calcular esta integral hay que hacer una sustitución rara. La sustitución que se indica en el Problema 11 funciona).

Se puede calcular la integral definida del ejemplo anterior "trasladando los límites de integración a la nueva variable". Hemos efectuado la sustitución $u = \sqrt{1+x^2}$. Cuando x varía de 0 a 1, u varía de 1 to $\sqrt{2}$, y así se tiene:

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} (u^4 - u^2)\,du = \Big|_1^{\sqrt{2}} \left(\tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3\right) = \tfrac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$$

Este método de trasladar los límites de integración funciona en general. Bajo las mismas hipótesis que en la fórmula de (11.3) obtenemos

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \qquad (u = g(x)) \tag{11.5}$$

La razón es sencilla. Si $F'(u) = f(u)$, entonces

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \Big|_a^b F\big(g(x)\big) = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Problemas

1 Hallar las siguientes integrales usando (11.3):

(a) $\int (x^2+1)^8\,2x\,dx$ (b) $\int (x+2)^{10}\,dx$ (c) $\int \dfrac{2x-1}{x^2-x+8}\,dx$

2 Calcular las integrales siguientes mediante una sustitución adecuada:

(a) $\int x(2x^2+3)^5\,dx$ (b) $\int x^2 e^{x^3+2}\,dx$ (c) $\int \dfrac{\ln(x+2)}{2x+4}\,dx$

(d) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ (e) $\int \dfrac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$ (f) $\int x^5\sqrt{4-x^3}\,dx$

3 Calcular las integrales siguientes:

(a) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (b) $\int_1^e \dfrac{\ln y}{y}\,dy$ (c) $\int_1^3 \dfrac{1}{x^2}e^{2/x}\,dx$

4 Resolver la ecuación en x siguiente:

$$\int_3^x \frac{2t-2}{t^2-2t}\,dt = \ln\left(\tfrac{2}{3}x - 1\right)$$

5 Calcular las integrales siguientes:

(a) $\int_0^1 (x^4 - x^9)(x^5 - 1)^{12}\, dx$ (b) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ (c) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

6 Demostrar que

$$\int_{t_0}^{t_1} S'(x(t))\dot{x}(t)\, dt = S(x(t_1)) - S(x(t_0))$$

7 (a) Demostrar que, si $a \neq b$, para todo $x \neq a$, $x \neq b$, es

$$\frac{cx + d}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{ac+d}{x-a} - \frac{bc+d}{x-b}\right),$$

(b) Usar la igualdad de la parte (a) para calcular:

(i) $\int_3^4 \frac{x\, dx}{x^2 - 3x + 2}$ (ii) $\int_4^5 \frac{2x+3}{x^2 - 5x + 6}\, dx$

8 Probar que si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y λ es una constante $\neq 0$, entonces

(a) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x - \lambda)\, dx$ (b) $\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\, dx$

Problemas avanzados

9 En un modelo de estabilización macroeconómica óptima, A. J. Preston considera la inversión I como una función del tiempo dada por la integral

$$I = \int_0^t \frac{A(1 - De^{\beta\tau})}{1 + CDe^{\beta\tau}}\, d\tau$$

Todas las constantes son positivas. Hallar I usando la sustitución $x = CDe^{\beta\tau}$ y la igualdad del Problema 7(a).

10 Calcular la siguiente integral:

$$I = \int \frac{x^{1/2}}{1 - x^{1/3}}\, dx$$

(*Indicación:* ¿Cómo se pueden eliminar los exponentes fraccionarios de $x^{1/2}$ y $x^{1/3}$ *simultáneamente* con una sola sustitución?)

11 A veces se usa la fórmula (11.3) de cambio de variable de forma contraria, en el sentido siguiente: Para calcular $\int f(x)\, dx$ hacemos $x = g(t)$, $dx = g'(t)\, dt$, y tratamos de calcular la nueva integral en t. Luego usamos la sustitución $t = g^{-1}(x)$ para obtener la respuesta en función de x. (Esto requiere que g tenga inversa.) Aplicar este método a

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$

(*Indicación:* Efectuar la sustitución $x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Puede parecer extraña pero funciona. (Se necesitan las soluciones del Problema 6, Sección 8.1 y del Problema 23, Sección 8.2.).)

11.3 EXTENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

En esta sección extendemos el concepto de integral en varias direcciones. Una vez más estas extensiones son útiles en economía y/o estadística.

Integrales de ciertas funciones discontinuas

Hasta ahora sólo hemos integrado funciones continuas. Es útil extender la definición a ciertas funciones discontinuas. Una función f se llama *continua a trozos* en el intervalo de a a b si tiene a lo más un número finito de puntos de discontinuidad en el intervalo, con límites laterales a ambos lados de cada punto de discontinuidad.

La Figura 11.2 muestra una gráfica típica de una función continua a trozos, donde los puntos de discontinuidad están en $x = c$ y $x = d$. Supongamos que sustituimos $f(x)$ en $[a, c]$ por la función continua $f_1(x)$ que coincide con $f(x)$ sobre $[a, c)$ y su valor en $x = c$ es $f_1(c) = \lim_{x\to c^-} f(x)$. Entonces $\int_a^c f_1(x)\,dx$ está bien definida y es razonable definir $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx$. Por un artificio semejante definimos $\int_c^d f(x)\,dx$ y $\int_d^b f(x)\,dx$ considerando funciones continuas en los intervalos $[c, d]$ y $[d, b]$, respectivamente, que coinciden con f excepto en uno o ambos de los extremos. La única definición razonable es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

La interpretación de $\int_a^b f(x)\,dx$ es sencillamente la suma de las tres áreas de la Figura 11.2. Esto debe dejar claro cómo se puede definir $\int_a^b f(x)\,dx$ para todas las funciones $f(x)$ que son continuas a trozos en $[a, b]$.

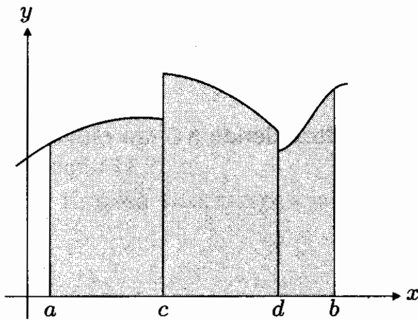


FIGURA 11.2 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$.

Intervalos de integración infinitos

Sea f una función continua para todo $x \geq a$. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ está definida para todo $b \geq a$. Si existe y es finito el límite de esta integral cuando $b \to \infty$, decimos que f es *integrable sobre* $[a, \infty)$ y definimos

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{11.6}$$

Se dice entonces que la *integral impropia* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *converge*. Si *no* existe el límite, se dice que la integral impropia *diverge*. Si $f(x) \geq 0$ en $[a, \infty)$ interpretamos la integral (11.6) como el *área* bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, \infty)$.

De manera análoga se define

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{11.7}$$

cuando f es continua en $(-\infty, b]$. Se dice que la integral impropia converge si existe este límite; si no, diverge.

Ejemplo 11.7

La *distribución exponencial* en estadística tiene como función de densidad, por definición,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x \geq 0;\ \ \lambda \text{ es una constante positiva})$$

Probar que el área bajo la gráfica de f en $[0, \infty)$ vale 1. (Véase Figura 11.3.)

Solución: Para $b > 0$, el área bajo la gráfica de f sobre $[0, b]$ es igual a

$$\int_0^b \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \Big|_0^b \left(-e^{-\lambda x}\right) = -e^{-\lambda b} + 1$$

Cuando $b \to \infty$ se tiene que $-e^{-\lambda b} + 1$ tiende a 1. Por tanto,

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-\lambda b} + 1\right) = 1$$

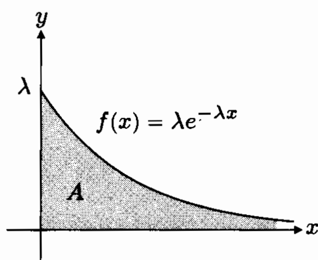


FIGURA 11.3 El área *A* tiene base no acotada pero la altura tiende a 0 tan rápidamente que el área total es 1.

Ejemplo 11.8

Probar que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\, dx = \frac{1}{a-1} \qquad (\text{para } a > 1) \tag{1}$$

Estudiar luego el caso en que $a \leq 1$.

Solución: Para $a \neq 1$ y $b > 1$,

$$\int_1^b \frac{1}{x^a}\, dx = \int_1^b x^{-a}\, dx = \Big|_1^b \frac{1}{1-a} x^{1-a} = \frac{1}{1-a}(b^{1-a} - 1) \tag{2}$$

Para $a > 1$ se tiene $b^{1-a} = 1/b^{a-1} \to 0$ cuando $b \to \infty$. Por tanto (1) se desprende de (2) cuando $b \to \infty$.

Para $a = 1$ tenemos $\int_1^b (1/x)\, dx = \ln b - \ln 1 = \ln b$, que tiende a ∞ cuando b tiende a ∞, luego $\int_1^\infty (1/x)\, dx$ diverge. Véase Figura 11.4.

Para $a < 1$, la última expresión de (2) tiende a ∞ cuando b tiende a ∞. Por tanto, la integral diverge en este caso.

Si ambos límites de integración son infinitos, la integral impropia de una función continua f en $(-\infty, \infty)$ se define por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_0^\infty f(x)\, dx, \tag{11.8}$$

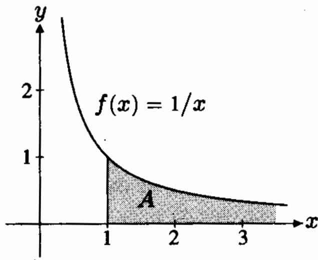


FIGURA 11.4 "$A = \int_1^{\infty}(1/x)\,dx = \infty$". $1/x$ no tiende a 0 lo suficientemente rápidamente, luego la integral impropia diverge.

Se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *converge* si convergen *las dos* integrales del miembro de la derecha; en caso contrario se dice que *diverge*. En lugar de usar el 0 como punto de subdivisión, se podría haber usado un número real c, arbitrario pero fijo. El valor de la integral no variará siempre y cuando converja.

Es importante notar que la definición (11.8) requiere que las dos integrales de la derecha converjan. En particular, nótese que

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx \tag{$*$}$$

no es la definición de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. El Problema 4 suministra un ejemplo en el cual $(*)$ existe aunque la integral en (11.8) diverge. Así $(*)$ no es una definición aceptable, mientras que (11.8) lo es.

Ejemplo 11.9

Estudiar la convergencia de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-cx^2}\,dx$$

para $c > 0$.

Solución: Comencemos calculando la integral indefinida $\int xe^{-cx^2}\,dx$. Haciendo la sustitución $u = -cx^2$ tenemos $du = -2cx\,dx$ y así

$$\int xe^{-cx^2}\,dx = -\frac{1}{2c}\int e^u\,du = -\frac{1}{2c}e^u + C = -\frac{1}{2c}e^{-cx^2} + C$$

Según (11.8) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-cx^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-cx^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-cx^2}\,dx \tag{$*$}$$

siempre que existan las integrales de la derecha. Ahora bien,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-cx^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-cx^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\Big|_a^0 -\frac{1}{2c}e^{-cx^2} = -\frac{1}{2c}$$

De la misma forma vemos que la segunda integral de $(*)$ vale $1/2c$, luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-cx^2}\,dx = -\frac{1}{2c} + \frac{1}{2c} = 0 \qquad (c > 0) \tag{$**$}$$

(Este resultado es muy importante en estadística. Véase Problema 13.)

Integrales de funciones no acotadas

Estudiamos ahora las integrales impropias con *integrando* no acotado.

Consideremos primero la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$, para $x \in (0, 2]$ (véase Figura 11.5). Nótese que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. La función f es continua en el intervalo $[h, 2]$ para un número h en $(0, 2)$, arbitrario pero fijo. Existe, por tanto, la integral definida de f en el intervalo $[h, 2]$ y

$$\int_h^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \Big|_h^2\, 2\sqrt{x} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{h}$$

El límite de esta expresión cuando $h \to 0^+$ es $2\sqrt{2}$. Entonces, por definición,

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{2}$$

Se dice que la integral impropia converge en este caso, y el área bajo la gráfica de f en el intervalo $(0, 2]$ es $2\sqrt{2}$. La Figura 11.5 representa al área de $1/\sqrt{x}$ en el intervalo $(h, 2]$.

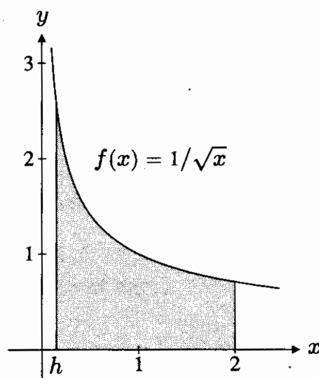


FIGURA 11.5 La "altura" del dominio no está acotada, pero $y = 1/\sqrt{x}$ tiende al eje y tan rápido que el área total es finita.

Más generalmente, sea f una función continua en el intervalo $(a, b]$ pero no definida en $x = a$. Entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^b f(x)\, dx \tag{11.9}$$

si existe el límite. En este caso se dice que la integral impropia de f converge. Si $f(x) \geq 0$ en $(a, b]$ interpretamos la integral como el *área bajo la gráfica* de f en el intervalo $(a, b]$. De la misma manera,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{h\to 0^+} \int_a^{b-h} f(x)\, dx \tag{11.10}$$

si existe el límite. En este caso se dice que la integral impropia de f converge.

Sea f una función continua en (a, b). No es necesario que f esté definida en a ó b. Por ejemplo, supongamos que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ y $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to b^-$. En este caso se dice que f es *integrable* en (a, b) si existe un $c \in (a, b)$ tal que las integrales $\int_a^c f(x)\, dx$ y $\int_c^b f(x)\, dx$ convergen. Si esto ocurre, se define

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \tag{11.11}$$

Se puede probar que no dependen de c ni la convergencia de las integrales ni el valor de la suma. Si alguna de las integrales de la derecha de (11.11) no converge, la de la izquierda no está bien definida.

Sea S una unión finita de intervalos de la forma

$$S = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \cdots \cup (a_n, b_n)$$

donde $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n$ y no se descarta que $a_1 = -\infty$ y/o $b_n = \infty$. De manera análoga al caso de otras definiciones de esta sección, si f es integrable en cada uno de los intervalos $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$, se dice que f es *integrable en* S. Definimos la *integral* sobre S por la relación

$$\int_S f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(x)\, dx \tag{11.12}$$

Un test de comparación para la convergencia

El siguiente test de convergencia de integrales suele ser útil porque no requiere el cálculo de la integral.

Teorema 11.1 (Un test de comparación para la convergencia)

Supongamos que f y g son continuas para todo $x \geq a$ y que

$$|f(x)| \leq g(x) \qquad (\text{para todo } x \geq a)$$

Si $\int_a^\infty g(x)\, dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge y

$$\left| \int_a^\infty f(x)\, dx \right| \leq \int_a^\infty g(x)\, dx$$

Considerando el caso en que $f(x) \geq 0$, el Teorema 11.1 se puede interpretar como sigue: Si el área bajo la gráfica de g es finita, el área bajo la gráfica de f es también finita, porque la gráfica de f no sobrepasa a la de g en ningún punto de $[a, \infty)$. (Hacer una figura.) Como este resultado parece plausible no vamos a dar una demostración analítica de él. Hay un teorema semejante para el caso en que el límite inferior de integración sea $-\infty$.

También se pueden probar tests de comparación semejantes para funciones no acotadas definidas en intervalos acotados.

Ejemplo 11.10

En la teoría del crecimiento económico aparecen frecuentemente integrales de la forma

$$\int_{t_0}^{\infty} U(c(t)) e^{-\alpha t}\, dt \tag{1}$$

En esta expresión, $c(t)$ designa el consumo en el momento t, U es una función de utilidad instantánea y α es una tasa positiva de descuento. Supongamos que existen números M y β, con $\beta < \alpha$, tales que

$$|U(c(t))| \leq M e^{\beta t} \tag{2}$$

para todo $t \geq t_0$ y para todo nivel posible de consumo $c(t)$ en el tiempo t. Así, el valor absoluto de la utilidad de consumo crece a una tasa menor que la de descuento α. Probar que, entonces, (1) converge.

Solución: De (2) obtenemos

$$|U(c(t))e^{-\alpha t}| \leq Me^{-(\alpha-\beta)t} \qquad \text{(para todo } t \geq t_0\text{)}$$

Además,

$$\int_{t_0}^{T} Me^{-(\alpha-\beta)t}\,dt = \Big|_{t_0}^{T} \frac{-M}{\alpha-\beta}e^{-(\alpha-\beta)t} = \frac{M}{\alpha-\beta}\left[e^{-(\alpha-\beta)t_0} - e^{-(\alpha-\beta)T}\right]$$

Como $\alpha - \beta > 0$, la última expresión tiende a $[M/(\alpha-\beta)]\,e^{-(\alpha-\beta)t_0}$ cuando $T \to \infty$. Se deduce del Teorema 11.1 que (1) converge.

Ejemplo 11.11

La función $f(x) = e^{-x^2}$ es extremadamente importante en estadística, porque es la base de la distribución *normal* o *de Gauss*. Vamos a demostrar que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \tag{1}$$

converge. Nótese que, según (11.4) en la Sección 11.2, no se puede calcular la integral indefinida de la función $f(x) = e^{-x^2}$. Como $f(x) = e^{-x^2}$ es simétrica respecto del eje y, basta probar que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge. Para ello, subdividimos el intervalo de integración de tal forma que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \tag{2}$$

Desde luego, no hay problema con $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ porque es la integral de una función continua en un intervalo acotado. Para todo $x \geq 1$, se tiene $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Ahora bien, $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ converge a $1/e$ luego, por el Teorema 11.1, la integral $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ deber converger también. Así se deduce de (2) que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge, luego la integral (1) converge. Sin embargo, no hemos hallado su valor. De hecho, hay que recurrir a técnicas de integración avanzadas para probar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{11.13}$$

Problemas

1 Dadas las integrales siguientes, calcular las que convergen y decir las que divergen:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a > 0)$

2 Definimos f por $f(x) = 1/(b-a)$ para $x \in [a,b]$ y $f(x) = 0$ para $x \notin [a,b]$. (En estadística, se llama a f la función de densidad de la *distribución rectangular o uniforme*). Calcular lo siguiente:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$

3 En relación con el Ejemplo 11.7, hallar las siguientes integrales:

(a) $\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx$ (b) $\int_0^{\infty} (x-1/\lambda)^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$ (c) $\int_0^{\infty} (x-1/\lambda)^3 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

(Los tres números obtenidos se llaman respectivamente la esperanza, la varianza y el tercer momento central de la distribución exponencial.)

4 Probar que $\int_{-\infty}^{+\infty} x/(1+x^2)\,dx$ diverge pero existe $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} x/(1+x^2)\,dx$.

5 Se define la función f por $f(x) = (\ln x)/x^3$, para $x > 0$.

(a) Hallar los máximos y mínimos de f si los hay.

(b) Estudiar la convergencia de $\int_0^1 f(x)\,dx$ y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

6 Usar el test de comparación del Teorema 11.1 para demostrar que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

es convergente.

7 Demostrar que

$$\int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right) dx = 4\sqrt{5}$$

8 R. E. Hall y D. W. Jorgenson, en su artículo *Tax Policy and Investment Behavior*, usan la integral

$$z = \int_0^{\infty} e^{-rs} D(s)\,ds$$

para representar el valor actual descontado, a la tasa de interés r, del flujo temporal de depreciaciones $D(s)$ $(0 \le s < \infty)$. Hallar z como función de r en los casos siguientes:

(a) $D(s) = 1/\tau$ para $0 \le s \le \tau$, $D(s) = 0$ para $s > \tau$. (Depreciación constante a lo largo de τ años.)

(b) $D(s) = 2(\tau - s)/\tau^2$ para $0 \le s \le \tau$, $D(s) = 0$ para $s > \tau$. (Depreciación lineal.)

9 Supongamos que se calcula sin pensar la integral $\int_{-1}^{+1} (1/x^2)\,dx$ usando la definición (10.12) de la Sección 10.3 de integral definida. Se obtiene un resultado negativo aun cuando el integrando no es nunca negativo. ¿Cuál es el error?

10 Probar que la integral siguiente converge y hallar su valor:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

Problemas avanzados

11 Calcular la integral

$$I_k = \int_1^{\infty} \left(\frac{k}{x} - \frac{k^2}{1+kx}\right) dx \qquad (k \text{ es una constante positiva})$$

Hallar el límite de I_k cuando $k \to \infty$, si existe.

12 Usar los resultados del Ejemplo 11.8 para demostrar (6.18) de la Sección 6.5. (*Indicación:* Dibujar la gráfica de $f(x) = x^{-p}$ en $[1, \infty)$ e interpretar geométricamente cada una de las sumas $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ y $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-p}$ como sumas de un número infinito de rectángulos.)

13 En estadística se define la función de densidad normal o de Gauss por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.[2] Demostrar que

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \mu$ (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \sigma^2 + \mu^2$

(*Indicación:* Usar la sustitución $u = (x - \mu)/\sqrt{2}\sigma$, junto con (11.13) y el resultado del Ejemplo 11.9.)

11.4 UNA NOTA SOBRE DISTRIBUCIÓN DE RENTAS Y CURVAS DE LORENZ

Explicamos en la Sección 10.4 que, si $f(r)$ es la función de densidad de la distribución de renta de una población de n individuos, entonces $n \int_a^b f(r)\, dr$ es el número de individuos con rentas en el intervalo $[a, b]$ —véase ecuación (10.27). Además, $n \int_a^b r\, f(r)\, dr$ representa la renta total de esos individuos —véase ecuación (10.28).

La **Curva de Lorenz** es una herramienta estadística que sirve para describir algunas características importantes de cualquier distribución de renta.[3] Esta curva se basa en las cuotas de participación en la renta total que corresponden a los diferentes grupos de individuos de la población, empezando por los más pobres y terminando por los más ricos. Consideremos, por ejemplo, los datos de la Tabla 11.1.[4] La tabla indica que, aparentemente, las desigualdades aumentaron en EE.UU. durante la década de los 80 y disminuyeron en Holanda durante el periodo, mucho más dilatado, de 1959–1985. La distribución en Holanda en 1959 era muy cercana a la de EE.UU. en 1980. La distribución mundial así calculada está próxima a un extremo.

TABLA 11.1 *Cuotas de participación en la renta total*

Grupo de	*EE.UU*		*Holanda*		*Mundial*
renta	*1980*	*1990*	*1959*	*1985*	*1989*
Quinto inferior	*5,2*	*4,6*	*5,0*	*7,8*	*1,4*
Segundo quinto	*11,5*	*10,8*	*11,9*	*13,9*	*1,9*
Tercer quinto	*17,5*	*16,6*	*17,4*	*18,1*	*2,3*
Cuarto quinto	*24,3*	*23,8*	*22,7*	*23,4*	*11,7*
Quinto superior	*41,5*	*44,3*	*43,0*	*36,7*	*82,7*

Se confirman estas intuiciones previas mediante un análisis más cuidadoso basado en las curvas de Lorenz. Para construirlas acumulamos primero las rentas de los diferentes quintos de la población de tal manera que los cinco nuevos grupos que consideramos son respectivamente el 20% inferior, luego el 40% inferior, el 60% inferior, el 80% inferior y, finalmente, la población completa. Esto da

[2] La gráfica de esta función se llama la campana de Gauss por su forma. Está recogida en los billetes de 10 marcos alemanes de 1989, junto con el retrato de su inventor Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

[3] El nombre le viene del estadístico norteamericano Max Otto Lorenz, quien la introdujo como uno de los "Métodos para Medir la Concentración de Riqueza" (más bien que renta) en un artículo publicado en el *Journal of the American Statistical Association*, 1905.

[4] Los datos para los EE.UU. están tomados de la oficina del censo. Los datos para Holanda provienen de la Oficina Central de estadística. Los datos mundiales están tomados del programa de la ONU *Human Development Report* para 1992. En verdad no existen datos de esta clase a nivel mundial. Las cifras que se dan representan lo que sería la distribución mundial de la renta si el producto nacional bruto de cada país estuviese perfecta y equitativamente distribuido como renta entre los habitantes de ese país. Sin embargo, no hay razones para pensar que las cifras resultantes exageren la verdadera extensión de las desigualdades mundiales.

origen a la Tabla 11.2[5].

TABLA 11.2 *Rentas acumuladas*

Grupo de renta	*EE.UU 1980*	*EE.UU 1990*	*Holanda 1959*	*Holanda 1985*	*Mundial 1989*
20% inferior	*5,2*	*4,6*	*5,0*	*7,8*	*1,4*
40% inferior	*16,7*	*15,4*	*16,9*	*21,7*	*3,3*
60% inferior	*34,2*	*32,0*	*34,3*	*39,8*	*5,6*
80% inferior	*58,5*	*55,8*	*57,0*	*63,2*	*17,3*
100% inferior	*100,0*	*100,0*	*100,0*	*100,0*	*100,0*

La Figura 11.6 muestra dos de las curvas de Lorenz resultantes, halladas ajustando curvas lisas a los datos de la segunda y quinta columnas de la Tabla 11.2.

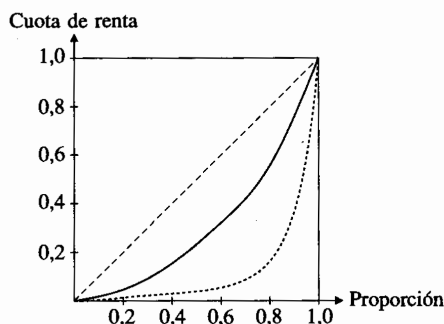


FIGURA 11.6 Curvas de Lorenz aproximadas para los EE.UU. en 1990 (curva sólida) y mundial en 1989 (curva punteada). La diagonal representa la igualdad perfecta.

La cuestión es ahora la siguiente: si la distribución de la renta viene descrita por la función continua de densidad $f(r)$, como en la Sección 10.4, ¿cómo se halla la curva de Lorenz? Para responder a esto tenemos primero que considerar la *función de distribución* (acumulada) $F(r)$ de la Sección 10.4, cuyo valor para cada nivel r de renta representa la proporción de la población que tiene rentas $\leq r$. Así el valor de esta función viene dado por la integral

$$F(r) = \int_0^r f(x)\,dx$$

que, evidentemente, satisface $F'(r) = f(r)$ para todo nivel r de renta. Supondremos que $f(r) > 0$ para todos los niveles de renta $r \geq 0$, lo que implica que $F(r)$ es estrictamente creciente. Además, suponiendo que todo el mundo tiene una renta, aun cuando sea muy pequeña, se debe verificar que $F(0) = 0$. También $F(\infty) = 1$, porque todo el mundo tiene renta finita, aun cuando algunos individuos puedan tener una renta extraordinariamente elevada. Aquí $F(\infty) = 1$ es una abreviatura de $F(r) \to 1$ cuando $r \to \infty$.

La variable sobre el eje horizontal de la gráfica de la curva de Lorenz es la proporción $p = F(r)$ de la población con rentas $\leq r$. La construcción de la curva de Lorenz requiere considerar la inversa de esta función, $r = R(p)$, que también es estrictamente creciente.

Se puede dar una interpretación importante de la función $R(p)$. Para cada $p \in [0, 1]$, el valor $R(p)$ es aquel nivel de renta para el que la proporción p de la población tiene una renta $r \leq R(p)$;

[5] Como ocurre a menudo con datos de este tipo, los errores de redondeo implican que las cifras de la Tabla 11.1 no suman el 100% en todos los casos.

por la definición de función inversa, $F(R(p)) = p$. Por ejemplo, cuando $p = 1/2$, el nivel de renta $R(1/2)$ tiene la propiedad de que la mitad de la población percibe una renta $r \leq R(1/2)$, mientras que la otra mitad percibe $r > R(1/2)$. Este nivel "medio" de renta se llama generalmente la *mediana* de la distribución. Ciertos intervalos de renta entre valores distintos de $R(p)$ reciben también nombres apropiados —por ejemplo el intervalo $[R(0{,}2), R(0{,}4)]$ se llama el *segundo quintil*, $[R(0{,}6), R(0{,}7)]$ el *séptimo decil*, y así sucesivamente. Los diferentes valores de $R(p)$ se llaman generalmente *percentiles* o *estadísticos de orden*.

Por la regla de derivación de la inversa de una función (ver (7.24), Sección 7.6), tenemos que

$$R'(p) = \frac{1}{F'(r)} = \frac{1}{f(r)} = \frac{1}{f(R(p))} \tag{11.14}$$

Esto vale para todo $p \in (0, 1)$ porque hemos supuesto que $f(r) > 0$ para todos los niveles r renta.

La curva de Lorenz es la gráfica de la función $L(p)$ cuyo valor para cada p es la cuota de participación en la renta total que corresponde a la fracción p más pobre de la población. La renta total viene dada por $n \int_0^\infty r\, f(r)\, dr$, donde n es el número total de individuos de la población. Como $R(p)$ es el nivel de renta del más rico entre la fracción p más pobre de la población, la renta total de este grupo es $n \int_0^{R(p)} r\, f(r)\, dr$. Así tenemos

$$L(p) = \frac{n \int_0^{R(p)} r\, f(r)\, dr}{n \int_0^\infty r\, f(r)\, dr} = \frac{1}{m} \int_0^{R(p)} r\, f(r)\, dr \tag{11.15}$$

donde m es la renta media $\int_0^\infty r\, f(r)\, dr$. Como $0 \leq \int_0^{R(p)} r f(r)\, dr \leq \int_0^\infty r f(r)\, dr$, la ecuación (11.15) implica que $0 \leq L(p) \leq 1$ para todo $p \in [0, 1]$. Se puede hallar la pendiente de la curva de Lorenz usando la regla de derivación (10.22), Sección 10.3. En efecto,

$$L'(p) = \frac{1}{m} R(p) f(R(p)) R'(p) = \frac{R(p)}{m}$$

donde la segunda igualdad se deduce de (11.14). Así, la pendiente de la curva de Lorenz es igual a la razón entre el nivel $R(p)$ de renta y la renta media m. Esta pendiente crece paulatinamente desde $0 = R(0)$ cuando $p = 0$ hasta "$\infty = R(1)$" cuando $p = 1$. En particular, derivando una segunda vez se obtiene

$$L''(p) = \frac{R'(p)}{m} = \frac{1}{m f(R(p))} > 0$$

para todo $p \in (0, 1)$, lo que implica que una curva de Lorenz es estrictamente convexa. Como muestra la Figura 11.6, cada curva de Lorenz tiene tangente horizontal en $p = 0$ y tangente vertical en $p = 1$. Finalmente, $L'(p) = 1$ en el único punto donde $R(p) = m$ luego para $p = F(m)$. Para $0 < p < F(m)$ se tiene que $L'(p) < 1$, luego la curva de Lorenz crece inicialmente más lentamente que la recta de 45° de inclinación. En $p = F(m)$ la distancia horizontal entre la curva de Lorenz y la recta de 45° de inclinación alcanza un máximo. Para $F(m) < p < 1$ se tiene $L'(p) > 1$, luego la curva de Lorenz termina creciendo más rápidamente que la recta hasta que las dos se vuelven a cortar en $p = 1$. Esto prueba, en particular, que $L(p) < p$ en el intervalo abierto $p \in (0, 1)$.

Se puede usar también la curva de Lorenz para definir una medida común G de la desigualdad de renta, generalmente conocida como el **coeficiente de Gini.**[6] Geométricamente, G es el doble del área del conjunto que está limitado por la recta de 45° (la diagonal) y la curva de Lorenz. Este área

---

[6] El nombre viene del italiano Corrado Gini, quien la introdujo en 1912 y, aparentemente, descubrió la curva de Lorenz independientemente de Lorenz. Su definición era la integral doble $G = (1/2m) \int_0^\infty \int_0^\infty |r - r'| f(r) f(r')\, dr\, dr'$, pero es equivalente a la definición que damos aquí. No demostramos esta equivalencia porque no estudiamos integrales dobles en este libro.

se puede representar como la diferencia entre las integrales $\int_0^1 p\,dp = 1/2$ y $\int_0^1 L(p)\,dp$. Así

$$G = 2\left[\frac{1}{2} - \int_0^1 L(p)dp\right] = 1 - 2\int_0^1 L(p)\,dp \qquad \textbf{coeficiente de Gini} \qquad (11.16)$$

De aquí se deduce que $0 < G < 1$. Este coeficiente se aproxima a su extremo inferior $G = 0$ cuando la curva de Lorenz se acerca a la diagonal. Esto ocurre cuando la renta tiende a ser distribuida más equitativamente, con cada fracción más pobre p de la población aproximándose a percibir la cuota completa p de participación de la renta total disponible. El coeficiente se aproxima al otro extremo $G = 1$ cuando la curva de Lorenz se aleja de la diagonal. Esto ocurre cuando la renta se distribuye más desigualmente, con cada fracción p más pobre de la población aproximándose a la cuota cero de participación de la renta total disponible, y una pequeña fracción decreciente de personas muy ricas aproximándose a la percepción del total de renta disponible. Generalmente, conforme la curva de Lorenz baja, la distribución de la renta se hace más desigual y el coeficiente de Gini crece.

Problemas

1 Dibujar la curva de Lorenz para las columnas primera, tercera y cuarta de la Tabla 11.2.

2 Hallar los valores del coeficiente de Gini para las cinco distribuciones de la Tabla 11.2.

12

Álgebra lineal: vectores y matrices

A primera vista es curioso que un tema tan puro y desapasionado como las matemáticas pueda tener algo útil que decir sobre este mundo tan desordenado, mal estructurado y aleatorio en que vivimos. Afortunadamente encontramos que, cuando comprendemos lo que antes era misterioso, hay en el centro de todo un orden, un patrón y sentido común.
—*B. H. P. Rivett* (1978)

En la mayoría de los modelos matemáticos usados por los economistas termina por aparecer un sistema de ecuaciones que hay que resolver. Si las ecuaciones son lineales, el estudio de estos sistemas pertenece a un área de las matemáticas llamada **álgebra lineal**.

El análisis input–output es un área prominente de la economía que usa los sistemas de ecuaciones lineales. Modelos como los basados en el trabajo pionero de Wassily Leontief *The Structure of American Economy, 1919–1939* dan lugar a sistemas de cientos de ecuaciones que contienen cientos de incógnitas. Este modelo, y otros semejantes desarrollados en la antigua Unión Soviética por Leonid Kantorovich, tenían como objetivo planificar la producción de equipamiento militar y otros suministros durante la Segunda Guerra Mundial.

Para comprender estos enormes sistemas de ecuaciones es conveniente trabajar con un cierto número de conceptos como vectores, matrices y determinantes. Estos conceptos se introducen en este capítulo y se estudia su uso en economía en los dos siguientes. De hecho, la utilidad del álgebra lineal va mucho más allá de su capacidad para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, los métodos del Álgebra Lineal se usan extensamente en la teoría de las ecuaciones diferenciales y en diferencias, en teoría de optimización lineal y no lineal, en estadística y en econometría. De hecho, a partir de ahora todos los capítulos de este libro harán uso de algunos de estos métodos.

12.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Vamos a introducir unas notaciones para sistemas generales de m ecuaciones lineales con n incógnitas que nos permitirán entender los grandes sistemas. Si se designan las incógnitas por $x_1, \ldots, x_n$, un sistema de ese tipo se escribe en la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{12.1}$$

donde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ son los *coeficientes* del sistema y $b_1, \ldots, b_m$ son los *miembros de la derecha* o *términos independientes*.

Nótese cuidadosamente el orden de colocación de los subíndices. Por ejemplo, a_{21} es el coeficiente de la primera variable (x_1) en la segunda ecuación. En general, a_{ij} es el coeficiente de la variable j-ésima (x_j) en la i-ésima ecuación. Algunos (o muchos) de esos coeficientes pueden ser cero.

Una **solución** del sistema (12.1) es un conjunto ordenado de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que verifica todas las ecuaciones simultáneamente cuando se pone $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $\ldots$, $x_n = s_n$. Normalmente se designa una solución por $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Nótese que el orden en que se escriben las componentes de una solución es esencial en el sentido de que, si $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ verifica (12.1), una permutación de esos números (por ejemplo $(s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1)$) *no* será una solución en general.

Si el sistema (12.1) tiene al menos una solución se le llamará **compatible**; caso contrario se le llamará **incompatible**.

Hay programas de computador que comprueban si un sistema como (12.1) es compatible y, en caso afirmativo, hallan sus soluciones aunque tenga miles de ecuaciones e incógnitas. A pesar de esto, los economistas necesitan entender la teoría de estos sistemas de ecuaciones para poder crear razonamientos teóricos y sacar conclusiones en relación con los modelos lineales de este tipo.

Modelos de Leontief

Para hacer ver la importancia de los sistemas de ecuaciones lineales en economía, estudiamos brevemente un ejemplo sencillo del modelo input–output debido a Leontief.

Ejemplo 12.1

Una economía tiene tres industrias: pesca, madera y construcción de barcos.

Para producir 1 tonelada de pescado se requieren los servicios de α barcos pesqueros.
Para producir 1 tonelada de madera se requieren β toneladas de pescado para alimentar a los madereros.
Para producir 1 barco pesquero se requieren γ toneladas de madera.

Éstas son las únicas materias primas que cada una de las tres industrias necesita. Supongamos que no hay demanda final (externa) de barcos pesqueros. Hallar la producción bruta de cada industria si se debe cubrir la demanda de d_1 toneladas de pescado y d_2 toneladas de madera.

Solución: Sea x_1 el número total de toneladas de pescado que hay que producir, x_2 el número total de toneladas de madera y x_3 el número total de barcos pesqueros. Consideremos primero el pescado. Como se necesitan βx_2 toneladas de pescado para producir x_2 de madera, y como la demanda final de pescado es d_1, debe ser $x_1 = \beta x_2 + d_1$. (La producción de barcos de pesca no requiere consumo de pescado, luego no hay término en x_3). La producción de madera se hace según la ecuación $x_2 = \gamma x_3 + d_2$. Finalmente sólo la industria pesquera necesita barcos;

no hay demanda final en este caso y así $x_3 = \alpha x_1$. Por tanto, se debe satisfacer el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta x_2 + d_1 \\ x_2 &= \gamma x_3 + d_2 \\ x_3 &= \alpha x_1 \end{aligned} \tag{1}$$

Poniendo $x_3 = \alpha x_1$ en la segunda ecuación obtenemos $x_2 = \gamma\alpha x_1 + d_2$, lo que llevado a la primera ecuación da $x_1 = \beta\gamma\alpha x_1 + \beta d_2 + d_1$. Resolviendo esta última ecuación en x_1 se obtiene

$$x_1 = \frac{d_1 + \beta d_2}{1 - \alpha\beta\gamma} \tag{2}$$

Los valores correspondientes de las otras dos variables son

$$x_2 = \frac{\alpha\gamma d_1 + d_2}{1 - \alpha\beta\gamma} \qquad x_3 = \frac{\alpha d_1 + \alpha\beta d_2}{1 - \alpha\beta\gamma} \tag{3}$$

Claramente esta solución (x_1, x_2, x_3) sólo tiene sentido si $\alpha\beta\gamma < 1$. En efecto, si $\alpha\beta\gamma \geq 1$, es imposible para esta economía cubrir cualquier demanda final de pescado y madera —la producción es demasiado ineficiente.

Más generalmente, el modelo de Leontief describe una economía de n industrias entrelazadas, cada una de las cuales produce un único bien usando sólo un proceso de producción. Cada industria debe usar, para producir su bien, materias primas procedentes de las otras. Por ejemplo, la industria del acero necesita productos de la industria del carbón y de muchas otras. Además de suministrar su propio producto a otras industrias que lo necesiten, cada industria debe hacer frente a la demanda externa de su producto que proviene de clientes, gobiernos, extranjeros, etc. La cantidad de producción que se necesita para cubrir la demanda externa se llama la *demanda final*.

Designemos por x_i al número total de unidades del bien i que la industria i va a producir en cierto año. Sea

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{número de unidades del bien } i \text{ que se necesitan} \\ \text{para producir una unidad del bien } j \end{cases} \tag{12.2}$$

Suponemos que las necesidades de materias primas son directamente proporcionales a la producción. Entonces

$$a_{ij}x_j = \begin{cases} \text{número de unidades del bien } i \text{ que se necesitan} \\ \text{para producir } x_j \text{ unidades del bien } j \end{cases} \tag{12.3}$$

Para que se puedan producir x_1 unidades del bien 1, x_2 unidades del bien 2, ..., x_n unidades del bien n, la industria i necesita suministrar un total de

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

unidades del bien i. Si queremos que la industria i suministre todavía b_i unidades para cubrir la demanda final, entonces el equilibrio entre oferta y demanda exige que

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + b_i$$

Esto se verifica para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, luego tenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{aligned} \tag{12.4}$$

Nótese que, en la primera ecuación, x_1 aparece a la izquierda y también en el primer término de la derecha. En la segunda ecuación, x_2 aparece a la izquierda y también en el segundo término de la derecha, y así sucesivamente. Pasando a la izquierda todos los términos con incógnitas y reordenando tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1-a_{11})x_1 - \quad a_{12}x_2 - \cdots - \quad a_{1n}x_n &= b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - \quad a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -a_{n1}x_1 - \quad a_{n2}x_2 - \cdots + (1-a_{nn})x_n &= b_n \end{aligned} \tag{12.5}$$

Se llama a esto un **sistema de Leontief**. Los números a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn} se llaman los **coeficientes técnicos** o **coeficientes de input**. Para un conjunto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de cantidades de demanda final una solución $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de (12.5) dará la producción que cada industria debe tener para cubrir las necesidades de las otras industrias y la demanda final. Por supuesto, sólo tienen sentido valores no negativos de las x_i.

Problemas

1 Consideremos una economía dividida en un sector agrícola (A) y un sector industrial (I). Para producir una unidad de A se necesita $1/6$ de unidad de A y $1/4$ de unidad de I. Para producir una unidad de I se necesita $1/4$ de unidad de A y $1/4$ de unidad de I. Supongamos que las demandas finales en cada uno de los dos sectores son de 60 unidades.

(a) Escribir el sistema de Leontief para esta economía.

(b) Hallar el número de unidades que hay que producir en cada sector para cubrir las demandas finales.

2 En el modelo (12.5) de Leontief:

(a) ¿Cómo se interpreta la condición de que $a_{ii} = 0$ para todo i?

(b) ¿Cómo se interpreta la suma $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}$?

(c) ¿Cómo se interpretan los coeficientes técnicos $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$?

(d) ¿Cómo se interpreta la suma $a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}$?

3 Escribir el sistema (12.5) cuando $n = 2$, $a_{11} = 0{,}2$, $a_{12} = 0{,}3$, $a_{21} = 0{,}4$, $a_{22} = 0{,}1$, $b_1 = 120$ y $b_2 = 90$. ¿Cuál es la solución de este sistema?

4 Consideremos un modelo input–output con 3 sectores. El sector 1 es industria pesada, el sector 2 es industria ligera y el sector 3 es agricultura. Supongamos que los requerimientos de input están dados por la siguiente tabla:

	Industria pesada	*Industria ligera*	*Agricultura*
Unidades de bienes de industria pesada	$a_{11} = 0{,}1$	$a_{12} = 0{,}2$	$a_{13} = 0{,}1$
Unidades de bienes de industria ligera	$a_{21} = 0{,}3$	$a_{22} = 0{,}2$	$a_{23} = 0{,}2$
Unidades de bienes agrícolas	$a_{31} = 0{,}2$	$a_{32} = 0{,}2$	$a_{33} = 0{,}1$

Supongamos que las demandas finales de los tres bienes son de 85, 95 y 20 unidades, respectivamente. Si x_1, x_2 y x_3 designan el número de unidades que hay que producir en cada sector, escribir el modelo de Leontief para el problema. Comprobar que $x_1 = 150$, $x_2 = 200$ y $x_3 = 100$ es una solución.

12.2 VECTORES

Supongamos que una tienda vende n bienes distintos, designados por $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Cada mes se anota el número de unidades $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de cada bien que hay en existencia. Conviene representar estas existencias por

$$\text{una fila:} \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \text{o una columna:} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

Un conjunto ordenado de números como uno de estos, que se distingue no sólo por los elementos que contiene sino por el orden en que se colocan, se llama un **vector**. En particular, el primer vector de $(*)$ se llama un **vector fila** mientras que el segundo es un **vector columna**.

Se designa a los vectores por letras negritas. Para vectores fila escribimos

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Los números a_1, a_2, ..., a_n se llaman las **componentes** (o **coordenadas**) del vector. El número a_i se llama la componente i-ésima o la coordenada i-ésima. Si queremos subrayar que un vector tiene n componentes, le llamamos un **n-vector**. (También se usa a menudo el término "n-upla"). De otra manera, si **a** es un n-vector, decimos que tiene **dimensión** n. Nótese que cualquier solución del sistema de m ecuaciones lineales (12.1) es un n-vector. Por otra parte, los números $b_1, b_2, \ldots, b_m$ que constituyen los miembros de la derecha de esas m ecuaciones forman un m-vector. Por supuesto, m y n pueden ser distintos.

Está claro que el vector fila $(7, 13, 4)$ y el vector columna

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

contienen exactamente la misma información —los números y su orden son los mismos, variando sólo la forma de colocarlos. Cuando estudiemos matrices será importante distinguir entre vectores fila y columna.

Operaciones con vectores

Dos n-vectores **a** y **b** se llaman **iguales** si las componentes que ocupan los mismos lugares son iguales; entonces escribimos $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Si los vectores no son iguales, escribimos $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Nótese que la igualdad sólo está definida para vectores de la misma dimensión.

Ejemplo 12.2

(i) $(x, y, z) = (2, -1, 3)$ si y sólo si $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

(ii) $(1, -1, 3) \neq (-1, 1, 3)$.

(iii) $(1, 1, 2) \neq (1, 1, 2, 2)$ porque no tienen el mismo número de componentes.

Si **a** y **b** son dos n-vectores, la **suma** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ de **a** y **b** es el n-vector que se obtiene sumando cada componente de **a** con la de **b** que ocupa el mismo lugar.[1]

En símbolos (para vectores fila),

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \tag{12.6}$$

[1] Ni la suma ni la diferencia están definidas para vectores de distinta dimensión.

Si **a** es un n-vector y t un número real, definimos $t\mathbf{a}$ como el n-vector cuyas componentes son iguales a t multiplicado por las componentes correspondientes de **a**. En símbolos,

$$t(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) \tag{12.7}$$

Esta operación se llama *multiplicación por un escalar* (el escalar es el número t que se usa para "dar escala" al vector **a**). Nótese, en particular, que si t es un número natural, entonces $t\mathbf{a}$ es la suma del vector **a** consigo mismo t veces. Por ejemplo,

$$3\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}$$

Si **a** y **b** son n-vectores, la **diferencia** de **a** y **b** se define por la relación

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$$

Esto implica que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) - (b_1, b_2 \ldots, b_n) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n) \tag{12.8}$$

4 Así se obtiene $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ restando cada componente de **b** de la de **a** que ocupa el mismo lugar.

Para cada n-vector **a**, la diferencia $\mathbf{a} - \mathbf{a}$ es el vector cuyas componentes son todas iguales a cero. Se le llama el **vector cero**:

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \tag{12.9}$$

Nótese que $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Ejemplo 12.3

Si $\mathbf{a} = (3, -2, 5)$ y $\mathbf{b} = (-2, 10, -3)$, calcular $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$, $-\sqrt{2}\,\mathbf{b}$ y $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \big(3 + (-2), -2 + 10, 5 + (-3)\big) = (1, 8, 2) \\
\mathbf{a} - \mathbf{b} &= \big(3 - (-2), -2 - 10, 5 - (-3)\big) = (5, -12, 8) \\
3\mathbf{a} &= 3(3, -2, 5) = \big(3 \cdot 3, 3(-2), 3 \cdot 5\big) = (9, -6, 15) \\
-\sqrt{2}\,\mathbf{b} &= \big(2\sqrt{2}, -10\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\,\big) \\
3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} &= 3(3, -2, 5) + 4(-2, 10, -3) = (9, -6, 15) + (-8, 40, -12) = (1, 34, 3)
\end{aligned}$$

Si **a** y **b** son dos n-vectores y t y s son números reales, el n-vector $t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ se llama una **combinación lineal** de **a** y **b**. En símbolos, usando vectores columna,

$$t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 + sb_1 \\ ta_2 + sb_2 \\ \vdots \\ ta_n + sb_n \end{pmatrix}$$

Podemos interpretar estas combinaciones lineales en el contexto del ejemplo de la tienda (en el caso en que t y s sean enteros positivos): Si t personas compran el mismo vector **a** de bienes y s compran **b**, el vector $t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ representa el vector total de bienes comprados en la tienda.

Más generalmente, si $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ son m-vectores y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales, el m-vector

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \tag{12.10}$$

se llama una **combinación lineal** de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Ejemplo 12.4

Consideremos el sistema general de ecuaciones lineales (12.1). Supongamos que introducimos los vectores columna:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \; \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Entonces se puede escribir (12.1) en la forma

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{12.11}$$

Como (12.11) es equivalente a (12.1), vemos que el *sistema* (12.1) *es compatible (tiene solución) si y sólo si* **b** *se puede expresar como combinación lineal de* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Como ejemplo concreto, el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= 10 \\ x_1 + 5x_2 &= -3 \end{aligned} \tag{1}$$

es equivalente a la ecuación vectorial

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La solución de (1) es $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$. Luego, en este caso, $\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$ se puede escribir como la combinación lineal $2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

De estas definiciones se deducen varias reglas de adición de vectores y multiplicación de un vector por un escalar. Las más importantes son las siguientes:

Reglas de adición de vectores y multiplicación por escalares

Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son n-vectores arbitrarios y α, β son números arbitrarios, entonces

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \qquad \textbf{(a)}$$
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \qquad \textbf{(b)}$$
$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} \qquad \textbf{(c)}$$
$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(d)} \qquad (12.12)$$
$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a} \qquad \textbf{(e)}$$
$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \qquad \textbf{(f)}$$
$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a} \qquad \textbf{(g)}$$
$$1\mathbf{a} = \mathbf{a} \qquad \textbf{(h)}$$

Las ecuaciones (**a**) y (**b**) se llaman la **ley asociativa** $+n$ y la **ley conmutativa**, respectivamente. Esas dos reglas hacen posible poner los términos de una suma en el orden que queramos, y agruparlos de cualquier manera. En particular, en lugar de las expresiones (**a**) podemos escribir $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ suprimiendo los paréntesis.

Hemos puesto en el cuadro (12.12) las reglas de operaciones con vectores para hacer ver que son formalmente análogas a las de números. Así podemos manipular los vectores algebraicamente, como entidades en sí, sin tener que preocuparnos de tratarlos componente a componente. El ejemplo siguiente clarifica más esta idea.

Ejemplo 12.5

Dados dos n-vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, hallar el n-vector $\mathbf{x}$ tal que $3\mathbf{x} + 2\mathbf{a} = 5\mathbf{b}$.

Solución: Cuando dos vectores son iguales, podemos sumar el mismo vector $(-2\mathbf{a})$ a cada uno y la igualdad se conserva:

$$(3\mathbf{x} + 2\mathbf{a}) + (-2\mathbf{a}) = 5\mathbf{b} + (-2\mathbf{a})$$

Por la regla (12.12) (**a**), el miembro de la izquierda de la ecuación anterior es

$$(3\mathbf{x} + 2\mathbf{a}) + (-2\mathbf{a}) = 3\mathbf{x} + (2\mathbf{a} + (-2\mathbf{a})) = 3\mathbf{x} + \mathbf{0} = 3\mathbf{x}$$

donde también hemos usado (12.12) (**d**) y (**c**). Por tanto,

$$3\mathbf{x} = 5\mathbf{b} + (-2\mathbf{a})$$

Multiplicando cada lado por $1/3$ se obtiene

$$\tfrac{1}{3}(3\mathbf{x}) = \tfrac{1}{3}[5\mathbf{b} + (-2\mathbf{a})]$$

Así (12.12) (**f**), (**g**) y (**h**) implican que

$$\mathbf{x} = \tfrac{5}{3}\mathbf{b} - \tfrac{2}{3}\mathbf{a}$$

Este vector $\mathbf{x}$ es el único que verifica la ecuación $3\mathbf{x} + 2\mathbf{a} = 5\mathbf{b}$.

Problemas

1 Calcular $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ y $-5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ para

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2 Sean $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 0, -3)$ y $\mathbf{c} = (-2, 4, -3)$. Calcular lo siguiente:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}\,, \qquad 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}\,, \qquad -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

3 Hallar las componentes a_1, a_2 y a_3 cuando

$$3\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4 Si $3(x, y, z) + 5(-1, 2, 3) = (4, 1, 3)$, calcular x, y, z.

5 (a) Si $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ¿qué se puede decir de las componentes de $\mathbf{x}$?

(b) Si $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ¿qué se puede decir de las componentes de $\mathbf{x}$?

6 (a) Probar que la ecuación vectorial

$$x\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

equivale a dos ecuaciones con dos incógnitas, x, y. Hallar la solución.

(b) Probar que no hay dos números x, y tales que

$$x\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

7 Resolver la ecuación vectorial $4\mathbf{x}-7\mathbf{a}=2\mathbf{x}+8\mathbf{b}-\mathbf{a}$ en $\mathbf{x}$, es decir despejar $\mathbf{x}$ en términos de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

8 Expresar el vector $(4,-11)$ como combinación lineal de $(2,-1)$ y $(1,4)$.

9 Una compañía petrolera puede convertir un barril de crudo en tres clases distintas de combustible. Sin aditivos de plomo, sus producciones de las tres clases de combustible a partir de un barril de crudo vienen dadas por el vector $(2,2,4)$. Con el máximo de aditivos de plomo permitido legalmente las producciones son $(5,0,3)$. Supongamos que los efectos de los aditivos de plomo son proporcionales, es decir que al usar una fracción θ del máximo permitido $(0\le\theta\le 1)$ se tiene la producción $(1-\theta)(2,2,4)+\theta(5,0,3)$.

(a) ¿Es posible que la compañía produzca los siguientes vectores?

(i) $(3\frac{1}{2},1,3\frac{1}{2})$ (ii) $(4,\frac{1}{3},3\frac{1}{3})$ (iii) $(1,6,9)$

(b) En caso afirmativo, ¿qué proporción de aditivos de plomo legalmente permitidos hay que usar en cada caso?

12.3 INTERPRETACIONES GEOMÉTRICAS DE LOS VECTORES

La palabra "vector" viene del latín y significa, a la vez, "transporte" y "pasajero", o "el que es llevado". En particular, la palabra tiene relación con el acto de mover una persona u objeto de un lado a otro. Se puede describir este desplazamiento en el plano xy por la distancia a_1 que se mueve en la dirección del eje x y por la distancia a_2 que se mueve en la dirección del eje y. Por tanto, una traslación en el plano está unívocamente determinada por un 2-vector (a_1,a_2). Geométricamente hablando, esta traslación se puede visualizar por una flecha con origen en el punto P y extremo en el punto Q. Si desplazamos la flecha paralelamente a sí misma de tal manera que su origen sea P' y su extremo Q', la flecha resultante describirá la misma traslación, porque sus componentes x e y siguen siendo a_1 y a_2, respectivamente. Véase Figura 12.1.

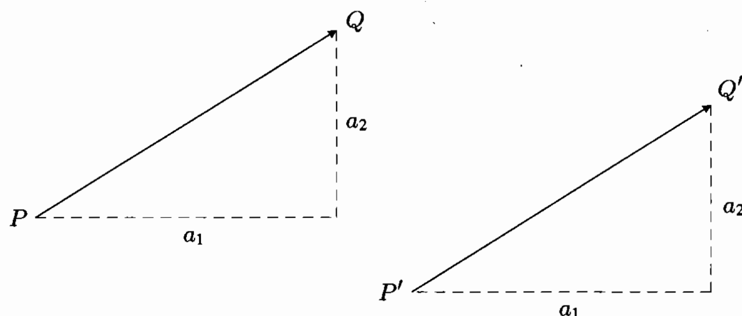


FIGURA 12.1

El vector de P a Q se designa por $\overrightarrow{PQ}$ y lo llamamos **vector geométrico** o *segmento orientado*. Dos vectores geométricos con la misma dirección y longitud se llaman iguales (de manera análoga a cómo las fracciones $2/6$ y $1/3$ representan el mismo número).

Supongamos que el vector geométrico $\mathbf{a}$ produce una traslación de $P=(p_1,p_2)$ a $Q=(q_1,q_2)$. Entonces el par (a_1,a_2) que describe la traslación en las direcciones x e y viene dado por $a_1=q_1-p_1$, $a_2=q_2-p_2$ o por $(a_1,a_2)=(q_1,q_2)-(p_1,p_2)$. Esto se ilustra en la Figura 12.2.

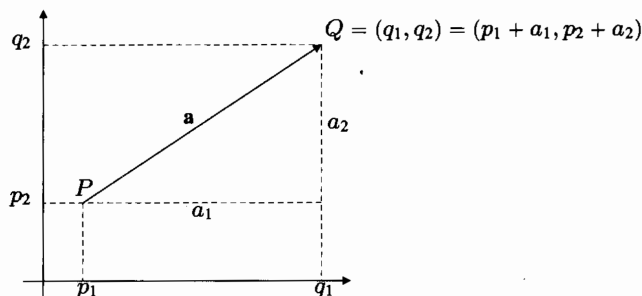


FIGURA 12.2

Por otra parte, si se da el par (a_1, a_2), la traslación correspondiente se obtiene moviendo a_1 unidades en la dirección del eje x y a_2 unidades en la dirección del eje y. Si partimos del punto $P = (p_1, p_2)$ llegamos al punto Q de coordenadas $(q_1, q_2) = (p_1 + a_1, p_2 + a_2)$ (véase Figura 12.2).

La correspondencia que acabamos de describir muestra que es simplemente materia de conveniencia el considerar a un vector como un par ordenado de números (a_1, a_2), o como un segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ (Figura 12.2).

Interpretaciones geométricas de las operaciones vectoriales

Cuando representamos los vectores por segmentos orientados, las operaciones vectoriales $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $t\mathbf{a}$ operaciones vectoriales $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, y $t\mathbf{a}$ tienen interpretaciones geométricas interesantes. Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ ambos partiendo del origen $(0, 0)$ del sistema de coordenadas.

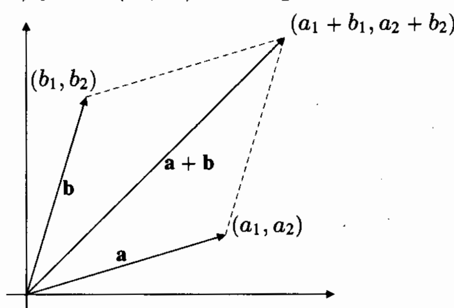


FIGURA 12.3

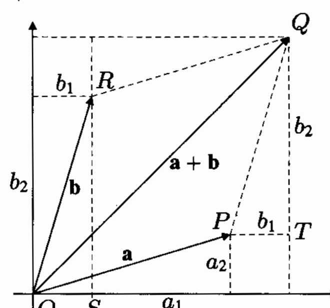


FIGURA 12.4

La suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, representada en la Figura 12.3, es la diagonal del paralelogramo construido sobre **a** y **b**. La razón geométrica de esto queda patente en la Figura 12.4, en la cual los triángulos OSR y PTQ son iguales (congruentes). Además OR es paralela a PQ y, como tienen la misma longitud, $OPQR$ es un paralelogramo. Ésta es la ley del paralelogramo para sumar vectores, que resultará familiar a quien haya estudiado física: Si **a** y **b** representan dos fuerzas actuando sobre una partícula en O, la fuerza única combinada $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ produce el mismo resultado actuando sobre la partícula. También se representa en la Figura 12.5 la regla del paralelogramo para sumar vectores. Una manera de interpretar esta figura es que si la traslación de vector **a** lleva el punto O sobre P y la de vector **b** lleva P sobre Q, entonces la traslación combinada $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ llevará O sobre Q. En la Figura 12.6 se da una interpretación geométrica del vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Nótese la dirección del vector geométrico $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y que $\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}$.

La interpretación geométrica de $t\mathbf{a}$, donde t es un número real cualquiera, es clara también. Si $t > 0$, entonces $t\mathbf{a}$ es el vector que tiene la misma dirección que **a** y cuya longitud es t multiplicado

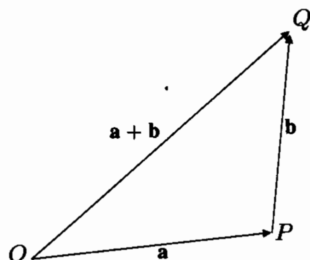


FIGURA 12.5

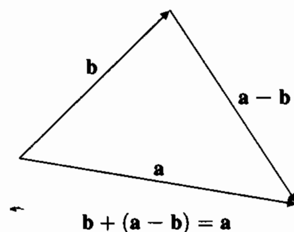


FIGURA 12.6

por la de **a**. Si $t < 0$, se invierte la dirección y la longitud se multiplica por el valor absoluto de t. De hecho, multiplicar por t es lo mismo que cambiar de escala el vector **a**; por esto se llama al número t un **escalar**.

Interpretaciones geométricas de los vectores de un 3-espacio y de un n-espacio

Hemos representado un punto o un vector del plano (llamado también 2-espacio y designado por $\mathbb{R}^2$) por un par de números reales, usando dos ejes de coordenadas mutuamente ortogonales. De forma análoga se pueden representar puntos o vectores de un 3-espacio $\mathbb{R}^3$ por ternas de números reales usando tres rectas mutuamente ortogonales. En la Figura 12.7 se representa un sistema de coordenadas de este tipo. Las tres rectas mutuamente ortogonales que se cortan en el punto O de la Figura 12.7 se llaman *ejes de coordenadas*. Se les llama usualmente el eje x, el eje y y el eje z. El plano determinado por los ejes x e y suele ser el horizontal, con el eje z atravesándolo verticalmente. Se eligen unidades de medida de longitud sobre cada eje, y se selecciona una dirección positiva sobre cada uno de ellos, representada por una flecha.

Así, todo punto P del espacio, tiene asociada una terna de números (a_1, a_2, a_3) que describe su posición, como se indica en la Figura 12.7. Recíprocamente, es claro que toda terna de números representa de esta forma un punto del espacio. Nótese, en particular, que cuando a_3 es negativo, el punto (a_1, a_2, a_3) está debajo del plano xy, para el que es $z = 0$. En la Figura 12.8, hemos construido el punto de coordenadas $(-2, 3, -4)$.

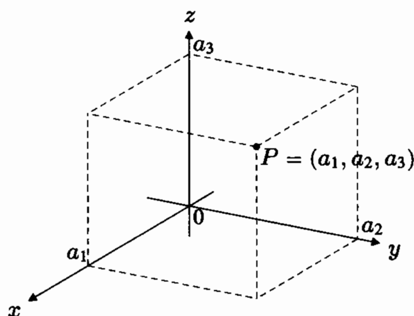


FIGURA 12.7

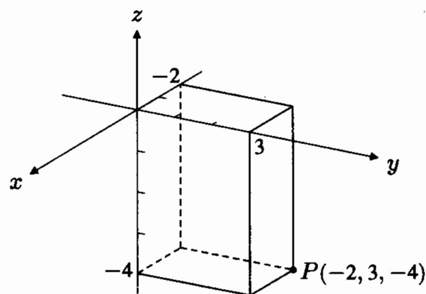


FIGURA 12.8

Se puede considerar, de manera obvia, a todo 3-vector (a_1, a_2, a_3) como un vector geométrico o traslación en el 3-espacio $\mathbb{R}^3$. Como en el caso del plano, hay una correspondencia natural entre ternas ordenadas (a_1, a_2, a_3) y vectores geométricos considerados como segmentos orientados. La ley del paralelogramo para la suma sigue siendo válida en $\mathbb{R}^3$, así como la interpretación geométrica de la multiplicación de un vector por un escalar.

Aunque, para $n \geq 4$, el conjunto $\mathbb{R}^n$ de todos los n-vectores no tiene interpretación espacial natural, seguimos usando el lenguaje geométrico cuando estudiamos las propiedades de $\mathbb{R}^n$, porque muchas propiedades de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se trasladan a $\mathbb{R}^n$.

Problemas

1 Sean $\mathbf{a} = (5, -1)$ y $\mathbf{b} = (-2, 4)$. Calcular $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $-\frac{1}{2}\mathbf{a}$ y representarlos gráficamente por vectores geométricos que parten del origen de coordenadas.

2 Sean $\mathbf{a} = (3, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$ y $\mathbf{x} = (1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

(a) Calcular $\mathbf{x}$ para $\lambda = 0$, 1/4, 1/2, 3/4 y 1. Representarlos gráficamente.

(b) ¿Cuál es el conjunto de los puntos $\mathbf{x}$ cuando λ recorre todos los números reales entre 0 y 1? Probar que, si λ recorre *todos* los números reales, el conjunto anterior es la recta que pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(-1, 2)$.

3 Sean $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ y $\mathbf{b} = (-3, 0, -2)$.

(a) Hallar los números reales x_1 y x_2 tales que $x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} = (5, 4, 4)$.

(b) Probar que no existen números reales x_1 y x_2 que verifiquen $x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} = (-3, 6, 1)$.

4 Dibujar un sistema de coordenadas tridimensional y, en él, los puntos

$$P = (3, 0, 0), \qquad Q = (0, 2, 0), \qquad R = (0, 0, -4), \qquad S = (3, -2, 4)$$

(Para S hay que hacer un dibujo semejante al de la Figura 12.8.)

5 Hallar qué figura geométrica forma el conjunto de todos los puntos (x, y, z) de un 3-espacio en los casos siguientes:

(a) $y = 2, \quad z = 3 \quad$ (x varía libremente) (b) $y = x \quad$ (z varía libremente)

12.4 EL PRODUCTO ESCALAR

Consideremos de nuevo el ejemplo de la tienda de la Sección 12.2. Supongamos ahora que los precios unitarios de los n bienes distintos son $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente. El valor de la cantidad x_j del bien j-ésimo será entonces $p_j x_j$. Así, el valor total del vector de cantidades $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n \tag{$*$}$$

Si llamamos vector de precios a $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, el número $(*)$ se llama el **producto escalar** de $\mathbf{p}$ por $\mathbf{a}$. Se le denota normalmente por $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}$. En general se tiene la siguiente definición (formulada para vectores fila):

Producto escalar

El **producto escalar** de dos n-vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se define por la expresión

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{12.13}$$

Nótese que el producto escalar de dos vectores no es un vector sino un *número* (o escalar). Se obtiene multiplicando todos los pares (a_j, b_j) de las componentes de los dos vectores **a** y **b** que ocupan el mismo lugar y luego sumando los resultados. Nótese que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ está *definido solamente* si **a** y **b** tienen la misma dimensión.

Ejemplo 12.6

Si $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ y $\mathbf{b} = (-3, 2, 5)$, hallar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 8$$

Ejemplo 12.7

La persona A va a una frutería y compra 3 kg de cerezas, 4 kg de peras, 3 kg de naranjas y 5 kg de manzanas. La persona B compra 2 kg de cerezas, nada de peras, 2 kg de naranjas y 4 kg de manzanas. Supongamos que los precios por kilo son: cerezas 0,75$, peras 0,60$, naranjas 0,50$ y manzanas 0,40$. Designemos por $\mathbf{x}_A$ y $\mathbf{x}_B$ a los vectores de compras de las personas A y B, respectivamente, y por $\mathbf{p} = (0{,}75\,,\ 0{,}60\,,\ 0{,}50\,,\ 0{,}40)$ al vector de precios.

(**a**) ¿Cuál es el vector total de compras de las personas A y B juntas? ¿Cuánto cuesta?

(**b**) Comprobar que el coste de la compra de A más el de la de B es el total que se halló en la parte (a).

Solución:

(**a**) El vector de compra total de A y B es

$$\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B = (3, 4, 3, 5) + (2, 0, 2, 4) = (5, 4, 5, 9)$$

cuyo precio es de

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B) &= (0{,}75\,,\ 0{,}60\,,\ 0{,}50\,,\ 0{,}40) \cdot (5, 4, 5, 9) \\ &= 0{,}75 \cdot 5 + 0{,}60 \cdot 4 + 0{,}50 \cdot 5 + 0{,}40 \cdot 9\end{aligned}$$

que totaliza 12,25$.

(**b**) El coste de la compra de A es

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_A = 0{,}75 \cdot 3 + 0{,}60 \cdot 4 + 0{,}50 \cdot 3 + 0{,}40 \cdot 5 = 8{,}15$$

y el de la de B es

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_B = 0{,}75 \cdot 2 + 0{,}60 \cdot 0 + 0{,}50 \cdot 2 + 0{,}40 \cdot 4 = 4{,}10$$

y $8{,}15 + 4{,}10 = 12{,}25$.

Ejemplo 12.8

Hay que conducir un automóvil de la ciudad A a la C. Hay varias carreteras posibles, pero todas pasan por uno de los tres puentes B_1, B_2 y B_3. Los números de la Figura 12.9 significan cuántas carreteras unen las ciudades a los puentes. Por ejemplo, hay cinco carreteras de A a B_2. Se pueden agrupar en vectores estos números. Sea $\mathbf{P} = (3, 5, 2)$ el vector que representa el número de carreteras de A a B_1, B_2 y B_3, respectivamente y $\mathbf{Q} = (4, 2, 1)$ el que representa el número de carreteras de B_1, B_2 y B_3 a C. ¿De cuántas maneras podemos ir de A a C sin cruzar más de un puente?

Solución: Se puede ir de A a B_1 por 3 carreteras distintas. Elegida una de ellas, hay 4 distintas para ir de B_1 a C. Por tanto, hay $3 \cdot 4$ posibilidades para ir de A a C pasando por B_1.

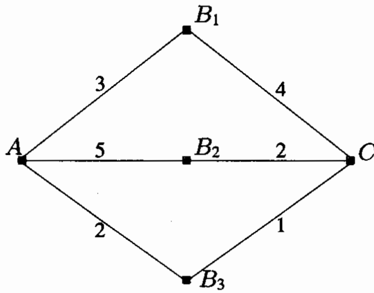


FIGURA 12.9

Razonando de la misma forma para los puentes B_2 y B_3 se ve que el número total de rutas distintas es

$$3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 24$$

que es precisamente el producto escalar de **P** por **Q**.

Damos un cuadro de propiedades importantes del producto escalar:

Reglas para el producto escalar

Si **a**, **b** y **c** son n-vectores y α es un escalar, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \text{(a)}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad \text{(b)}$$

$$(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \text{(c)}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0 \iff \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \quad \text{(d)}$$

(12.14)

Las reglas (**a**) y (**c**) son triviales. Para probar (**b**), consideremos los vectores $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ y $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\ &= a_1(b_1 + c_1) + \cdots + a_n(b_n + c_n) \\ &= a_1b_1 + \cdots + a_nb_n + a_1c_1 + \cdots + a_nc_n \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}\end{aligned}$$

Para demostrar la regla (**d**) basta notar que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$. Esto es no negativo siempre, y es cero si y sólo si todas las a_i son 0.

Longitudes de vectores y la desigualdad de Cauchy–Schwarz

Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$; la **longitud** o **norma** del vector **a**, que se designa por $||\mathbf{a}||$, es el número $||\mathbf{a}|| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$, ó

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \tag{12.15}$$

Usando (12.15) definimos la **distancia euclídea** entre los dos n-vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ como

$$||\mathbf{a} - \mathbf{b}|| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \tag{12.16}$$

Para $n = 2$ esta definición coincide con el concepto usual de distancia (véase (2.2), Sección 2.3). Para $n = 3$ se puede comprobar la definición (12.16) estudiando las Figuras 12.10 y 12.11.

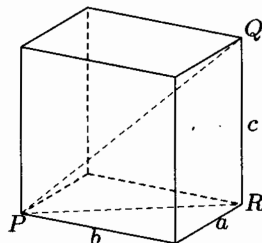


FIGURA 12.10

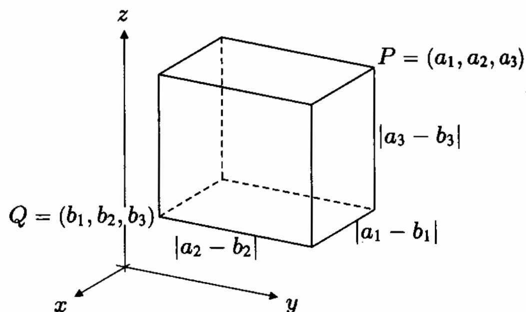


FIGURA 12.11

Hallemos primero la longitud de la diagonal de una caja rectangular cuyos lados tienen longitudes a, b y c, como se recoge en la Figura 12.10. Por el teorema de Pitágoras, $(PR)^2 = a^2+b^2$, luego $(PQ)^2 = (PR)^2+(RQ)^2 = a^2+b^2+c^2$, y así la longitud de la diagonal es $PQ = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

En la Figura 12.11 queremos hallar la distancia entre los puntos P y Q de coordenadas respectivas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3). Vemos que esos puntos son vértices diagonalmente opuestos de una caja rectangular con lados de longitud $a = |a_1 - b_1|$, $b = |a_2 - b_2|$ y $c = |a_3 - b_3|$.

Así, $(PQ)^2$, el cuadrado de distancia de P a Q, es igual a $a^2 + b^2 + c^2 = |a_1 - b_1|^2 + |a_2 - b_2|^2 + |a_3 - b_3|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$. Así, la distancia entre (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) es

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

lo que coincide con (12.16).

En el Problema 12 de la Sección 3.1 se trataba de demostrar una desigualdad famosa. Usando la notación que hemos introducido, se puede expresar (3.5) en la forma

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \qquad \textbf{(Desigualdad de Cauchy–Schwarz)} \tag{12.17}$$

Ejemplo 12.9

Comprobar la desigualdad de Cauchy–Schwarz para los dos vectores $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ y $\mathbf{b} = (-3, 2, 5)$ del Ejemplo 12.6.

Solución: Tenemos que

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \qquad ||\mathbf{b}|| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

Vimos en el Ejemplo 12.6 que el producto escalar de esos vectores es 8. Por tanto, la desigualdad (12.17) dice que $8 \leq \sqrt{14}\sqrt{38}$, lo que es cierto.

Ortogonalidad

En la Figura 12.12 se representan tres vectores, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$. Por el Teorema de Pitágoras, el ángulo θ de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es recto ($=90^\circ$) si y sólo si $(OA)^2+(OB)^2=(AB)^2$, ó $||\mathbf{a}||^2+||\mathbf{b}||^2=||\mathbf{a}-\mathbf{b}||^2$. Esto implica que $\theta=90^\circ$ si y sólo si

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \qquad (*)$$

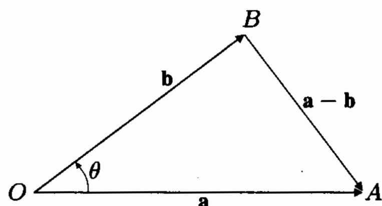


FIGURA 12.12

Como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$, la igualdad $(*)$ se verifica si y sólo si $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, luego si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. Se dice que los dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son **ortogonales** si forman un ángulo de 90°, y se escribe $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$. Hemos probado así que dos vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ son ortogonales si y sólo si su producto escalar es 0. En símbolos:

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \iff \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \qquad (12.18)$$

Para pares de vectores de $\mathbb{R}^n$ definimos la ortogonalidad entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ mediante (12.18). El concepto de ortogonalidad se usa muy a menudo en econometría. Reaparecerá en este libro en la Sección 12.5 y en la Sección 14.6, donde consideraremos "matrices ortogonales".

Nota: Para entender el contenido de esta nota hace falta trigonometría elemental —ver Apéndice C. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$. Se define el *ángulo* θ que forman por la relación

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\cdot||\mathbf{b}||} \qquad (\theta\in[0,\pi]) \qquad (12.19)$$

La definición (12.19) tiene sentido porque (12.17) implica que el miembro de la derecha tiene valor absoluto ≤ 1. Nótese también que, según (12.19), $\cos\theta=0$ si y sólo si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. Esto concuerda con (12.18) porque, para $\theta\in[0,\pi]$, es $\cos\theta=0$ si y sólo si $\theta=\pi/2$.

Problemas

1 Si

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

calcular $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Comprobar que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

2 Sean $\mathbf{a}=(1,2,2)$, $\mathbf{b}=(0,0,-3)$ y $\mathbf{c}=(-2,4,-3)$.

(a) Calcular $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\cdot(3\mathbf{b})$ y $3\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Luego comprobar todas la propiedades (12.14) para esos vectores.

(b) Calcular $||\mathbf{a}||$, $||\mathbf{b}||$ y $||\mathbf{c}||$.

(c) Comprobar (12.17) para **a** y **b**.

3 Averiguar cuáles de los pares siguientes de vectores son ortogonales:

(a) $(1,2)$ y $(-2,1)$ (b) $(1,-1,1)$ y $(-1,1,-1)$ (c) $(a,-b,1)$ y $(b,a,0)$

4 ¿Para qué valores de x es cero el producto escalar de $(x, x-1, 3)$ y $(x, x, 3x)$?

5 ¿Para qué valores de x son ortogonales $(x, -x-8, x, x)$ y $(x, 1, -2, 1)$?

6 Una empresa constructora tiene un pedido de tres tipos de casas: 5 de tipo A, 7 de tipo B y 12 de tipo C. Escribir un 3-vector **x** cuyas coordenadas sean el número de casas de cada tipo. Supongamos que cada casa del tipo A necesita 20 unidades de madera, del tipo B 18 unidades y del tipo C 25 unidades. Escribir un 3-vector **u** cuyas coordenadas sean las cantidades de madera requeridas por los tipos A, B y C. Hallar cuánta madera se necesita en total, calculando el producto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}$.

7 Probar que, si **a** y **b** son n-vectores, entonces

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$$

8 Si **a** y **b** son n-vectores, probar la *desigualdad triangular* $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| \le ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$. (*Indicación*: Comenzar en $||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Puede que se necesite usar (12.17).)

9 Una empresa produce cantidades no negativas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de n bienes distintos, a partir de cantidades no negativas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de los mismos n bienes. Para cada $i = 1, \ldots, n$ se define la *producción neta* del bien i como $y_i = z_i - x_i$. Sea p_i el precio unitario del bien i. Sean $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (el **vector de inputs**), $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ (el **vector de producción neta**) y $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ (el **vector de producción**).

(a) Calcular los ingresos y costes de la empresa.

(b) Probar que los beneficios están dados por el producto escalar $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}$. ¿Qué ocurre si $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}$ es negativo?

10 Una empresa tiene dos plantas que producen tres bienes. Sus recursos laborales son constantes. Cuando se asigna a la primera planta una fracción λ de estos recursos laborales y la fracción $1-\lambda$ a la segunda (con $0 \le \lambda \le 1$), la producción total de los tres bienes está dada por el vector

$$\lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(a) Si no se pierde producción, averiguar si los dos vectores de producción siguientes son posibles:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Cómo cambian las respuestas a la parte (a) si se puede perder parte de la producción?

(c) ¿Cómo depende de la fracción λ la función de maximización de ingresos cuando las ventas se realizan a los precios respectivos (p_1, p_2, p_3)? ¿Qué condición deben verificar los precios para que ambas plantas sigan en uso?

11 Una empresa produce el primero de dos bienes usando el segundo como materia prima, y su vector neto de producción (ver Problema 9) es $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. El vector de precios es $(1,3)$. Hallar: (a) el vector de inputs,

(b) el vector de producción, (c) los costes, (d) los ingresos, (e) el valor de la producción neta y (f) los beneficios o pérdidas.

12.5 RECTAS Y PLANOS

Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Imaginémoslos como flechas que van desde el origen a los puntos de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3). La Figura 12.13 representa a la recta L que pasa por esos puntos.

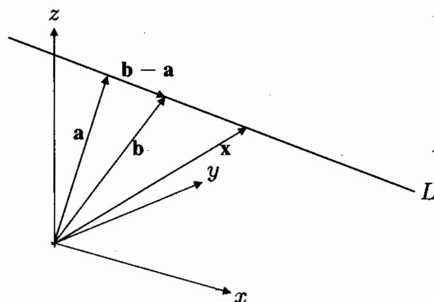


FIGURA 12.13

Sea t un número real y pongamos $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Entonces, para $t = 0$ es $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ y para $t = 1$ es $\mathbf{x} = \mathbf{b}$. En general, por la regla geométrica de sumar vectores vemos que, cuando t recorre todos los números reales, $\mathbf{x}$ recorre la recta L.

Damos la siguiente definición en $\mathbb{R}^n$:

Una recta en $\mathbf{R}^n$

La **recta** L que pasa por $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ es el conjunto de todos los $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de la forma

$$\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \tag{12.20}$$

para algún número real t.

En coordenadas, (12.20) es equivalente a

$$x_1 = (1 - t)a_1 + tb_1, x_2 = (1 - t)a_2 + tb_2, \ldots, x_n = (1 - t)a_n + tb_n \tag{12.21}$$

Ejemplo 12.10

Hallar la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(1, 2, 2)$ $(-1, -1, 4)$. ¿Dónde corta al plano x_1x_2?

Solución: Según (12.21), las ecuaciones de la recta son:

$$x_1 = (1 - t) \cdot 1 + t(-1) = 1 - 2t$$
$$x_2 = (1 - t) \cdot 2 + t(-1) = 2 - 3t$$
$$x_3 = (1 - t) \cdot 2 + t \cdot 4 = 2 + 2t$$

Esta recta corta al plano x_1x_2 cuando $x_3 = 0$. Entonces $2 + 2t = 0$, luego $t = -1$, lo que implica que $x_1 = 3$ y $x_2 = 5$. Así la recta corta al plano x_1x_2 en el punto $(3, 5, 0)$, como se ve en la Figura 12.14.

Sea $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ un punto de $\mathbb{R}^n$. La recta L que pasa por $(p_1, \ldots, p_n)$ y tiene la dirección del vector $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ viene dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{a} \qquad (t \text{ un número real cualquiera}) \tag{12.22}$$

Esto debe ser evidente a partir de la Figura 12.15, donde A es $\mathbf{p}$, B es $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{a}$, C es $\mathbf{p} + \frac{3}{4}\mathbf{a}$, D es $\mathbf{p} - \frac{1}{4}\mathbf{a}$, y así sucesivamente.

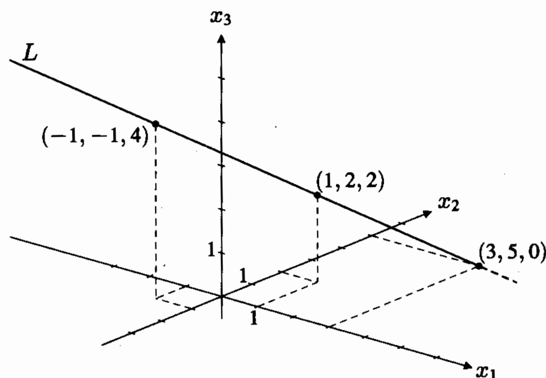


FIGURA 12.14

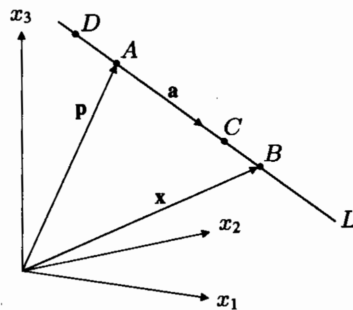


FIGURA 12.15

Hiperplanos

Consideremos primero un plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y tiene a $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \neq (0, 0, 0)$ como vector normal. La Figura 12.16 representa esta situación. Decir que el vector $\mathbf{p}$ es **normal** al plano $\mathcal{P}$ equivale a decir que $\mathbf{p}$ es normal (ortogonal o perpendicular) a cualquier recta del plano. Así, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ es un punto arbitrario de $\mathcal{P}$, entonces el vector $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ es ortogonal a $\mathbf{p}$. Por tanto, el producto escalar de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ debe ser 0, luego

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

En coordenadas esto equivale a

$$(p_1, p_2, p_3) \cdot (x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) = 0 \tag{12.23}$$

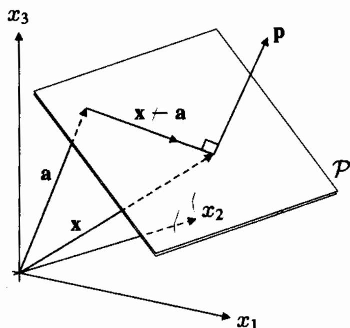


FIGURA 12.16

Así (12.23) es la ecuación general de un plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Nótese que los coeficientes (p_1, p_2, p_3) de x_1, x_2, x_3 representan un vector no nulo normal al plano.

Ejemplo 12.11

Hallar la ecuación del plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ y tiene a $\mathbf{p} = (-1, 1, 3)$ como vector normal. ¿Corta a este plano la recta del Ejemplo 12.10?

Solución: Usando (12.23), la ecuación es

$$-1 \cdot (x_1 - 2) + 1 \cdot (x_2 - 1) + 3(x_3 - (-1)) = 0$$

ó

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = -4$$

Si la recta de ecuaciones $x_1 = 1 - 2t$, $x_2 = 2 - 3t$ y $x_3 = 2 + 2t$ corta a este plano, se debe tener

$$-(1 - 2t) + (2 - 3t) + 3(2 + 2t) = -4$$

Resolviendo esta ecuación en t se obtiene $t = -11/5$, luego el punto de intersección es

$$x_1 = -1 + 2 \cdot (-11/5) = 27/5$$
$$x_2 = 2 - 3 \cdot (-11/5) = 43/5$$
$$x_3 = 2 + 2 \cdot (-11/5) = -12/5$$

De forma análoga al caso de lo planos de $\mathbb{R}^3$, introducimos la siguiente noción general en $\mathbb{R}^n$.

Un hiperplano en $\mathbb{R}^n$

El **hiperplano** que pasa por $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y es ortogonal al vector $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \neq \mathbf{0}$ es el conjunto de todos los puntos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ que verifican

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 \tag{12.24}$$

Nótese que, si el vector normal $\mathbf{p}$ se sustituye por el múltiplo escalar $s\mathbf{p}$, con $s \neq 0$, el conjunto de vectores $\mathbf{x}$ que verifican la ecuación del hiperplano no varía.

Usando coordenadas, un hiperplano tiene una ecuación del tipo

$$p_1(x_1 - a_1) + p_2(x_2 - a_2) + \cdots + p_n(x_n - a_n) = 0 \tag{12.25}$$

ó $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_na_n = A$, donde $A = p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n$.

Ejemplo 12.12

Una persona con una cantidad m para gastar en n bienes diferentes, de precios unitarios respectivos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, se puede permitir cualquier vector de compras $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaga la desigualdad presupuestaria

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq m \tag{12.26}$$

Cuando hay igualdad en (12.26) el hiperplano resultante se llama el *hiperplano presupuestario* cuyo vector normal es el de precios $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Normalmente se supone implícitamente que $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$. (Véase la Figura 15.4 de la Sección 15.2 para el caso $n = 3$.) Nótese que en la Figura 15.4, el vector (p, q, r) es normal al plano.

Problemas

1 Hallar la ecuación de la recta:

(a) que pasa por los puntos $(3,-2,2)$ y $(10,2,1)$.

(b) que pasa por el punto $(1,3,2)$ y tiene la dirección del vector $(0,-1,1)$.

2 Se da la recta L por las ecuaciones $x_1 = -t+2$, $x_2 = 2t-1$, $x_3 = t+3$.

(a) Comprobar que el punto $\mathbf{a} = (2,-1,3)$ está en L, pero que $(1,1,1)$ no lo está.

(b) Hallar la dirección de L.

(c) Hallar la ecuación del plano que pasa por $\mathbf{a}$ y es ortogonal a L.

(d) Hallar el punto en que L corta al plano $3x_1 + 5x_2 - x_3 = 6$.

3 Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(3,4,-3)$, $(5,2,1)$ y $(2,-1,4)$.

4 (a) Probar que $\mathbf{a} = (-2,1,-1)$ es un punto del plano $-x+2y+3z=1$.

(b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $\mathbf{a}$ y es perpendicular al plano de la parte (a).

12.6 MATRICES Y OPERACIONES CON MATRICES

Una **matriz** es un rectángulo de números, considerado como una entidad. Se le delimita con paréntesis o corchetes. Cuando la matriz tiene m **filas** y n **columnas** se dice que es una matriz m-por-n (ó $m \times n$). Normalmente designamos a una matriz por letras negritas mayúsculas como **A**, **B**, y así sucesivamente. Sin embargo, cuando una matriz tiene solamente una fila, se la considera como un vector fila y se la designa por una letra negrita minúscula. Análogamente se consideran como vectores columna a las matrices con una única columna. En general una matriz $m \times n$ es de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{12.27}$$

Se dice que esta matriz tiene **orden** $m \times n$. Los mn números que forman **A** se llaman sus **elementos**. En particular, a_{ij} designa al elemento en la fila i-ésima y en la columna j-ésima. Nótese que se conviene: (a) que el número de *filas* precede al de *columnas* al indicar el orden de una matriz y (b) que el número de *fila* precede al de *columna* al escribir los subíndices de un elemento. Por razones de brevedad, la matriz $m \times n$ de (12.27) se denota por $(a_{ij})_{m\times n}$ o, más sencillamente, por (a_{ij}) si no hay lugar a confusión con el orden.

Ejemplo 12.13

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1, & 2, & \sqrt{3}, & 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \\ 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices. De ellas, **A** es 2×2, **B** es 1×4 y **C** es 4×2. Por ejemplo es $a_{21} = 5$ y $c_{32} = 6$. Nótese que b_{23} no está definido porque **B** tiene sólo una fila.

Ejemplo 12.14

Construir la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{4\times 3}$ de orden 4×3 donde $a_{ij} = 2i - j$.

Solución: La matriz **A** tiene $4 \cdot 3 = 12$ elementos. Como $a_{ij} = 2i - j$, $a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$, $a_{13} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, y así sucesivamente. La matriz completa es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1-1 & 2\cdot 1-2 & 2\cdot 1-3 \\ 2\cdot 2-1 & 2\cdot 2-2 & 2\cdot 2-3 \\ 2\cdot 3-1 & 2\cdot 3-2 & 2\cdot 3-3 \\ 2\cdot 4-1 & 2\cdot 4-2 & 2\cdot 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Una matriz con el mismo número de filas que de columnas (esto es, $m = n$) se llama una **matriz cuadrada** de orden n. Si $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forman la **diagonal principal** de la matriz, que es la que va del elemento a_{11} arriba a la izquierda al a_{nn} abajo a la derecha. Por ejemplo, la matriz **A** del Ejemplo 12.13 es una matriz cuadrada de orden 2, cuya diagonal principal consta de los números 3 y 8.

Ejemplo 12.15

Consideremos el sistema lineal general

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (*)$$

de m ecuaciones con n incógnitas. Es natural representar los coeficientes de las incógnitas x_i de $(*)$ por la matriz **A** de orden $m \times n$ de (12.27). En este caso, **A** se llama la **matriz de los coeficientes** de $(*)$. Por ejemplo, la matriz de los coeficientes de

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 5 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \end{aligned} \qquad \text{es} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 12.16

Consideremos una cadena de almacenes con cuatro centros B_1, B_2, B_3 y B_4, que vende cada uno ocho bienes diferentes $V_1, V_2, \ldots, V_8$. Designemos por a_{ij} al valor en dólares de las ventas del bien V_i en el centro B_j durante un cierto mes. Una manera de registrar estos datos es usar la matriz 8×4 u "hoja de cálculo" (en lenguaje puramente informático)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} \end{pmatrix}.$$

Las 8 filas se refieren a los 8 bienes, mientras que la 4 columnas se refieren a los 4 centros. Por ejemplo, si $a_{73} = 225$, esto significa que las ventas del bien 7 en el centro 3 fueron de 225$ durante ese mes.

Operaciones con matrices

Hemos considerado a las matrices como rectángulos de números que pueden ser útiles para almacenar información. Pero la verdadera razón de introducir las matrices es que se puede operar con ellas de una manera en cierto modo semejante a las reglas generales del Álgebra.

Primero definamos lo que entendemos por igualdad de matrices. Si $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ son dos matrices $m \times n$, diremos que son **iguales** y escribiremos $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, cuando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$. Así, dos matrices **A** y **B** son iguales si tienen las

mismas dimensiones y si son iguales los elementos que ocupan el mismo lugar. Si **A** y **B** *no* son iguales escribimos $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Ejemplo 12.17

¿Cuándo es $\begin{pmatrix} 3 & t-1 \\ 2t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 2v \\ u+1 & t+w \end{pmatrix}$?

Solución: Ambas son matrices 2×2. Por tanto, la igualdad equivale a que $3 = t$, $t - 1 = 2v$, $2t = u + 1$ y $u = t + w$. Resolviendo esas ecuaciones, se deduce que las dos matrices son iguales si y sólo si $t = 3, v = 1, u = 5$ y $w = 2$. En este caso ambas matrices son iguales a $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Adición y multiplicación por un escalar

Volvamos al Ejemplo 12.16, donde la matriz **A** de orden 8×4 representa los valores en dólares de las ventas totales de los 8 bienes en los 4 centros durante un cierto mes. Supongamos que los datos del mes siguiente se almacenan en otra matriz $\mathbf{B} = (b_{ij})_{8\times 4}$ análoga. Los ingresos totales por las ventas de cada bien durante esos dos meses se pueden describir por una nueva matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{8\times 4}$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \dots, 8$ y $j = 1, \dots, 4$. Esta matriz **C** se llama la "suma" de **A** y **B** y se escribe $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

En general, si $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, definimos la **suma** de **A** y **B** como la matriz $(a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$. Así

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \tag{12.28}$$

Esta fórmula quiere decir que se suman dos matrices del mismo orden sumando los elementos que ocupan el mismo lugar.

Si α es un número real, definimos $\alpha\mathbf{A}$ por

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij})_{m\times n} = (\alpha a_{ij})_{m\times n} \tag{12.29}$$

Así, para multiplicar una matriz por un escalar, se multiplica cada elemento de la matriz por ese escalar. Volviendo a la cadena de almacenes, la ecuación matricial $\mathbf{B} = 2\mathbf{A}$ querrá decir que todos los elementos de **B** son el doble de los elementos correspondientes de **A** —esto es, que los ingresos por ventas de cada bien en cada almacén se han duplicado exactamente de un mes para el otro. (Por supuesto, esto es algo bien poco probable.)

Ejemplo 12.18

Calcular $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $3\mathbf{A}$ y $(-\frac{1}{2})\mathbf{B}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 12 & -9 & -3 \end{pmatrix}, \quad (-\tfrac{1}{2})\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz $(-1)\mathbf{A}$ se designa usualmente por $-\mathbf{A}$ y la diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ de dos matrices **A** y **B** del mismo orden se define como $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$. En nuestro ejemplo de la cadena de almacenes, $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ designa la variación neta de los ingresos por la ventas de cada bien entre un mes y el siguiente. Los elementos positivos representan aumentos y los negativos disminuciones.

Es fácil extraer unas cuantas reglas de operación a partir de las definiciones que hemos dado Sean **A**, **B** y **C** matrices $m \times n$ arbitrarias y sean α, β números reales. Sea **O** la matriz $m \times n$ cuyos elementos son todos iguales a cero, llamada la **matriz cero**. Se tienen las siguientes:

Reglas para adición de matrices y multiplicación por escalares

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} &= \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) && \text{(a)}\\
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \mathbf{B}+\mathbf{A} && \text{(b)}\\
\mathbf{A}+\mathbf{O} &= \mathbf{A} && \text{(c)}\\
\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) &= \mathbf{O} && \text{(d)}\\
(\alpha+\beta)\mathbf{A} &= \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A} && \text{(e)}\\
\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B} && \text{(f)}
\end{aligned}
\tag{12.30}
$$

Cada una de estas reglas se deduce directamente de las definiciones y de las reglas correspondientes para números.

En virtud de la regla (12.30)(**a**), no hay necesidad de poner paréntesis en expresiones como $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$. Nótese también que las definiciones (12.28) y (12.29) implican que $\mathbf{A}+\mathbf{A}+\mathbf{A}$ es igual a $3\mathbf{A}$.

Problemas

1 Escribir la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$, donde $a_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, 3$ y $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

2 Escribir las dos matrices $\mathbf{A} = (a_{ij})_{2\times 3}$, donde (a) $a_{ij} = i + j$ y (b) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

3 ¿Para qué valores de u y v son iguales las dos matrices siguientes?

$$
\begin{pmatrix} (1-u)^2 & v^2 & 3 \\ v & 2u & 5 \\ 6 & u & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & u \\ v & -3v & u-v \\ 6 & v+5 & -1 \end{pmatrix}
$$

4 Calcular $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ y $3\mathbf{A}$ para

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}
$$

5 Calcular $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, y $5\mathbf{A}-3\mathbf{B}$ para

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}
$$

12.7 MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Las operaciones matriciales que acabamos de definir son bastante naturales. La manera de definir la multiplicación de matrices no es tan automática.[2] Una motivación importante de esta definición es la manera en la que ayuda a expresar ciertas manipulaciones clave de las ecuaciones lineales.

[2] Se puede estar tentado de definir el producto de dos matrices $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ de las mismas dimensiones de esta forma: el producto de **A** y **B** es la matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times n}$ donde $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, es decir la que se obtiene multiplicando elemento a elemento. Ésta es una operación matricial respetable y, en efecto, la matriz **C** se llama el

Consideremos, por ejemplo, los siguientes dos sistemas de ecuaciones lineales

$$(1)\quad \begin{aligned} z_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ z_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \end{aligned} \qquad (2)\quad \begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \\ y_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 \end{aligned}$$

Las matrices de los coeficientes de esos dos sistemas de ecuaciones son, respectivamente,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \tag{3}$$

El sistema (1) expresa las variables z en función de las y, mientras que (2) expresa las variables y en función de las x. Así se podrán expresar las variables z en función de las x simplemente sustituyendo en (1) los valores de las y dados por (2).

Esto produce el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) + a_{13}(b_{31}x_1 + b_{32}x_2) \\ z_2 &= a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) + a_{23}(b_{31}x_1 + b_{32}x_2) \end{aligned}$$

Desarrollando y sacando factor común las x, obtenemos

$$\begin{aligned} z_1 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})x_2 \\ z_2 &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})x_2 \end{aligned} \tag{4}$$

La matriz de los coeficientes de este sistema es, por tanto,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Nótese que **A** es 2×3 y **B** es 3×2. Así **B** *tiene tantas filas como columnas tiene* **A**. La matriz **C** es 2×2. Poniendo $\mathbf{C} = (c_{ij})_{2\times 2}$, vemos que c_{11} es igual al producto escalar del vector primera fila de **A** y el vector primera columna de **B**. Más aún, c_{12} es el producto escalar del vector primera fila de **A** y el vector segunda columna de **B**, y así sucesivamente.

En general, c_{ij} es el producto escalar del vector fila i-ésima de **A** y el vector columna j-ésima de **B**.

La matriz **C** de (5) se llama la **matriz producto** de **A** y **B** y se escribe $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. Damos un ejemplo numérico.

Ejemplo 12.19

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 3\cdot 6 & 1\cdot 3 + 0\cdot 5 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 5\cdot 6 & 2\cdot 3 + 1\cdot 5 + 5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 34 & 21 \end{pmatrix}$$

Para generalizar los razonamientos que hemos hecho sobre las ecuaciones (1) a (5), supongamos que en (1) hay unas fórmulas que expresan las variables $z_1, \ldots, z_m$ como funciones lineales de $y_1, \ldots, y_n$ y en (2) hay otras que expresan las variables $y_1, \ldots, y_n$ como funciones lineales de $x_1, \ldots, x_p$. Por sustituciones de unas expresiones en otras (como antes) podemos expresar $z_1, \ldots, z_m$ como funciones lineales de $x_1, \ldots, x_p$. Estos cálculos nos llevan directamente a la siguiente definición:

---

producto de Hadamard de **A** y **B**. Sin embargo, la definición de multiplicación de matrices que damos aquí es sin duda la más utilizada en álgebra lineal.

Multiplicación de matrices

Sean $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times p}$. El producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ es la matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times p}$ cuyo elemento en la fila i-ésima y en la columna j-ésima es el producto escalar

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{12.31}$$

de la fila i-ésima de $\mathbf{A}$ por la columna j-ésima de $\mathbf{B}$.

Una manera de visualizar la multiplicación matricial es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \boxed{b_{1j}} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Nótese que el producto $\mathbf{AB}$ está definido solamente si el número de columnas de $\mathbf{A}$ es igual al número de filas de $\mathbf{B}$. También, si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos matrices, entonces $\mathbf{AB}$ puede estar definido, aun cuando $\mathbf{BA}$ no lo esté. Por ejemplo, si $\mathbf{A}$ es 6×3 y $\mathbf{B}$ es 3×5, entonces $\mathbf{AB}$ está definido (y es 6×5), mientras que $\mathbf{BA}$ no lo está: no hay manera de obtener productos escalares de los 5-vectores fila de $\mathbf{B}$ y los 6-vectores columna de $\mathbf{A}$.

Ejemplo 12.20

Sean las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz producto $\mathbf{AB}$. ¿Está definido el producto $\mathbf{BA}$?

Solución: $\mathbf{A}$ es 3×3 y $\mathbf{B}$ es 3×2, luego $\mathbf{AB}$ es la matriz 3×2 siguiente:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \boxed{2 \quad 3 \quad 1} \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \boxed{8} & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Hemos resaltado cómo se calcula el elemento de la segunda fila y primera columna de $\mathbf{AB}$. Es el producto escalar del vector segunda fila de $\mathbf{A}$ y el vector primera columna de $\mathbf{B}$; éste es $2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 8$. El producto $\mathbf{BA}$ no está definido porque el número de columnas de $\mathbf{B}$ $(= 2)$ no es igual al número de filas de $\mathbf{A}$ $(= 3)$.

Nota: En el ejemplo anterior, $\mathbf{AB}$ estaba definido pero no $\mathbf{BA}$. Aun en los casos en que $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BA}$ estén definidos, no tienen por qué ser iguales. Véase el Problema 1 y la subsección “Errores a evitar” de la Sección 12.8. Cuando existe el producto $\mathbf{AB}$ decimos que **premultiplicamos B** por $\mathbf{A}$, mientras que en $\mathbf{BA}$ **postmultiplicamos B** por $\mathbf{A}$.

Ejemplo 12.21

Tres empresas A, B y C (también numeradas 1, 2 y 3) comparten este año el mercado de un cierto bien. La empresa A tiene el 20% del mercado, B tiene el 60% y C el 20%. A lo largo

del año siguiente ocurren los siguientes cambios:

$$\begin{cases} A \text{ conserva el 85\% de sus clientes, cediendo a } B \text{ el 5\% y a } C \text{ el 10\%} \\ B \text{ conserva el 55\% de sus clientes, cediendo a } A \text{ el 10\% y a } C \text{ el 35\%} \\ C \text{ conserva el 85\% de sus clientes, cediendo a } A \text{ el 10\% y a } B \text{ el 5\%} \end{cases} \tag{1}$$

Un *vector de cuotas de mercado* es un vector columna **s** cuyas componentes son no negativas y suman 1. Definamos la matriz **T** y el vector de cuotas de mercado **s** siguientes:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}55 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}35 & 0{,}85 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Nótese que t_{ij} es la fracción de clientes de j que se hacen clientes de i en el periodo siguiente. Así, se llama a **T** la *matriz de transición*.

Calcular el vector **Ts**, probar que es también un vector de cuotas de mercado y dar una interpretación de él. ¿Cómo se interpretan $\mathbf{T}(\mathbf{Ts}), \mathbf{T}(\mathbf{T}(\mathbf{Ts})), \ldots$?

Solución:

$$\mathbf{Ts} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}55 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}35 & 0{,}85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}35 \\ 0{,}40 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Como $0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}40 = 1$, **Ts** es también un vector de cuotas de mercado. La primera componente de **Ts** se obtiene del cálculo

$$0{,}85 \cdot 0{,}2 + 0{,}10 \cdot 0{,}6 + 0{,}10 \cdot 0{,}2 = 0{,}25 \tag{3}$$

En esta expresión $0{,}85 \cdot 0{,}2$ es la cuotas de mercado de A que conserva después de 1 año, $0{,}10 \cdot 0{,}6$ es la cuota que A gana de B y $0{,}10 \cdot 0{,}2$ es la cuota que A gana de C. La suma en (3) es por tanto la cuota total de mercado de A después de un año. Los otros elementos de **Ts** tienen interpretaciones análogas, luego **Ts** debe ser el nuevo vector de cuotas de mercado después de un año. Entonces $\mathbf{T}(\mathbf{Ts})$ es el vector de cuotas de mercado después de transcurrido otro año —es decir, pasados 2 años—, y así sucesivamente. (En el Problema 4 se pide calcular $\mathbf{T}(\mathbf{Ts})$.)

Sistemas de ecuaciones en forma matricial

Introdujimos la definición (12.31) de multiplicación de matrices para poder manipular sistemas de ecuaciones. En efecto, podemos escribir los sistemas de ecuaciones lineales de forma muy compacta usando la multiplicación de matrices. Por ejemplo, consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 5 \\ 7x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned} \tag{1}$$

Escribamos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Vemos que

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

luego (1) es equivalente a la ecuación matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Consideremos el sistema lineal general (12.1) y pongamos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{12.32}$$

Así $\mathbf{A}$ es $m \times n$ y $\mathbf{x}$ es $n \times 1$. Se define la matriz producto $\mathbf{Ax}$ mediante (12.31) y es $m \times 1$. Se deduce que

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad \text{se puede escribir como} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{12.33}$$

Esta notación tan concisa resulta ser extremadamente útil.

Problemas

1 Calcular, si es posible, los productos **AB** y **BA**, para las matrices siguientes:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = (0, \ -2, \ 3, \ 1)$ (d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2 Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar las matrices $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A(BC)}$ y $\mathbf{(AB)C}$.

3 Hallar todas las matrices **B** que "conmutan" con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ en el sentido de que $\mathbf{BA} = \mathbf{AB}$.

4 Calcular $\mathbf{T(Ts)}$ en el Ejemplo 12.21.

12.8 REGLAS PARA LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Las reglas algebraicas para la suma de matrices y multiplicación de una matriz por un escalar eran naturales y fáciles de comprobar. La multiplicación de matrices es una operación más complicada y debemos examinar cuidadosamente qué reglas vamos a aplicar. Ya sabemos que la ley conmutativa $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ *no* se verifica en general. Sin embargo, las tres reglas importantes siguientes *son* válidas. Sean **A**, **B** y **C** matrices con dimensiones adecuadas para que estén definidas las operaciones que se indican. Entonces:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \qquad \textbf{(ley asociativa)} \tag{12.34}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \qquad \textbf{(ley distributiva a izquierda)} \tag{12.35}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \qquad \textbf{(ley distributiva a derecha)} \tag{12.36}$$

Nótese que hay que distinguir entre leyes distributivas a izquierda y a derecha porque, a diferencia del caso de los números, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

Ejemplo 12.22

Comprobar (12.34), (12.35) y (12.36) para las matrices siguientes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Todas las sumas y multiplicaciones están definidas. Tenemos

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Así, $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ en este caso. Además,

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$. El lector podrá ya comprobar por sí mismo la ley distributiva a derecha.

Demostración de (12.34):

Consideremos las matrices $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times p}$, y $\mathbf{C} = (c_{ij})_{p \times q}$. Es fácil ver que esas dimensiones implican que $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ y $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ están definidas y son matrices $m \times q$. Tenemos que probar que tienen los mismos elementos.

Consideremos primero $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$. El elemento rs de $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ es el producto escalar de la fila r de $\mathbf{AB}$ por la columna s de $\mathbf{C}$. Pero la fila r de $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$ es $(d_{r1}, d_{r2}, \ldots, d_{rp})$, donde d_{rj} es el producto escalar de la fila r de $\mathbf{A}$ por la columna j de $\mathbf{B}$. Así

$$d_{rj} = a_{r1}b_{1j} + a_{r2}b_{2j} + \cdots + a_{rn}b_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}b_{ij}$$

Los elementos de la columna s de $\mathbf{C}$ son $c_{1s}, c_{2s}, \ldots, c_{ps}$. Por tanto, el elemento rs de $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ es

$$\begin{aligned} d_{r1}c_{1s} + d_{r2}c_{2s} + \cdots + d_{rp}c_{ps} &= \sum_{j=1}^{p} d_{rj}c_{js} = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ri}b_{ij}\right)c_{js} \\ &= \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ri}b_{ij}c_{js}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Consideremos ahora $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$. El elemento rs de esta matriz es el producto escalar de la fila r de $\mathbf{A}$ y de la columna s de $\mathbf{BC}$. La fila r de $\mathbf{A}$ es $(a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn})$. La columna s de $\mathbf{BC}$ es $(e_{1s}, e_{2s}, \ldots, e_{ns})$, donde

$$e_{is} = b_{i1}c_{1s} + b_{i2}c_{2s} + \cdots + b_{ip}c_{ps} = \sum_{j=1}^{p} b_{ij}c_{js}$$

es el producto escalar de la fila i de **B** y la columna s-ésima de **C**. Así, el elemento rs de **A**(**BC**) es

$$\begin{aligned} a_{r1}e_{1s} + a_{r2}e_{2s} + \cdots + a_{rn}e_{ns} &= \sum_{i=1}^{n} a_{ri}e_{is} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}\Big(\sum_{j=1}^{p} b_{ij}c_{js}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ri}b_{ij}c_{js}\Big) \end{aligned} \tag{2}$$

Observando detenidamente las últimas expresiones de (1) y (2) vemos que son iguales porque ambos son iguales a la doble suma de todos los términos de la forma $a_{ri}b_{ij}c_{js}$ cuando i varía de 1 a n y j varía de 1 a p. Esto prueba (12.34).

En virtud de (12.34), no se requieren paréntesis en un producto de matrices como **ABC**. Por supuesto, lo mismo ocurre con productos de más factores.

Dejamos al lector el ejercicio de probar (12.35). Probablemente lo mejor sería probar primero (12.35) para el caso en que **A**, **B** y **C** sean matrices 2×2 , después de lo cual quedaría más claro cómo tratar el caso general. La demostración de (12.36) es análoga.

La demostración de (12.34) ha requerido un examen detallado de todos los elementos de las matrices relevantes y lo mismo va a ocurrir para probar (12.35) y (12.36). Una técnica útil en álgebra matricial es demostrar nuevos resultados usando (12.34) a (12.36), antes que descender al detalle de examinar elementos. Por ejemplo, supongamos que hay que probar que, si $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$ son matrices $n \times n$, entonces

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{AA}+\mathbf{AB}+\mathbf{BA}+\mathbf{BB} \tag{$*$}$$

En virtud de (12.35) es

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{A}+(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{B}$$

Por (12.36) se tiene que $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{A} = \mathbf{AA}+\mathbf{BA}$ y $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{B} = \mathbf{AB}+\mathbf{BB}$, a partir de lo cual se deduce ya $(*)$.

Potencias de matrices

Si **A** es una matriz cuadrada, la ley asociativa (12.34) nos permite escribir **AA** como $\mathbf{A}^2$, **AAA** como $\mathbf{A}^3$ y así sucesivamente. En general,

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{AA}\cdots\mathbf{A} \qquad (\mathbf{A} \text{ repetida } n \text{ veces}) \tag{12.37}$$

Ejemplo 12.23

Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^3$. Emitir una hipótesis sobre la forma general de $\mathbf{A}^n$ y probarla por inducción sobre n. Para más detalles sobre la inducción, véase la Sección B.5 del Apéndice B.

Solución: Vemos que

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La idea es por tanto que, para cada número natural n,

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

La comprobamos por inducción sobre n. La fórmula (∗) *es* cierta para $n = 1$. *Supongamos* que es cierta para $n = k$, esto es,

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es lo que obtendríamos en (∗) poniendo $n = k + 1$. Si la hipótesis de inducción (∗) es cierta para $n = k$, hemos probado que también es cierta para $n = k + 1$. Así (∗) es cierta para todo n.

Ejemplo 12.24

Supongamos que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son matrices $n \times n$ tales que $\mathbf{PQ} = \mathbf{Q}^2\mathbf{P}$. Demostrar que $(\mathbf{PQ})^2 = \mathbf{Q}^6\mathbf{P}^2$.

Solución: La demostración es sencilla si usamos la ley asociativa (12.34) y la hipótesis $\mathbf{PQ} = \mathbf{Q}^2\mathbf{P}$ varias veces:

$$\begin{aligned}(\mathbf{PQ})^2 &= (\mathbf{PQ})(\mathbf{PQ}) = (\mathbf{Q}^2\mathbf{P})(\mathbf{Q}^2\mathbf{P}) = (\mathbf{Q}^2\mathbf{P})\mathbf{Q}(\mathbf{QP}) = \mathbf{Q}^2(\mathbf{PQ})(\mathbf{QP}) \\ &= \mathbf{Q}^2(\mathbf{Q}^2\mathbf{P})(\mathbf{QP}) = \mathbf{Q}^2\mathbf{Q}^2(\mathbf{PQ})\mathbf{P} = \mathbf{Q}^2\mathbf{Q}^2(\mathbf{Q}^2\mathbf{P})\mathbf{P} = \mathbf{Q}^2\mathbf{Q}^2\mathbf{Q}^2\mathbf{P}^2 = \mathbf{Q}^6\mathbf{P}^2\end{aligned}$$

Sería prácticamente imposible demostrar esta igualdad usando elementos. Nótese que $(\mathbf{PQ})^2$ *no* es igual a $\mathbf{P}^2\mathbf{Q}^2$. En efecto, $(\mathbf{PQ})^2 = (\mathbf{PQ})(\mathbf{PQ}) = \mathbf{P}(\mathbf{QP})\mathbf{Q} = \mathbf{P}(\mathbf{PQ})\mathbf{Q} = \mathbf{P}^2\mathbf{Q}^2$ si $\mathbf{PQ} = \mathbf{QP}$, pero esta última condición no es necesaria.

La matriz identidad

La **matriz identidad** de orden n, que se designa por $\mathbf{I}_n$ (o más simplemente por $\mathbf{I}$), es la matriz $n \times n$ que tiene unos en la diagonal principal y ceros fuera de ella:

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad \textbf{(matriz identidad)} \tag{12.38}$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$ arbitraria, es fácil ver que $\mathbf{AI}_n = \mathbf{A}$. Análogamente, si $\mathbf{B}$ es una matriz $n \times m$ arbitraria, entonces $\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}$. En particular,

$$\mathbf{AI}_n = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad \text{(para toda matriz } \mathbf{A} \text{ de orden } n \times n) \tag{12.39}$$

Así, $\mathbf{I}_n$ es la matriz que corresponde al 1 en los números reales. Además es la única matriz con esta propiedad. Para demostrarlo supongamos que $\mathbf{E}$ es una matriz arbitraria $n \times n$ tal que $\mathbf{AE} = \mathbf{A}$ para toda matriz $\mathbf{A}$ de dimensiones $n \times n$. Poniendo $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ se tiene en particular que $\mathbf{I}_n\mathbf{E} = \mathbf{I}_n$. Pero $\mathbf{I}_n\mathbf{E} = \mathbf{E}$ por (12.39). Por tanto $\mathbf{I}_n = \mathbf{E}$.

Errores a evitar

Las reglas del álgebra matricial hacen fáciles muchos razonamientos, pero hay que ser extremadamente cautos y aplicar sólo reglas válidas. Por ejemplo, considérese la relación (∗) después de la demostración de (12.34). Se puede estar tentado de simplificar la expresión $\mathbf{AA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{BB}$ en el miembro de la derecha para obtener $\mathbf{AA} + 2\mathbf{AB} + \mathbf{BB}$. Pero esto no es correcto. Aun cuando

AB y **BA** estén definidos, **AB** no es necesariamente igual **BA**: la multiplicación de matrices *no* es conmutativa.

Ejemplo 12.25

Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probar que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Solución:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Si a y b son números reales, entonces $ab = 0$ implica que, bien a, bien b es 0. El resultado correspondiente no es verdad para matrices. En efecto, **AB** puede ser la matriz cero aun cuando ni **A** ni **B** sean la matriz cero.

Ejemplo 12.26

Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$. Calcular **AB**.

Solución:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para números reales, si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$ porque se puede simplificar dividiendo por a ambos miembros de la igualdad. La regla de cancelación correspondiente no es válida para matrices. El Ejemplo 12.26 sirve para este propósito también: $\mathbf{AB} = \mathbf{AO}$ y $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, sin embargo $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$.

Acabamos de dar ejemplos que prueban que, en general:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \tag{12.40}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{O} \quad \text{no implica que } \mathbf{A} \text{ o } \mathbf{B} \text{ sean } \mathbf{O} \tag{12.41}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \text{ y } \mathbf{A} \neq \mathbf{O} \quad \text{no implican que } \mathbf{B} = \mathbf{C} \tag{12.42}$$

Por (12.40) sabemos que la multiplicación de matrices no es conmutativa en general, mientras que por (12.42) sabemos que la ley de cancelación no vale en general para la multiplicación de matrices. La ley de cancelación *es válida* si **A** tiene inversa (véase la Sección 13.6).

Problemas

1 Comprobar la ley distributiva $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Calcular el producto

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3 Comprobar multiplicando que $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

4 Si **A** y **B** son matrices cuadradas de orden n, probar que

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \neq \mathbf{AA} - \mathbf{BB}. \tag{1}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \neq \mathbf{AA} - 2\mathbf{AB} + \mathbf{BB} \tag{2}$$

excepto en casos especiales. Hallar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la igualdad en cada caso.

5 Calcular: (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $(1, \; 2, \; -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6 Sea **A** la matriz 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar un 3-vector $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_0$ tenga longitud 1.

(b) Calcular $\mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$ $n = 1, 2, \ldots$.

7 Una matriz cuadrada **A** se llama **idempotente** si $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$.

(a) Probar que la matriz siguiente es idempotente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$ y $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$, entonces **A** y **B** son idempotentes.

(c) Probar que si **A** es idempotente, entonces $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ para todos los enteros positivos n.

Problemas avanzados

8 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(a) Probar que $\mathbf{A}^2 = (a+d)\mathbf{A} - (ad - bc)\mathbf{I}_2$.

(b) Usar la parte (a) para demostrar que $\mathbf{A}^3 = \mathbf{O}$ implica $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. (*Indicación:* Multiplicar la igualdad de la parte (a) por **A** y usar la igualdad $\mathbf{A}^3 = \mathbf{O}$ para deducir una ecuación, que se debe multiplicar luego por **A** una vez más.)

(c) Dar un ejemplo de una matriz **A** tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^3 = \mathbf{O}$ pero $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$.

12.9 LA TRASPUESTA

Supongamos que intercambiamos las filas y columnas de una matriz **A** de orden $m \times n$ de tal manera que la primera fila se convierte en la primera columna, y así sucesivamente. La nueva matriz se llama la **traspuesta** de **A**. Esta nueva matriz es de orden $n \times m$ y se designa por $\mathbf{A}'$ (or $\mathbf{A}^T$). Así,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{12.43}$$

Podemos escribir por tanto $\mathbf{A}' = (a'_{ij})$, donde $a'_{ij} = a_{ji}$; hay que intercambiar los subíndices i y j.

Ejemplo 12.27

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$.

Solución:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Las reglas siguientes son válidas para la trasposición de matrices:

Reglas para la trasposición

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A} \qquad \textbf{(a)}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \qquad \textbf{(b)}$$
$$(\alpha\mathbf{A})' = \alpha\mathbf{A}' \qquad \textbf{(c)}$$
$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}' \qquad \textbf{(d)}$$

(12.44)

Demostración: Las tres primeras reglas son fáciles de comprobar y se deja al lector su verificación. Para probar la regla (**d**), supongamos que **A** es $m \times n$ y **B** es $n \times p$. Entonces $\mathbf{A}'$ es $n \times m$, $\mathbf{B}'$ es $p \times n$, **AB** es $m \times p$, $(\mathbf{AB})'$ es $p \times m$ y $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ es $p \times m$. Así $(\mathbf{AB})'$ y $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ tienen el mismo orden. Queda por probar que las dos matrices tienen los mismos elementos.

El elemento rs de $(\mathbf{AB})'$ es el elemento sr de **AB**, que es el producto escalar del vector fila s de **A** por el vector columna r-ésima de **B**:

$$a_{s1}b_{1r} + a_{s2}b_{2r} + \cdots + a_{sn}b_{nr} \tag{1}$$

Por otra parte, el elemento rs de $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ es el producto escalar del vector fila r de $\mathbf{B}'$ (que es la r-ésima columna $(b_{1r}, b_{2r}, \ldots, b_{nr})$de B) por el vector columna s de $\mathbf{A}'$ (que es la s-ésima fila $(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn})$ de A):

$$b_{1r}a_{s1} + b_{2r}a_{s2} + \cdots + b_{nr}a_{sn} \tag{2}$$

Las dos sumas (1) y (2) son iguales; de hecho, (2) es también el producto escalar del vector fila s de **A** por el vector columna r-ésima de **B**. Por tanto hemos probado la regla (12.44)(**d**).

Matrices simétricas

Las matrices cuadradas con la propiedad de ser simétricas respecto de la diagonal principal se llaman **simétricas**. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

son simétricas. Las matrices simétricas se caracterizan por el hecho de que son iguales a sus traspuestas:

$$\text{La matriz } \mathbf{A} \text{ es } \textbf{simétrica} \iff \mathbf{A} = \mathbf{A}' \tag{12.45}$$

Por tanto, la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ es simétrica si y sólo si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j.

Ejemplo 12.28
Si $\mathbf{X}$ es una matriz arbitraria $m \times n$, probar que $\mathbf{XX}'$ y $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ son simétricas.

Solución: Nótese primero que $\mathbf{XX}'$ es $m \times m$, mientras que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ es $n \times n$. Sea $\mathbf{Z} = \mathbf{X}'$; obtenemos

$$(\mathbf{XX}')' = (\mathbf{XZ})' = \mathbf{Z}'\mathbf{X}' = (\mathbf{X}')'\mathbf{X}' = \mathbf{XX}'$$
$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})' = (\mathbf{ZX})' = \mathbf{X}'\mathbf{Z}' = \mathbf{X}'(\mathbf{X}')' = \mathbf{X}'\mathbf{X}$$

donde hemos usado las reglas de trasposición (12.44)(**d**) y (**a**). Se deduce que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ y $\mathbf{XX}'$ son simétricas.

Problemas

1 Hallar las traspuestas de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2$. Calcular $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})'$, $(\alpha\mathbf{A})'$, $\mathbf{AB}$, $(\mathbf{AB})'$, $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$. Comprobar luego todas las reglas de (12.44) para estos valores particulares de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y α.

3 Probar que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 13 \\ 8 & 13 & 0 \end{pmatrix}$ son simétricas.

4 ¿Para qué valores de a es $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & -1 \end{pmatrix}$ simétrica?

5 ¿Es el producto de dos matrices simétricas necesariamente simétrica?

6 (a) Si $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_3$ son matrices para las que los productos dados están definidos, probar que

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)' = \mathbf{A}_3'\mathbf{A}_2'\mathbf{A}_1'$$

(b) Probar por inducción que

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_n)' = \mathbf{A}_n'\cdots\mathbf{A}_2'\mathbf{A}_1'$$

cuando todos los productos están definidos.

7 Una matriz $\mathbf{P}$ de orden $n \times n$ se llama **ortogonal** si $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$.

(a) Probar que $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es ortogonal para $\lambda = 1/\sqrt{2}$.

(b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ es ortogonal si y sólo si $p^2 + q^2 = 1$.

(c) Probar que el producto de dos matrices ortogonales es ortogonal.

(d) Probar que dos columnas (filas) cualesquiera distintas de una matriz ortogonal son vectores ortogonales. (*Indicación:* Recuérdese la definición (12.18) de la Sección 12.4.)

Problemas avanzados

8 Si $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$, la **traza** de **A** (tr(**A**)) se define por

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Así, tr(**A**) es la suma de los elementos de la diagonal principal de **A**. Probar que si **A** y **B** son matrices $n \times n$, entonces:

(a) $\mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$

(b) $\mathrm{tr}(c\mathbf{A}) = c\,\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ (c es un escalar)

(c) $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

(d) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}') = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$

9 Sea **A** una matriz 2×2 para la cual $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Probar que $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0$.

13

Determinantes y matrices inversas

Las matrices de Cayley (1857) han florecido
y hoy constituyen un instrumento
muy importante y útil en matemáticas.
—*Howard Eves* (1979)

En este capítulo se continúa el estudio del álgebra lineal. El primer tema a tratar es el de los *determinantes*. Aunque algunos economistas han dicho que los determinantes son casi inútiles, nosotros veremos que desempeñan un papel importante en diversas áreas de matemáticas que interesan a los economistas.

Después de introducir los determinantes consideramos de importancia fundamental el concepto de *inversa* de una matriz cuadrada y sus propiedades principales. Después estudiamos la regla de Cramer para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Aunque esta regla no es eficaz para resolver sistemas de ecuaciones con más de 3 incógnitas, se usa muy a menudo en estudios teóricos.

13.1 DETERMINANTES DE ORDEN 2

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{13.1}$$

La matriz de los coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{13.2}$$

Resolviendo el sistema (13.1) de la manera usual (véase Sección A.9 del Apéndice A) se tiene

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{13.3}$$

Las dos fracciones tienen un denominador común. Este número, $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, se llama el **determinante** de la matriz **A**. Nótese que si este número es cero, las expresiones de x_1 y x_2 se quedan sin sentido —de hecho, en este caso, el sistema (13.1) o bien no tiene soluciones o tiene infinitas.

Se designa por det(**A**) ó |**A**| al determinante de **A**. Así

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{13.4}$$

para cualquier matriz **A** de orden 2×2. Se dice que éste es un **determinante de orden** 2. En el caso particular de los determinantes de orden 2, la regla para calcularlos es: (a) multiplicar los dos elementos de la diagonal principal, (b) mutiplicar los otros dos elementos y (c) restar el número resultante de (b) del número resultante de (a).

Ejemplo 13.1

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 5, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

Nota: Geométricamente, cada una de las dos ecuaciones de (13.1) representa la gráfica de una recta. Si $|\mathbf{A}| \neq 0$, las dos rectas se cortan en un único punto. Si $|\mathbf{A}| = 0$, o bien las rectas son paralelas y no hay soluciones, o coinciden y hay un número infinito de ellas.

Vemos en el Ejemplo 13.1 que los *numeradores* de las expresiones de x_1 y x_2 en (13.3) se pueden escribir también como determinantes. En efecto, si $|\mathbf{A}| \neq 0$ entonces

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} \tag{13.5}$$

Éste es un caso particular de un resultado que se conoce como la **regla de Cramer**, cuyo nombre está tomado del matemático suizo G. Cramer, 1704–1752. Hay una regla semejante para sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (véase la próxima sección). Más tarde, en la Sección 13.8, generalizaremos la regla a n ecuaciones con n incógnitas.

Ejemplo 13.2

Usar (13.5) para hallar las soluciones de

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 2x_1 - 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$



Solución:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2}$$

Comprobar que $x_1 = 1/2$, $x_2 = 3/2$ es realmente una solución sustituyendo esos valores en las ecuaciones.

Ejemplo 13.3

Usar (13.5) para hallar Q_1^D y Q_2^D en función de los parámetros en el sistema

$$\begin{aligned} 2(b + \beta_1)Q_1^D + bQ_2^D &= a - \alpha_1 \\ bQ_1^D + 2(b + \beta_2)Q_2^D &= a - \alpha_2 \end{aligned}$$

Solución: El determinante de la matriz de los coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(b+\beta_1) & b \\ b & 2(b+\beta_2) \end{vmatrix} = 4(b+\beta_1)(b+\beta_2) - b^2$$

Cuando $\Delta \neq 0$, las soluciones son, por (13.5),

$$Q_1^D = \frac{\begin{vmatrix} a-\alpha_1 & b \\ a-\alpha_2 & 2(b+\beta_2) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2(b+\beta_2)(a-\alpha_1) - b(a-\alpha_2)}{\Delta}$$

$$Q_2^D = \frac{\begin{vmatrix} 2(b+\beta_1) & a-\alpha_1 \\ b & a-\alpha_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2(b+\beta_1)(a-\alpha_2) - b(a-\alpha_1)}{\Delta}$$

Este ejemplo muestra la conveniencia de la regla de Cramer cuando hay varios parámetros en juego.

Interpretación geométrica

Los determinantes de orden 2 tienen una interpretación geométrica curiosa, como se puede ver en la Figura 13.1. Si los dos vectores están situados como en la Figura 13.1, el determinante es igual al área del paralelogramo (sombreada). Si intercambiamos los dos vectores fila del determinante, éste se convierte en un número negativo, cuyo valor absoluto es igual al área sombreada.

La Figura 13.2 ilustra por qué el resultado de la Figura 13.1 es cierto. Queremos hallar el área T. Nótese que $2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T = (a_{11} + a_{21})(a_{12} + a_{22})$, donde $T_1 = a_{12}a_{21}$, $T_2 = \frac{1}{2}a_{21}a_{22}$, y $T_3 = \frac{1}{2}a_{11}a_{12}$. Entonces $T = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ por un cálculo elemental.

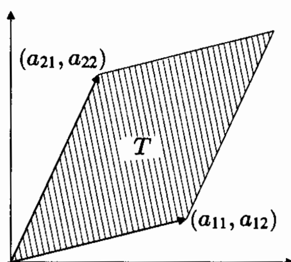


FIGURA 13.1 **Área =** $\pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

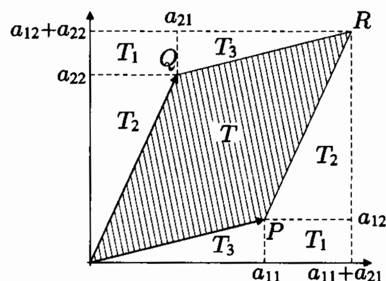


FIGURA 13.2

Problemas

1 Calcular los determinantes siguientes:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{vmatrix}$

2 Interpretar geométricamente el determinante del Problema 1(a), como en la Figura 13.1.

3 Usar la regla de Cramer (13.5) para resolver los sistemas de ecuaciones siguientes en x,y. Comprobar las respuestas por sustitución.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 - \ x_2 &= 8 \\ x_1 - 2x_2 &= 5 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 3x - 2y &= 14 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 2 \end{aligned}$

4 Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Probar que $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

5 Hallar dos matrices 2×2, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, tales que $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$.

6 Usar la regla de Cramer para hallar Y y C en el sistema,

$$Y = C + I_0 + G_0, \qquad C = a + bY$$

donde Y es el producto nacional y C es el consumo privado. Los símbolos I_0 (inversión privada), G_0 (consumo e inversión públicos), a y b representan constantes con $b < 1$. De hecho, éste es un caso típico en el que *no* se debe usar la regla de Cramer, porque se pueden hallar Y y C más sencillamente. ¿Cómo?

7 Consideremos el siguiente modelo macroeconómico ligado de dos países $i = 1, 2$ que comercian entre sí:

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_1 + A_1 + X_1 - M_1; \qquad C_1 = c_1 Y_1; \qquad M_1 = m_1 Y_1 \\ Y_2 &= C_2 + A_2 + X_2 - M_2; \qquad C_2 = c_2 Y_2; \qquad M_2 = m_2 Y_2 \end{aligned}$$

En estas expresiones, Y_i es renta, C_i es consumo, A_i es gasto autónomo (exógeno), X_i son exportaciones y M_i son importaciones del país i, para $i = 1, 2$.

(a) Interpretar las dos ecuaciones $X_1 = M_2$ y $X_2 = M_1$.

(b) Dadas las ecuaciones de la parte (a), calcular los correspondientes valores de equilibrio de Y_1 e Y_2 como funciones de las variables exógenas.

(c) ¿Cómo afecta a Y_2 un aumento de A_1? Interpretar la respuesta.

8 Sea la matriz $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 2t - 1 \\ 2t & 2 \end{pmatrix}$, para todo t. Calcular el determinante $|\mathbf{A}(t)|$ y hallar los valores de t para los cuales $|\mathbf{A}(t)| = 0$.

9 Sean $a(t)$ y $b(t)$ dos funciones derivables. Probar que

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a''(t) & b''(t) \end{vmatrix}$$

Comprobar este resultado para el determinante $|\mathbf{A}(t)|$ del Problema 8.

13.2 DETERMINANTES DE ORDEN 3

Consideremos el sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{13.6}$$

La matriz $\mathbf{A}$ de los coeficientes es 3×3. Aplicando el método de eliminación, y después de algunos cálculos algebraicos pesados, se puede resolver el sistema en x_1, x_2, y x_3. La expresión de x_1 resultante es

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32} - b_2 a_{12} a_{33} + b_2 a_{13} a_{32} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{22} a_{13}}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

A la vista de la complicación de ésta, no detallamos las expresiones de x_2 y x_3. Sin embargo afirmamos que esas expresiones tienen el mismo denominador que la de x_1. Se llama **determinante** de **A** a este denominador común, y se le representa por det(**A**) o $|\mathbf{A}|$. Se define por la relación

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ \quad - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{cases} \tag{13.7}$$

Desarrollo por adjuntos

Consideremos la suma de los términos de (13.7). Aunque parece complicada, el método de desarrollo por adjuntos hace fácil escribir todos los términos. Notemos primero que cada uno de los tres elementos a_{11}, a_{12} y a_{13} de la primera fila de **A** aparece exactamente en dos términos de (13.7). Sacando factor común, podemos escribir $|\mathbf{A}|$ en la forma

$$|\mathbf{A}| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

o, lo que es lo mismo,

$$|\mathbf{A}| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{13.8}$$

De esta manera se puede reducir el cálculo de un determinante de orden 3 al de tres determinantes de orden 2. Nótese que a_{11} está multiplicado por el determinante de segundo orden que se obtiene suprimiendo la *primera* fila y la *primera* columna de $|\mathbf{A}|$. Análogamente, a_{12} está multiplicado por menos el determinante de segundo orden que se obtiene suprimiendo la *primera* fila y la *segunda* columna de $|\mathbf{A}|$. Finalmente, a_{13} está multiplicado por el determinante de segundo orden que se obtiene suprimiendo la *primera* fila y la *tercera* columna de $|\mathbf{A}|$.

Ejemplo 13.4

Usar (13.8) para calcular $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

$$|\mathbf{A}| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 0 + 2 \cdot (-2 - 5) = -5$$

Ejemplo 13.5

Usar (13.8) para probar que

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Solución:

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} 1 & b^2 \\ 1 & c^2 \end{vmatrix} + a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = bc^2 - b^2c - ac^2 + ab^2 + a^2c - a^2b$$

No es fácil ver directamente que esta suma de 6 términos es igual a $(b-a)(c-a)(c-b)$. Lo que hay que hacer es desarrollar $(b-a)[(c-a)(c-b)]$ y comprobar la igualdad de esa forma.

Se puede desarrollar un determinante por los elementos de cualquier fila o columna. Daremos cuenta detallada de cómo hacerlo en la Sección 13.5.

Observando cuidadosamente el numerador de la expresión de x_1 al principio de esta sección vemos que se puede escribir como un determinante. Lo mismo ocurre con las fórmulas correspondientes de x_2 y x_3. En efecto, si $|\mathbf{A}| \neq 0$, se tiene entonces

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} \tag{13.9}$$

Ésta es la regla de Cramer para la solución de (13.6) (ver Sección 13.8).

Nota: Hay una regla nemotécnica para recordar la regla de Cramer. Basta observar que, en los determinantes de los numeradores de x_1, x_2 y x_3 en (13.9), la columna de la derecha en (13.6),

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

es la primera columna en el caso de x_1, la segunda en x_2 y la tercera para x_3.

Ejemplo 13.6

Resolver el sistema de ecuaciones siguiente usando (13.9):

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 4x_1 \qquad + 2x_3 &= 8 \\ 6x_2 - 3x_3 &= -12 \end{aligned}$$

Solución: En este caso, el determinante $|\mathbf{A}|$ de (13.9) es

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -24$$

Los numeradores de (13.9) son

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 8 & 0 & 2 \\ -12 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -12, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & -12 & -3 \end{vmatrix} = 12, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & -12 \end{vmatrix} = -72$$

Por tanto, (13.9) da la solución $x_1 = (-12)/(-24) = 1/2$, $x_2 = 12/(-24) = -1/2$ y $x_3 = (-72)/(-24) = 3$. Se puede comprobar que esta solución verifica el sistema sustituyendo en él los valores de x_1, x_2 y x_3.

Una interpretación geométrica

Al igual que los determinantes de orden 2, los de orden 3 tienen también una interpretación geométrica que se explica en la Figura 13.3.

Regla de Sarrus

Hay una forma alternativa de calcular los determinantes de orden 3 que le gusta a mucha gente. Se añaden a la derecha de la matriz dada sus dos primeras columnas. Primero se multiplican las tres líneas que van de arriba a la izquierda a abajo a la derecha, poniendo el signo + a los productos.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \tag{$*$}$$

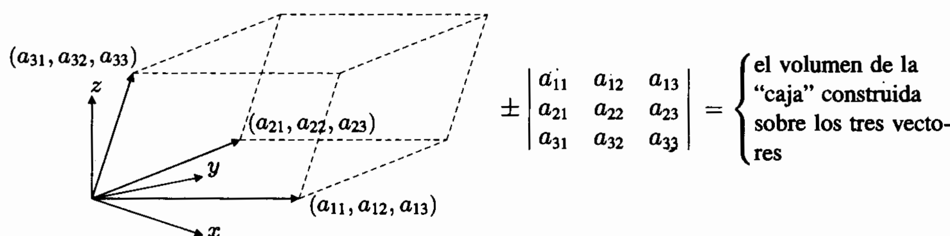


FIGURA 13.3

Luego se multiplican las tres líneas que van de abajo a la izquierda a arriba a la derecha, poniendo el signo $-$ a los productos.

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \tag{**}$$

La suma de los términos de $(*)$ y $(**)$ es igual a $|\mathbf{A}|$. Damos a continuación una visualización del procedimiento.

$$\left|\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}\right| \tag{13.10}$$

Es importante saber que esta regla, conocida como la **regla de Sarrus**, *no se generaliza* a determinantes de orden superior a 3.

Problemas

1 Calcular los determinantes siguientes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$

2 Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular $\mathbf{AB}$, $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ y $|\mathbf{AB}|$.

3 Usar la regla de Cramer para resolver los sistemas de ecuaciones siguientes. Comprobar las respuestas.

(a) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 1 \\ 3x - 2y + 5z &= 14 \\ 2x - 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$

4 Probar que

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc + ab + ac + bc$$

5 Considérese el macromodelo sencillo descrito por las tres ecuaciones siguientes:

$$Y = C + A_0, \qquad C = a + b(Y - T), \qquad T = d + tY$$

donde Y es renta, C es consumo, T es ingresos por impuestos, A_0 es el gasto autónomo (exógeno) constante y a, b, d, t son parámetros positivos. Hallar los valores de equilibrio de las variables endógenas Y, C y T por

(a) sustitución o eliminación

(b) la regla de Cramer, escribiendo las ecuaciones en forma matricial.

6 Probar que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(Así, intercambiando las filas 2 y 3 de un determinante se cambia su signo.)

13.3 DETERMINANTES DE ORDEN n

En esta sección se da una definición alternativa de determinante que es especialmente útil en la demostración de resultados generales. Si el lector no está interesado en esas demostraciones, puede saltarse esta sección y operar con los desarrollos por adjuntos siempre que tenga que trabajar con determinantes, que se explican en la Sección 13.5.

Se define el determinante $|\mathbf{A}|$ de una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$ por la expresión

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (*)$$

Un examen detenido de esta suma revela un patrón definido. Cada término es el producto de tres elementos distintos de la matriz. Cada producto contiene un elemento de cada fila de $\mathbf{A}$ y un elemento de cada columna de $\mathbf{A}$. En efecto, los elementos de los 6 términos se eligen en la matriz $\mathbf{A}$ según el patrón que muestra la Figura 13.4 (las líneas se deben olvidar por el momento).

Hay exactamente 6 formas diferentes de elegir tres elementos de una matriz 3×3, de tal forma que haya un elemento de cada fila y un elemento de cada columna. Los 6 productos correspondientes aparecen en $(*)$. ¿Cómo se determina el signo de los términos de $(*)$? Usando las líneas dibujadas en cada una de las 6 cajas se ve la siguiente regla:[1]

La regla de los signos

Para determinar el signo de un término cualquiera de la suma, se señalan en el cuadro los elementos que aparecen en ese término. Se unen con segmentos todos los pares posibles de esos elementos. Esos segmentos pueden subir o bajar (cuando se va de izquierda a derecha). Señálense sólo los segmentos que suben. Si el número de ellos es par, se asocia el signo $+$ al término correspondiente; si es impar se le asigna el signo $-$. (13.11)

Apliquemos esta regla a las 6 cajas de la Figura 13.4: en la caja 1, no hay segmentos que suban, luego $a_{11}a_{22}a_{33}$ tiene signo $+$. En la caja 4, hay exactamente un segmento que sube, luego el término $a_{12}a_{21}a_{33}$ tiene signo $-$, y así sucesivamente.

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz $n \times n$ arbitraria. Tomemos n elementos de $\mathbf{A}$ de tal forma que haya exactamente un elemento de cada fila y uno de cada columna. El producto de esos n elementos

[1] Se describe la regla de los signos (13.11) de una forma inusual. Sin embargo es equivalente a la regla de los signos basada en los conceptos de permutaciones pares e impares que se da en la mayoría de los libros de álgebra lineal.

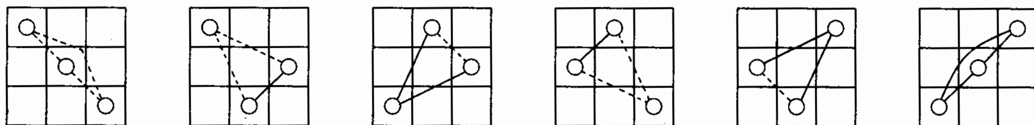


FIGURA 13.4

es una expresión de la forma $a_{1r_1}a_{2r_2}\cdots a_{nr_n}$. Los números $r_1, r_2, \ldots, r_n$ forman una permutación de los números $1, 2, \ldots, n$. Se pueden permutar los números $1, 2, \ldots, n$ de $n! = 1\cdot 2\cdots(n-1)n$ maneras distintas. En efecto, hay n maneras de elegir el primer elemento; una vez fijado éste, hay $n-1$ maneras de elegir el segundo elemento y así sucesivamente.

Definimos ahora el determinante de **A**, $\det \mathbf{A}$ ó $|\mathbf{A}|$, de la forma siguiente:

$|\mathbf{A}|$ es una suma de $n!$ términos donde:

1. Cada término es el producto de n elementos de la matriz, tomando un elemento de cada fila y uno de cada columna. Más aún, todo producto de n factores de la forma anterior aparece en la suma exactamente una vez.
2. Se halla el signo de cada término aplicando la regla de los signos (13.11).

(13.12)

En símbolos se tiene

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (\pm) a_{1r_1}a_{2r_2}\cdots a_{nr_n} \tag{13.13}$$

Ejemplo 13.7

Consideremos el determinante de una matriz 4×4 arbitraria $\mathbf{A} = (a_{ij})_{4\times 4}$:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & a_{14} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} \end{vmatrix}$$

Este determinante es una suma de $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ términos. Uno de ellos es $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$, cuyos factores son los elementos de la matriz que están marcados. ¿Cuál es el signo de ese término? Según (13.11), el término debe tener signo + porque hay dos segmentos que suben. Comprobar los signos de los cuatro términos que se especifican en la siguiente suma:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + \cdots + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - \cdots + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

Nótese que hay 20 términos que no hemos escrito.

El determinante de una matriz $n\times n$ se llama un **determinante de orden n**. En general, los determinantes son difíciles de calcular usando la definición (13.12), aun cuando n valga solamente 4 ó 5. Si $n > 5$, la tarea es enorme. Por ejemplo, si $n = 6$ es $n! = 720$, luego hay 720 términos en el desarrollo del determinante. Afortunadamente hay otros métodos de calcular un determinante que reducen considerablemente la labor. La mayoría de los computadores tienen programas estándar para calcular determinantes.

Hay unos pocos casos especiales para los que es fácil calcular un determinante aun cuando su orden sea elevado. Por ejemplo, es fácil ver que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \tag{13.14}$$

En esta matriz, todos los elementos *debajo* de la diagonal principal son 0, y el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal. Para ver por qué nótese que, para escribir un término que no sea 0 seguro, hay que tomar a_{11} de la columna 1. No podemos tomar a_{12} de la columna 2 porque ya hemos elegido el elemento a_{11} de la primera fila. Por tanto, nos vemos obligados a tomar el elemento a_{22} de la columna 2 si queremos formar un término que no sea 0 seguro. Para la tercera columna habrá que tomar a_{33}, y así sucesivamente. Por tanto, sólo el término $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ puede ser $\neq 0$. Este término tiene signo $+$ porque ninguno de los segmentos que unen sus elementos sube.

La matriz cuyo determinante hemos hallado en (13.14) se llama *triangular superior*. Si una matriz es la traspuesta de una triangular superior, tiene todos los elementos por encima de la diagonal principal iguales a 0 y se llama *triangular inferior*. El determinante de una matriz triangular inferior es también igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

Problemas

1 Calcular los siguientes determinantes usando la definición:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \end{vmatrix}$

2 El desarrollo del determinante de la siguiente matriz 5×5 consta de $5! = 120$ términos. Uno de ellos es el producto de los elementos marcados. Hallar su signo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \boxed{a_{35}} \\ \boxed{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \boxed{a_{54}} & a_{55} \end{vmatrix}$$

3 Hallar el signo del término producto de los elementos marcados (véase el problema anterior).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \boxed{a_{15}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxed{a_{24}} & a_{25} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & \boxed{a_{43}} & a_{44} & a_{45} \\ \boxed{a_{51}} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

13.4 REGLAS BÁSICAS PARA LOS DETERMINANTES

Basándose en la definición (13.12) de determinante de una matriz **A** de orden $n \times n$ se puede demostrar un cierto número de propiedades importantes. Ciertamente muchas de ellas tienen interés sólo teórico, pero hacen más sencillo el cálculo de los determinantes.

Teorema 13.1 (Reglas para los determinantes)

1. Si todos los elementos de una o más filas o columnas de **A** son 0, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
2. El determinante de la traspuesta de **A** coincide con el de **A**: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$.
3. Si **B** es la matriz que se obtiene multiplicando todos los elementos de una fila (o columna) de **A** por el número α, entonces $|\mathbf{B}| = \alpha|\mathbf{A}|$.
4. Si se intercambian dos filas (o columnas) de **A**, el determinante cambia de signo, pero conserva su valor absoluto.
5. Si **A** tiene dos filas (o columnas) iguales, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
6. Si **A** tiene dos filas (o columnas) proporcionales, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
7. Si se sustituye una fila (o columna) por ella más un múltiplo escalar de otra fila (o columna) distinta, el determinante no varía.
8. El determinante del producto de las dos matrices **A** y **B** de orden $n \times n$ es igual al producto de los determinantes de los factores:

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \tag{13.15}$$

9. Si **A** es una matriz $n \times n$ y α es un número real, es

$$|\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}| \tag{13.16}$$

En las reglas 3, 4 y 7 se supone implícitamente que no cambian todas las demás filas (o columnas). Hay que recordar que, en general, el determinante de una suma *no es* igual a la suma de los determinantes:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

Se pide un ejemplo de esta desigualdad en el Problema 5 de la Sección 13.1.

Damos las demostraciones de la mayoría de esas propiedades al final de esta sección. Pero primero vamos a dar unos ejemplos de aplicación.

Regla 1: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - a_{12} \cdot 0 = 0$

Regla 2: $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad |\mathbf{A}'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Vemos que $|\mathbf{A}'|$ tiene los mismos términos que $|\mathbf{A}|$, luego $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$.

Regla 3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(\alpha a_{22}) - a_{12}(\alpha a_{21}) = \alpha(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Regla 4: $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Regla 5: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0$

Vamos a ver también cómo la regla 5 sirve para dar una cierta confirmación del resultado del Ejemplo 13.5 de la Sección 13.2. Nótese que el producto $(b-a)(c-a)(c-b)$ es 0 si $b=a$, $c=a$, ó $c=b$ y, en cada uno de esos tres casos, dos filas de la matriz son iguales.

Regla 6: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \beta a_{11} & \beta a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}(\beta a_{12}) - a_{12}(\beta a_{11}) = \beta(a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12}) = 0$

Regla 7: Se sustituye la segunda fila por ella más α por la primera. Entonces el determinante es el mismo. (Obsérvese atentamente la manera en que indicamos esta operación.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\alpha a_{11} & a_{22}+\alpha a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}+\alpha a_{12}) - a_{12}(a_{21}+\alpha a_{11})$$
$$= a_{11}a_{22} + \alpha a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} - \alpha a_{12}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Esta regla es muy útil para calcular determinantes. Damos dos ejemplos.

Ejemplo 13.8

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \hookleftarrow \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1+1 & 1+5 & 3+(-1) \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \big| \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -13 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 13/6 \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 25/3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot \frac{25}{3} = 50$$

La descripción de las operaciones es como sigue: Se sustituye la segunda fila por ella más la primera, lo que pone un 0 en la posición (21). Luego se sustituye la tercera fila por ella menos tres veces la primera, lo que pone un 0 en la posición (31). Luego se sustituye la tercera fila por ella más $13/6$ por la segunda, lo que pone un 0 en la posición (32). Obsérvese la manera en que hemos indicado estas operaciones. Terminamos en una matriz triangular superior cuyo determinante calculamos por (13.14).

En el ejemplo siguiente hay más de una operación en los dos primeros pasos.

Ejemplo 13.9

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow\!\urcorner \leftarrow\!\urcorner \\ 1 \quad \big| \\ \quad 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}$$
$$= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} \begin{matrix} -a \quad -a \\ \hookleftarrow \quad \big| \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$
$$= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (3a+b)\cdot 1 \cdot b \cdot b = b^2(3a+b)$$

Regla 8: Ésta es también una propiedad importante. Si se ha hecho el Problema 4 de la Sección 13.1, se la habrá demostrado ya para matrices 2×2. Damos un ejemplo con matrices 3×3.

Ejemplo 13.10

Comprobar que $|\mathbf{A}\,\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ para

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Se tiene que $|\mathbf{A}| = 50$ (como en el ejemplo 13.8) y $|\mathbf{B}| = -5$. Además,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 11 & 7 & 7 \\ 12 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Y así vemos que $|\mathbf{AB}| = -250 = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

Regla 9: $$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha a_{11}\alpha a_{22} - \alpha a_{12}\alpha a_{21} = \alpha^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \alpha^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

El Teorema 13.1 describe algunas de las reglas más importantes del cálculo de los determinantes. Sólo se logrará confianza en su aplicación cuando se hayan hecho muchos problemas.

Demostración del Teorema 13.1:

Regla 1: Cada uno de los $n!$ términos del desarrollo del determinante es un producto que incluye a un elemento de la fila (o columna) formada por ceros. Por tanto, todos los términos son 0, y así el determinante es 0.

Regla 2: Cada término del desarrollo de $|\mathbf{A}|$ es el producto de elementos tomados uno de cada fila y uno de cada columna. Por tanto, aparecen los mismos términos en el desarrollo del $|\mathbf{A}'|$.

¿Qué pasa con los signos? Consideremos el siguiente caso particular, con $n = 5$:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \boxed{a_{35}} \\ \boxed{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \boxed{a_{54}} & a_{55} \end{vmatrix} \qquad |\mathbf{A}'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \boxed{a_{41}} & a_{51} \\ \boxed{a_{12}} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ a_{13} & \boxed{a_{23}} & a_{33} & a_{43} & a_{53} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \boxed{a_{54}} \\ a_{15} & a_{25} & \boxed{a_{35}} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix}$$

El término $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$ aparece en $|\mathbf{A}|$ y en $|\mathbf{A}'|$. El número de segmentos que unen pares de elementos de $\mathbf{A}$ y suben es 4, igual que lo correspondiente en $\mathbf{A}'$. Esto es verdad en general. Trasponer significa aplicar una simetría respecto de la diagonal principal $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. Si el segmento L que une dos elementos de uno de los términos del desarrollo de $|\mathbf{A}|$ sube (como ocurre con la que une a_{41} y a_{35} en el ejemplo), la imagen L' de este segmento, que une los mismos dos elementos del término correspondiente en el desarrollo de $|\mathbf{A}'|$, también subirá, y viceversa.

Regla 3: Cada término del desarrollo de $|\mathbf{B}|$ es igual a α multiplicado por el término correspondiente del desarrollo de $|\mathbf{A}|$. Por tanto, $|\mathbf{B}| = \alpha|\mathbf{A}|$.

Regla 4: Consideremos primero el caso de que se intercambian dos filas contiguas, esto es, las filas i e $i+1$, para obtener $|\mathbf{A}_c|$ como se indica en la figura siguiente:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \boxed{a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \boxed{a_{i2}} & \ldots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |\mathbf{A}_c| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \boxed{a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & \boxed{a_{i2}} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vemos que todo término que aparece en el desarrollo de $|\mathbf{A}|$ aparece también en el de $|\mathbf{A}_c|$ y viceversa. ¿Qué ocurre con el signo? Consideremos las posiciones de los elementos de un término de $|\mathbf{A}|$ y del término correspondiente del determinante $|\mathbf{A}_c|$. Todos los segmentos que unen elementos que no cambian de posición tienen la misma pendiente que antes. Lo mismo ocurre para segmentos que unen un elemento que cambia de posición con uno que no cambia (véase, por ejemplo, el segmento que une a_{1n} con a_{i2} en los dos determinantes de la figura). Faltan por considerar los segmentos que unen dos elementos situados en las filas que se intercambian. Éstos deben cambiar de subir a bajar y viceversa. Como cada término del desarrollo de $|\mathbf{A}|$ y cada término del desarrollo de $|\mathbf{A}_c|$ contiene exactamente un par de elementos pertenecientes a esas dos filas, el número de segmentos que suben en cada término del desarrollo de esos determinantes debe variar en 1 exactamente. Por tanto, $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}_c|$.

Supongamos ahora que las dos filas que se intercambian no son contiguas. Comenzamos intercambiando la que está más arriba con la siguiente, ésta con la siguiente y así sucesivamente. Supongamos que necesitamos s intercambios para llevar la fila de más arriba a la posición inmediatamente debajo de la otra. Intercambiando ésta sucesivamente con las filas inmediatamente por encima se necesitan $(s-1)$ cambios para llevarla a su nueva posición. En total hemos efectuado $s + s - 1 = 2s - 1$ intercambios de filas contiguas. Cada uno de ellos cambia el signo del determinante y, en total, hemos hecho un número impar de cambios de signo. Por tanto, el determinante *cambia* de signo al intercambiar dos filas.

Regla 5: Si intercambiamos dos filas iguales, el determinante no variará. Pero, por la regla 4, ha variado de signo. Por tanto, $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}|$, lo que significa que $|\mathbf{A}| = 0$.

Regla 6: Esta regla se deduce inmediatamente de las reglas 3 y 5.

Regla 7: Simbólicamente la demostración de esta regla es como sigue, si sustituimos la fila j-ésima por ella más un múltiplo escalar de la i-ésima:

$$\begin{aligned}&\sum \pm\, a_{1r_1} \cdots a_{ir_i} \cdots (a_{jr_j} + \alpha a_{ir_j}) \cdots a_{nr_n} \\ &\quad = \sum \pm a_{1r_1} \cdots a_{ir_i} \cdots a_{jr_j} \cdots a_{nr_n} + \alpha \sum \pm a_{1r_1} \cdots a_{ir_i} \cdots a_{ir_j} \cdots a_{nr_n} \\ &\quad = |\mathbf{A}| + \alpha \cdot 0 = |\mathbf{A}|\end{aligned}$$

(La última suma es cero porque es el desarrollo de un determinante cuyas filas i-ésima y j-ésima son iguales.)

Regla 8: La demostración de esta regla para el caso $n = 2$ es el objetivo del Problema 4, Sección 13.1. El Problema 11 de esta sección sugiere una manera de probar el caso general.

Regla 9: Los elementos de la matriz $\alpha\mathbf{A}$ son los de $\mathbf{A}$ multiplicados por α. Por la regla 3, $|\alpha\mathbf{A}|$ es igual a $\alpha^n|\mathbf{A}|$ porque hay n filas, cada una de las cuales tiene α como factor de cada uno de sus elementos.

Problemas

1 Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(a) Calcular $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A'B'}$, y $\mathbf{B'A'}$.

(b) Probar que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$ y $|\mathbf{A\,B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$. ¿Es $|\mathbf{A'B'}| = |\mathbf{A}'| \cdot |\mathbf{B}'|$?

2 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Escribir $\mathbf{A}'$ y probar después que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$.

3 Calcular los determinantes siguientes de la forma más simple posible:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & -11 & 2 \end{vmatrix}$ $\qquad$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{vmatrix}$ $\qquad$ (c) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 2a \\ 1 & -a & 3 & 0 \\ a & 2 & a & 1 \\ 3a & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4 Demostrar que cada uno de los determinantes siguientes es cero:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} x-y & x-y & x^2-y^2 \\ 1 & 1 & x+y \\ y & 1 & x \end{vmatrix}$

5 Sea $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ y $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$.

6 Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices 3×3 tales que $|\mathbf{A}| = 3$ y $|\mathbf{B}| = -4$. Hallar los valores de los siguientes determinantes, en los casos en que sea posible: $|\mathbf{AB}|$, $3|\mathbf{A}|$, $|-2\mathbf{B}|$, $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ y $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$.

7 Probar que el determinante de una matriz ortogonal es igual a 1 ó -1 (véase el Problema 7 de la Sección 12.9).

8 Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden n se llama **involutiva** si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n$.

(a) Probar que el determinante de una matriz involutiva es 1 ó -1.

(b) Probar que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & 1-a^2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ son involutivas (para todo a).

(c) Probar que $\mathbf{A}$ es involutiva $\iff (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

Problemas avanzados

9 Sin calcular los determinantes, probar que

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2$$

10 Demostrar que $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ a & a+b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(na+b)$

(*Indicación:* Estudiar el Ejemplo 13.9.)

11 (a) Sean

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Demostrar que

$$|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_{21} \quad a_{22}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{AB}|$$

(Se han indicado las operaciones que hay que usar para obtener la segunda igualdad.)

(b) Tratar de generalizar el método de la parte (a) para que se pueda aplicar al caso de matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarias $n \times n$ y dar así una demostración de la Regla 8 del Teorema 13.1.

13.5 DESARROLLO POR ADJUNTOS

Según la definición (13.12) de la Sección 13.3, el determinante de una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de orden $n \times n$, es una suma de $n!$ términos. Cada término contiene un elemento de cada fila y de cada columna. Consideremos, en particular, la fila i-ésima y saquemos factor común a_{i1} de todos los términos que lo contienen, luego lo mismo con a_{i2} y así sucesivamente. Como todos los términos tienen un elemento y sólo uno de la fila i-ésima, se usan de esta forma todos los términos de $|\mathbf{A}|$. Por tanto, podemos escribir

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{ij}C_{ij} + \cdots + a_{in}C_{in} \tag{13.17}$$

Se llama a esto el *desarrollo de* $|\mathbf{A}|$ *por los elementos de la fila i-ésima*. Los coeficientes $C_{i1}, \ldots, C_{in}$ son los **adjuntos**[2] de los elementos $a_{i1}, \ldots, a_{in}$.

De la misma forma podemos desarrollar $|\mathbf{A}|$ por los elementos de la columna j-ésima:

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{ij}C_{ij} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \tag{13.18}$$

Lo que hace que los desarrollos (13.17) y (13.18) sean extremadamente útiles es que se puede calcular cada adjunto C_{ij} aplicando a la matriz A un procedimiento sencillo. Primero se suprime la fila i-ésima y la columna j-ésima obteniéndose una matriz A_{ij} de orden $(n-1) \times (n-1)$, cuyo determinante se llama un **menor**. Multiplicando el menor por el factor $(-1)^{i+j}$ se obtiene el adjunto. En símbolos, el adjunto C_{ij} está dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,j-1} & \boxed{a_{ij}} & a_{i,j+1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{13.19}$$

donde las líneas dibujadas a lo largo de la fila i-ésima y la columna j-ésima indican que hay que suprimirlas de la matriz.

Daremos una demostración de (13.19) al final de esta sección. Si observamos (13.8) en la Sección 13.2 vemos confirmada (13.19) en un caso particular. En efecto, pongamos $|\mathbf{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$. Entonces (13.8) implica que

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

de acuerdo con (13.19). Generalmente la fórmula (13.19) es complicada. Se puede comprobar si se ha entendido estudiando el ejemplo siguiente.

Ejemplo 13.11

Comprobar que el adjunto del elemento c en el determinante

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & \boxed{c} & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{es} \qquad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Hallar el valor de $|\mathbf{A}|$ usando el Ejemplo 13.4 de la Sección 13.2.

[2] Los desarrollos de (13.17) y (13.18) se llaman también los *desarrollos por adjuntos* de $|\mathbf{A}|$, que son un caso particular del desarrollo general de Laplace.

Solución: Como el elemento c está en la fila 2 y la columna 3, se ha escrito su adjunto correctamente. Para hallar el valor de $|\mathbf{A}|$ usamos (13.18) y desarrollamos por los elementos de la *tercera coluna* de $|\mathbf{A}|$ (porque tiene muchos ceros). Esto da

$$|\mathbf{A}| = a_{23}C_{23} = c(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = c(-1)(-5) = 5c$$

El Ejemplo 13.11 muestra un caso sencillo en el que se puede calcular un determinante usando el desarrollo por adjuntos. El ejemplo es particularmente simple porque hay muchos ceros en la tercera columna. Si los ceros no estuviesen de entrada allí, podríamos crearlos recurriendo a la Regla 7 del Teorema 13.1 de la Sección 13.4. Vamos a ilustrar este método con dos ejemplos.[3]

Ejemplo 13.12

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{-2}{\longleftarrow} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3(2+3) = 15$$

La igualdad (1), se obtiene desarrollando por la primera columna.

Ejemplo 13.13

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (-1)^{2+2}\cdot 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} \overset{-3/2}{\longleftarrow}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 4\cdot 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -3/2 \end{vmatrix} = 8\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{2}{2}\right) = 4$$

La igualdad (1) se obtiene desarrollando por la fila 2; la (2), desarrollando por la columna 1.

Desarrollo por adjuntos de otra línea

Por (13.17) y (13.18), si se multiplican los elementos de una fila (o columna) de una matriz por sus adjuntos y se suman los productos, se obtiene el determinante. ¿Qué ocurre si se multiplican los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de los elementos de una fila (o columna) distinta? Consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 13.14

Si $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$, el desarrollo de $|\mathbf{A}|$ por los elementos de la segunda fila es

$$|\mathbf{A}| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

Supongamos que variamos los elementos a_{21}, a_{22} y a_{23}, por ejemplo los hacemos iguales a a, b y c, respectivamente. Entonces C_{21}, C_{22} y C_{23} no cambian, luego el nuevo determinante vale

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = aC_{21} + bC_{22} + cC_{23} \qquad (*)$$

[3] Para calcular un determinante general de orden 10 usando la definición (13.12) se necesitan no menos de 36.287.999 operaciones de adición o multiplicación. El uso sistemático de la Regla 7 del Teorema 13.1 puede reducir este número a 380 aproximadamente.

En particular, si sustituimos a, b y c por a_{11}, a_{12} y a_{13} o por a_{31}, a_{32} y a_{33}, el determinante en $(*)$ es 0 porque la matriz tiene dos filas iguales. Por tanto,

$$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} = 0$$
$$a_{31}C_{21} + a_{32}C_{22} + a_{33}C_{23} = 0$$

Así, la suma de los productos de los elementos de la fila 1 o de la fila 3 por los adjuntos de los elementos de la fila 2 es cero.

Es claro que el razonamiento de este ejemplo se puede generalizar: Si se multiplican los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de una fila (o columna) distinta y se suman esos productos, el resultado es 0.

Resumimos los resultados de esta sección en el siguiente teorema:

Teorema 13.2 (Desarrollo de un determinante por adjuntos)

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$. Supongamos que se definen los adjuntos C_{ij} como en (13.19). Entonces:

$$\begin{aligned} a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} &= |\mathbf{A}| \\ a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn} &= 0 \qquad (k \neq i) \end{aligned} \tag{13.20}$$

$$\begin{aligned} a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} &= |\mathbf{A}| \\ a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + \cdots + a_{nj}C_{nk} &= 0 \qquad (k \neq j) \end{aligned} \tag{13.21}$$

El Teorema 13.2 dice que multiplicando los elementos de la fila (o columna) i-ésima por los adjuntos de los elementos de la fila (o columna) k-ésima se obtiene cero cuando $k \neq i$, y es igual a $|\mathbf{A}|$ cuando $k = i$.

Demostración de la fórmula (13.19):

La definición del adjunto C_{ij} (véase (13.17)) implica que C_{ij} es una suma de términos, cada uno conteniendo $n-1$ elementos de la matriz $\mathbf{A}$, tomados de tal forma que hay un elemento de cada fila excepto de la i-ésima, y uno de cada columna excepto de la j-ésima. Se deduce que, salvo por un posible cambio de signo de los términos, C_{ij} es el determinante de la submatriz que se obtiene suprimiendo la fila i-ésima y la columna j-ésima de $\mathbf{A}$.

Queda solamente determinar los signos correctos. Tomemos primero C_{11}, que es el determinante de la submatriz que se obtiene al suprimir la primera fila y la primera columna:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{$*$}$$

Los signos de los términos de C_{11} son los mismos que los signos de los términos correspondientes de $a_{11}C_{11}$. Los signos de los términos de $a_{11}C_{11}$ se calculan por el número de segmentos que unen pares de elementos y suben conforme se va de izquierda a derecha, incluyendo los que suben hasta a_{11}. Pero no puede haber segmentos que suban hasta a_{11}, luego C_{11} es *igual* al determinante $(*)$.

Consideremos ahora C_{ij}. Se puede llevar la fila i-ésima hasta la fila 1 por $i-1$ intercambios de dos filas (sucesivamente con cada una de las anteriores). Las filas de arriba de la i-ésima conservan su posición relativa, pero bajan una posición. Análogamente, $j-1$ intercambios nos llevan la columna j-ésima a la primera. Como hemos intercambiado $i-1+j-1 = i+j-2$ filas y columnas en total, el determinante ha variado de signo

$i + j - 2$ veces. Como $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$, $|\mathbf{A}|$ debe venir dado por

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (**)$$

Al igual que en $(*)$, el adjunto del elemento a_{ij} en $(**)$ es igual al determinante en (13.19) porque suprimiendo la primera fila y la primera columna en $(**)$ obtenemos lo mismo que suprimiendo la fila i-ésima y la columna j-ésima en la matriz original. Por tanto, el factor de a_{ij} en el desarrollo de $|\mathbf{A}|$ está dado por (13.19).

Problemas

1 Usar el método de los Ejemplos 13.12 y 13.13 para calcular los determinantes siguientes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 12 \end{vmatrix}$

2 Calcular los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Problemas avanzados

3 Se puede demostrar que, para todo $n = 2, 3, \dots,$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Se llama a éste el **determinante de Vandermonde**. El símbolo de producto Π significa que se toma el producto de todos los factores de la forma $x_i - x_j$ para $i > j$, donde i y j varían desde 1 hasta n. (Si $n = 3$, entonces $\Pi_{1 \le j < i \le 3}(x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$. Véase Ejemplo 13.5 de la Sección 13.2.) Demostrar la igualdad para $n = 4$. (*Indicación:* Multiplicar las columnas tercera, segunda y primera sucesivamente por $-x_1$, antes de sumar los resultados a la columna siguiente en cada caso. Usar el resultado para $n = 3$.)

13.6 LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Supongamos que α es un número real distinto de cero. Existe entonces un único número α^{-1} que tiene la propiedad de que $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$. Llamamos a α^{-1} el inverso multiplicativo de α. Vimos en la Sección 12.8 que la matriz identidad $\mathbf{I}$ (con unos en la diagonal principal y ceros fuera) es la matriz equivalente al 1 en el sistema de los números reales.[4] Esto hace que la terminología siguiente parezca natural.

[4] De ahora en adelante escribiremos siempre $\mathbf{I}$ en lugar de $\mathbf{I}_n$ cuando la dimensión n de la matriz identidad sea obvia.

Dada una matriz **A**, si existe una matriz **X** tal que

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I} \tag{13.22}$$

decimos que **X** es una **matriz inversa** de **A**. Más aún, se dice que **A** es **matriz invertible** en este caso. Como $\mathbf{XA} = \mathbf{AX} = \mathbf{I}$, la matriz **A** es también una inversa de **X** —esto es, **A** y **X** son inversas la una de la otra. Nótese que solamente en el caso de matrices cuadradas pueden estar definidos los productos **AX** y **XA** y ser iguales. *Así, sólo las matrices cuadradas pueden tener inversas.* Pero no todas las matrices cuadradas tienen inversa, como prueba el ejemplo siguiente.

Ejemplo 13.15

(**a**) Demostrar que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

son inversas la una de la otra.

(**b**) Probar que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Solución:

(**a**) $$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 - 6/4 & -15/10 + 6/4 \\ 5/2 - 10/4 & -15/10 + 10/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de la misma manera comprobamos que $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$.

(**b**) Observemos que, para todos los números reales x, y, z, w,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego no hay manera de encontrar x, y, z y w para que el producto de esas dos matrices sea igual a **I**. Así $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Se plantean las cuestiones siguientes:

1. *¿Qué matrices tienen inversas?*
2. *¿Puede una matriz tener más de una inversa?*
3. *¿Cómo se calcula la inversa si existe?*

Respecto a la cuestión 1, es fácil hallar una condición *necesaria* para que una matriz **A** tenga una inversa. En efecto, de (13.22) y la Regla 8 del Teorema 13.1, se deduce que $|\mathbf{AX}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{X}| = |\mathbf{I}|$. Por (13.14) de la Sección 13.3 vemos que la matriz identidad de cualquier dimensión tiene determinante 1. Así, si **X** es una inversa de **A**, debe ser

$$|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{X}| = 1 \tag{$*$}$$

De esta ecuación se deduce que una condición necesaria para que **A** tenga inversa es que $|\mathbf{A}| \neq 0$ porque $|\mathbf{A}| = 0$ no podría satisfacer $(*)$. Como veremos en la sección siguiente, la condición $|\mathbf{A}| \neq 0$ es también *suficiente* para que **A** tenga una inversa. Por tanto,

$$\text{Una matriz cuadrada } \mathbf{A} \text{ tiene una inversa} \iff |\mathbf{A}| \neq 0 \tag{13.23}$$

Una matriz $\mathbf{A}$ se llama **matriz singular** si $|\mathbf{A}| = 0$ y **matriz no singular** si $|\mathbf{A}| \neq 0$. Según (13.23), una matriz tiene inversa si y sólo si es no singular.

Respecto a la cuestión 2, la respuesta es no: una matriz no puede tener más de una inversa. En efecto, supongamos que $\mathbf{X}$ verifica (13.22) y sea también $\mathbf{AY} = \mathbf{I}$ para otra matriz cuadrada $\mathbf{Y}$. Entonces

$$\mathbf{Y} = \mathbf{IY} = (\mathbf{XA})\mathbf{Y} = \mathbf{X}(\mathbf{AY}) = \mathbf{XI} = \mathbf{X}$$

Un razonamiento semejante prueba que, si $\mathbf{YA} = \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$. *Así, la inversa de* $\mathbf{A}$ *es única si existe.* La inversa se designa normalmente por $\mathbf{A}^{-1}$. Mientras que para números podemos escribir $a^{-1} = 1/a$, el símbolo $\mathbf{I}/\mathbf{A}$ *no* significa nada; no hay reglas para dividir matrices. Nótese también que, aun cuando el producto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ esté definido, es generalmente distinto de $\mathbf{BA}^{-1}$ porque la multiplicación matricial no es conmutativa.

En la sección siguiente se da la respuesta completa a la cuestión 3. Aquí consideramos solamente el caso de matrices 2×2.

Ejemplo 13.16

Hallar la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(cuando exista).

Solución: Vamos a hallar una matriz $\mathbf{X}$, de orden 2×2, tal que $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}_2$. Esto significa que buscamos cuatro números x, y, z, w tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La multiplicación matricial implica que

$$\begin{aligned} ax + bz &= 1\,, \qquad & ay + bw &= 0 \\ cx + dz &= 0\,, \qquad & cy + dw &= 1 \end{aligned}$$

Nótese que tenemos dos sistemas de ecuaciones: uno es el formado por las dos ecuaciones de la izquierda y el otro por las de la derecha. La matriz de los coeficientes de ambos sistemas es $\mathbf{A}$. Si $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$, los resolvemos por la regla de Cramer ((13.5) de la Sección 13.1) (o de otra forma) obteniendo

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \qquad z = \frac{-c}{ad - bc}, \qquad y = \frac{-b}{ad - bc}, \qquad w = \frac{a}{ad - bc}$$

Por consiguiente hemos probado que, si $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$, entonces

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{13.24}$$

Para matrices cuadradas de orden 3 podemos usar la regla de Cramer (13.9) para deducir una fórmula para la inversa. De nuevo la condición para que exista la inversa es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea distinto de 0. Daremos detalles completos en la Sección 13.7.

Algunas consecuencias útiles

Si $\mathbf{A}^{-1}$ es la inversa de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. De hecho, cada una de esas ecuaciones implica la otra, en el sentido de que

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \implies \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \tag{13.25}$$

$$\mathbf{YA} = \mathbf{I} \implies \mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} \tag{13.26}$$

Para demostrar (13.25), supongamos que $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$. Entonces $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{X}| = 1$ luego $|\mathbf{A}| \neq 0$ y, por (13.23), existe $\mathbf{A}^{-1}$. Multiplicando $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ a la izquierda por $\mathbf{A}^{-1}$ obtenemos $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$. La demostración de (13.26) es casi la misma.

Se usan repetidamente esas implicaciones para demostrar propiedades de la inversa. Nótese también cómo se usa (13.25) en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 13.17

Hallar la inversa de la matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ si verifica que $\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

Solución: La ecuación matricial $\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ da $\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I}$. Pero entonces se deduce de (13.25) que $\mathbf{A}$ tiene como inversa a $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Propiedades de la inversa

Vamos a demostrar ahora unas reglas útiles para el manejo de la inversa.

Teorema 13.3 (Propiedades de la inversa)

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices invertibles $n \times n$. Entonces:

(a) $\mathbf{A}^{-1}$ es invertible y $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

(b) $\mathbf{AB}$ es invertible y $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

(c) La traspuesta $\mathbf{A}'$ es invertible y $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.

(d) $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ si c es un número $\neq 0$.

Demostración: Usamos (13.25) en cada caso:

(a) Se tiene que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, luego $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1}$.

(b) Para demostrar que $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ es la inversa de $\mathbf{AB}$, tenemos que comprobar que $(\mathbf{AB})\mathbf{X}$ es igual a $\mathbf{I}$. Se tiene que

$$(\mathbf{AB})\mathbf{X} = (\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

(c) Trasponiendo la ecuación $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ de acuerdo con (12.44)(d) de la Sección 12.9, se tiene $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})' = \mathbf{A}'(\mathbf{A}^{-1})' = \mathbf{I}' = \mathbf{I}$. Por tanto, $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.

(d) Aquí $(c\mathbf{A})(c^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = cc^{-1}\mathbf{AA}^{-1} = 1 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}$, luego $c^{-1}\mathbf{A}^{-1} = (c\mathbf{A})^{-1}$.

Notas

1. Es importante reflexionar sobre las implicaciones de las cuatro reglas del teorema 13.3 y comprender cómo se utilizan. Una historia un poco dramática puede ayudar a apreciar la regla (c).

Hace algunos años, un equipo de personas estaba calculando a mano la inversa de una matriz **A** de orden 20 × 20 para una oficina central de estadística. Después de tres semanas de duro trabajo, completaron el cálculo de la inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Entonces el jefe les dijo que no le interesaba la inversa de la matriz que habían calculado, sino la de su traspuesta. Después de un momento de pánico, el equipo se dio cuenta de que bastaba trasponer la inversa que acababan de calcular para dar la respuesta exacta (según (**c**)). En efecto, según (**c**), la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa.

2. Supongamos que **A** es invertible y simétrica —esto es, $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$. La regla (**c**) implica que $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$, luego $\mathbf{A}^{-1}$ es simétrica. *La inversa de una matriz simétrica es simétrica.*

3. La regla (**b**) se puede generalizar a productos de varias matrices. Por ejemplo, si **A**, **B** y **C** son matrices invertibles $n \times n$, entonces

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \left((\mathbf{AB})\mathbf{C}\right)^{-1} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

donde hemos usado dos veces la regla (**b**). Nótese la hipótesis en (**b**) de que **A** y **B** sean matrices $n \times n$. En estadística y econometría se consideran a menudo productos de la forma $\mathbf{XX}'$, donde **X** es $n \times m$. Entonces $\mathbf{XX}'$ es $n \times n$. Si el determinante $|\mathbf{XX}'|$ no es 0, entonces existe $(\mathbf{XX}')^{-1}$, pero no se puede usar (**b**) porque $\mathbf{X}^{-1}$ y $\mathbf{X}'^{-1}$ están definidas solamente si $n = m$.

4. Es un error bastante común el interpretar (**d**) mal. Un ejemplo de uso correcto de (**d**) es el siguiente: $(\frac{1}{2}\mathbf{A})^{-1} = 2\mathbf{A}^{-1}$.

Resolución de ecuaciones por inversión de matrices

Sea **A** una matriz $n \times n$. Si **B** es una matriz arbitraria, nos preguntamos si hay matrices **X** e **Y** de órdenes adecuados tales que

$$(1)\quad \mathbf{AX} = \mathbf{B}\,, \qquad\qquad (2)\quad \mathbf{YA} = \mathbf{B}$$

En el caso (1) la matriz **B** debe tener n filas y en el caso (2) **B** debe tener n columnas. Si se verifican estas condiciones, tenemos el resultado siguiente:

Teorema 13.4 Si $|\mathbf{A}| \neq 0$, entonces:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \iff \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{13.27}$$

$$\mathbf{YA} = \mathbf{B} \iff \mathbf{Y} = \mathbf{BA}^{-1} \tag{13.28}$$

Demostración: Multiplíquese cada lado de la ecuación $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ en (13.27) a la izquierda por $\mathbf{A}^{-1}$. Esto da $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Como $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{X}$, deducimos que $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ es la única solución posible para la ecuación. Por otra parte, sustituyendo $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ en $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, vemos que realmente verifica la ecuación.

La demostración de (13.28) es análoga: multiplíquese cada lado de $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$ a la derecha por $\mathbf{A}^{-1}$.

Nótese que, como la multiplicación de matrices no es conmutativa, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ no es necesariamente igual a $\mathbf{BA}^{-1}$.

Ejemplo 13.18

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el Teorema 13.4:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad (1)$$

Solución: Escribamos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Entonces (1) es equivalente a la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Como $|\mathbf{A}| = 2 \neq 0$, la matriz $\mathbf{A}$ tiene inversa y, según el teorema 13.4, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. La inversa de $\mathbf{A}$ se halla usando (13.24) y obtenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución de (1) es, por tanto, $x = 1$, $y = 1$. (Comprobar por sustitución que ésta es realmente la solución correcta.)

Problemas

1 Probar que la inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}$.

2 Demostrar que la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 8/7 & -1 & 3/7 \\ -2/7 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$.

3 Hallar a y b para que $\mathbf{A}$ sea la inversa de $\mathbf{B}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & 1/4 & b \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el teorema 13.4 (véase Ejemplo 13.18).

(a) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ 3x - 4y &= 5 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ 3x - 4y &= 11 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 3x - 4y &= 0 \end{aligned}$

5 Sea $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Probar que $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$. Usar esto para calcular $\mathbf{A}^{-1}$.

6 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular $|\mathbf{A}|$, $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^3$. Probar que $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{O}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz unidad de orden 3 y $\mathbf{O}$ es la matriz cero.

(b) Demostrar que $\mathbf{A}$ tiene inversa y que $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$.

(c) Hallar una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{A}$. ¿Hay otras matrices con esta propiedad?

7 (a) Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ Calcular $\mathbf{AA}'$, $|\mathbf{AA}'|$ y $(\mathbf{AA}')^{-1}$.

(b) Las matrices $\mathbf{AA}'$ y $(\mathbf{AA}')^{-1}$ de la parte (a) son simétricas. ¿Es esto una coincidencia?

8 Supongamos que **A**, **P** y **D** son matrices cuadradas tales que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

(a) Probar que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}$.

(b) Probar por inducción que $\mathbf{A}^m = \mathbf{PD}^m\mathbf{P}^{-1}$ para todo entero positivo m.

9 Dada $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$, calcular $\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^3 - 2\mathbf{B} + \mathbf{I}$ y luego hallar $\mathbf{B}^{-1}$.

10 (a) Sea **C** una matriz cuadrada de orden n que verifica $\mathbf{C}^2 + \mathbf{C} = \mathbf{I}$. Probar que **C** tiene inversa y $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{C}$.

(b) Probar que $\mathbf{C}^3 = -\mathbf{I} + 2\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}^4 = 2\mathbf{I} - 3\mathbf{C}$.

11 (a) Sea **X** una matriz $m \times n$ tal que $|\mathbf{X}'\mathbf{X}| \neq 0$. Demostrar que la matriz

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_m - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

es idempotente —esto es, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ (véase el Problema 7 de la Sección 12.8).

(b) Comprobar el resultado de la parte (a) para la matriz $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

12 Sean **A** y **T** las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{T} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} s & t & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 1 & t & -3 \end{pmatrix}$$

donde s y t son números reales.

(a) Demostrar que $\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}$ para unos ciertos valores de s y t.

(b) Supongamos que la matriz **X** satisface la ecuación $\mathbf{BX} = 2\mathbf{X} + \mathbf{C}$, donde

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Usar el resultado de la parte (a) para hallar **X**.

13 Sea **D** una matriz $n \times n$ tal que $\mathbf{D}^2 = 2\mathbf{D} + 3\mathbf{I}$. Demostrar que $\mathbf{D}^3 = a\mathbf{D} + b\mathbf{I}$ para ciertos valores de a y b. Hallar expresiones análogas para $\mathbf{D}^6$ y $\mathbf{D}^{-1}$ (esto es, expresadas en la forma $\alpha\mathbf{D} + \beta\mathbf{I}$).

13.7 UNA FÓRMULA GENERAL PARA LA INVERSA

La sección anterior presenta los hechos más importantes sobre la inversa y sus propiedades y, como tal, es lo que "cada economista debería saber". Es menos importante para la mayoría de los economistas saber mucho sobre cómo calcular inversas de matrices grandes, porque hay programas de computador que realizan muy bien estas tareas.

Sin embargo, esta sección presenta una fórmula explícita de la inversa de una matriz **A** no singular $n \times n$. Aunque esta fórmula es muy ineficaz para calcular inversas de matrices grandes, tiene interés teórico. La clave para esta fórmula es el Teorema 13.2 de la Sección 13.5 del desarrollo del determinante por adjuntos.

Designemos por $C_{11}, \ldots, C_{nn}$ los adjuntos de los elementos de **A**. Por (13.20) (la regla del desarrollo por adjuntos), se tiene que

$$a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \qquad (*)$$

Las sumas del miembro de la izquierda se parecen mucho a las que aparecen en los productos de matrices. De hecho, las n^2 ecuaciones distintas en $(*)$ se reducen a la única ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{k1} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & \dots & C_{k2} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{kn} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{pmatrix}$$

La matriz de la derecha es igual a $|\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$. Designemos por $\mathbf{C}^+ = (C_{ij})$ a la matriz de los adjuntos. La segunda matriz del producto de la izquierda es la matriz $\mathbf{C}^+$ con los índices de fila y de columna intercambiados. Así es la *traspuesta* $(\mathbf{C}^+)'$ de $\mathbf{C}^+$ y se llama la **matriz adjunta** de A, designándosele por adj (A). Así,

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = (\mathbf{C}^+)' = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{k1} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & \dots & C_{k2} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{kn} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \tag{13.29}$$

La ecuación anterior se puede escribir, por tanto, en la forma $\mathbf{A}\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$. Si $|\mathbf{A}| \neq 0$, esto implica evidentemente que $\mathbf{A}^{-1} = (1/|\mathbf{A}|) \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{A})$. Así hemos demostrado la fórmula general para la inversa:

Teorema 13.5 (Fórmula general para la inversa)

Toda matriz cuadrada $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ con determinante $|\mathbf{A}| \neq 0$ tiene una única inversa $\mathbf{A}^{-1}$ que verifica $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Esta inversa es la matriz

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{A}) \tag{13.30}$$

Si $|\mathbf{A}| = 0$, no existe una matriz $\mathbf{X}$ tal que $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}$.

Ejemplo 13.19

Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Probar que **A** tiene inversa y hallarla.

Solución: Según el teorema 13.5, **A** tiene inversa si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$. Por cálculo elemental vemos que $|\mathbf{A}| = -5$, luego existe la inversa. Los adjuntos son

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -15, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

Por tanto, la inversa de **A** es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

(Comprobar el resultado demostrando que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.)

Cálculo de inversas por operaciones elementales de filas

El Teorema 13.5 da una fórmula general para la inversa de una matriz no singular. Aunque esta fórmula tiene importancia teórica, es computacionalmente inútil para matrices mayores que 2×2. Vamos a estudiar otro método para hallar la inversa que es muy eficaz desde el punto de vista computacional. Por eso algunos programas de computador lo implementan para calcular las inversas.

Llamamos **operaciones elementales por filas** a las siguientes operaciones realizadas en una matriz:

(a) intercambiar dos filas
(b) multiplicar cada elemento de una fila por un escalar $\alpha \neq 0$
(c) sustituir la fila i-ésima, por ella más α veces la fila j-ésima

Para invertir una matriz **A** de orden $n \times n$ se construye primero la matriz $(\mathbf{A} : \mathbf{I})$ de orden $n \times 2n$, que es la que se obtiene al poner a la derecha de **A** la matriz identidad $n \times n$. Luego se aplican a esta matriz operaciones elementales por filas para transformarla en la matriz $(\mathbf{I} : \mathbf{B})$ cuyas n primeras columnas son las de la matriz **I**. Se deduce de aquí que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Si no es posible realizar esta transformación por operaciones elementales por filas, entonces **A** no tiene inversa.[5] Se ve bien el método en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13.20

Hallar la inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución: Primero formamos la matriz 3×6 que se obtiene añadiendo a la derecha de **A** la matriz identidad 3×3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La idea es usar operaciones elementales por filas sobre esta matriz de tal forma que, al final, las tres primeras columnas formen la matriz unidad. Las últimas tres columnas formarán la inversa de **A**.

Sustituimos la segunda fila por ella más -1 multiplicado por la primera. Esto pone un cero en la posición (21). El lector debe ser ya capaz de entender las otras operaciones y por qué se realizan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ \hookleftarrow \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ | \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

[5] No es difícil probar que este procedimiento da el resultado deseado, pero omitimos esta demostración.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ -3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Se deduce que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Comprobar que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.)

Problemas

1 Usar el Teorema 13.5 para calcular las inversas de las siguientes matrices, si existen:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & -16 & 8 \end{pmatrix}$

2 Hallar la inversa de $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

4 Consideremos el problema siguiente. Observaciones repetidas de un fenómeno conducen a p sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz cuadrada de coeficientes (a_{ij}), pero con distintos términos independientes:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_{i1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_{in} \end{array} \qquad (i = 1, \ldots, p) \qquad (*)$$

Decir cómo se hallan las soluciones de todos los sistemas usando operaciones elementales por filas para obtener

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_{11} & \ldots & b_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_{1n} & \ldots & b_{pn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & b^*_{11} & \ldots & b^*_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & b^*_{1n} & \ldots & b^*_{pn} \end{pmatrix}$$

¿Cuál es entonces la solución del sistema de ecuaciones $(*)$ para $i = k$?

5 Usar el método del Ejemplo 13.20 para calcular las inversas de las matrices siguientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 8 \\ -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobar los resultados multiplicando las matrices por las inversas calculadas.

13.8 REGLA DE CRAMER

La regla de Cramer para resolver un sistema de n ecuaciones lineales en n incógnitas es una generalización directa de la misma regla para sistemas de ecuaciones con 2 ó 3 incógnitas. Consideremos el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ó

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{13.31}$$

Sea D_j el determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo el vector columna j-ésima de $|\mathbf{A}|$ por la columna de los términos independientes. En símbolos:

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{13.32}$$

El desarrollo de D_j por su columna j-ésima da $D_j = C_{1j}b_1 + C_{2j}b_2 + \cdots + C_{nj}b_n$, donde los adjuntos C_{ij} están dados por (13.19), Sección 13.5. Ahora podemos demostrar el resultado siguiente:

Teorema 13.6 (Regla de Cramer)

El sistema (13.31) de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución única si $\mathbf{A}$ es no singular ($|\mathbf{A}| \neq 0$). La solución es

$$x_1 = \frac{D_1}{|\mathbf{A}|}, \quad x_2 = \frac{D_2}{|\mathbf{A}|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{|\mathbf{A}|} \tag{13.33}$$

donde $D_1, D_2, \dots, D_n$ son los definidos en (13.32).

Demostración: El sistema (13.31) se puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Usando la fórmula (13.30) de la inversa de la matriz de los coeficientes se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde los adjuntos C_{ij} están definidos en (13.19), Sección 13.5. De (2), se obtiene en particular que

$$x_j = \frac{1}{|\mathbf{A}|}[C_{1j}b_1 + C_{2j}b_2 + \cdots + C_{nj}b_n] = \frac{D_j}{|\mathbf{A}|}, \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

donde la última igualdad se obtiene del desarrollo de D_j. Esto prueba (13.33).

Ejemplo 13.21

Discutir para qué valores de p el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones y hallarlas:

$$\begin{aligned} px + \ y \quad\ &= 1 \\ x - \ y + z &= 0 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

Solución: La matriz de los coeficientes tiene determinante

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} p & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - p$$

Según el Teorema 13.6, el sistema tiene una única solución si $1 - p \neq 0$, esto es, si $p \neq 1$. En este caso, los determinantes de (13.32) son

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} p & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Calculando vemos que $D_1 = 2$, $D_2 = 1 - 3p$ y $D_3 = -1 - 3p$, luego (13.33) da

$$x = \frac{D_1}{|\mathbf{A}|} = \frac{2}{1-p}, \qquad y = \frac{D_2}{|\mathbf{A}|} = \frac{1-3p}{1-p}, \qquad z = \frac{D_3}{|\mathbf{A}|} = \frac{-1-3p}{1-p}$$

si $p \neq 1$. Si $p = 1$, sumando las dos últimas ecuaciones se obtiene $x + y = 3$, lo que contradice la primera ecuación, que es $x + y = 1$. Por tanto, no hay solución en este caso.

Sistemas homogéneos de ecuaciones

Concluimos este capítulo estudiando el caso en que los términos independientes del sistema de ecuaciones (13.31) son todos cero. El sistema se llama entonces un **sistema homogéneo**. Un sistema homogéneo tendrá siempre la llamada **solución trivial** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Sin embargo, en la mayoría de los problemas nos interesa saber cuándo un sistema homogéneo tiene **soluciones no triviales**.

Teorema 13.7 (Soluciones no triviales de los sistemas homogéneos)

El sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{13.34}$$

tiene soluciones no triviales si y sólo si la matriz de los coeficientes $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ es singular (esto es si y sólo si $|\mathbf{A}| = 0$).

Demostración Parcial:

Supongamos que $|\mathbf{A}| \neq 0$. Por la regla de Cramer, $x_1, \ldots, x_n$ vienen dados por (13.33). Pero los

numeradores de esas fracciones son 0, porque cada uno de los determinantes $D_1, \ldots, D_n$ contiene una columna formada enteramente por ceros. Entonces el sistema tiene solamente la solución trivial. En otras palabras: *el sistema (13.34) tiene únicamente soluciones no triviales sólo si el determinante* $|\mathbf{A}|$ *es cero*. Se puede probar que, si $|\mathbf{A}| = 0$, el sistema (13.34) tiene soluciones no triviales.[6]

Ejemplo 13.22

Estudiar para qué valores de λ el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales:

$$\begin{aligned} 5x + 2y + z &= \lambda x \\ 2x + y &= \lambda y \\ x + z &= \lambda z \end{aligned} \tag{1}$$

Solución: Las variables x, y, z aparecen en ambos lados de las ecuaciones, luego comenzamos por escribir el sistema en la forma estándar:

$$\begin{aligned} (5-\lambda)x + 2y + z &= 0 \\ 2x + (1-\lambda)y &= 0 \\ x + (1-\lambda)z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Por el Teorema 13.7, el sistema (2) tiene una solución no trivial si y sólo si la matriz de los coeficientes es singular:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

El valor del determinante es $\lambda(1-\lambda)(\lambda-6)$. Por tanto, el sistema (1) tiene soluciones no triviales si y sólo si $\lambda = 0$, 1, ó 6.

Problemas

1 Usar la regla de Cramer para resolver los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

(a) $$\begin{aligned} x + 2y - z &= -5 \\ 2x - y + z &= 6 \\ x - y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + z &= 2 \\ y + z + u &= 6 \\ y + u &= 1 \end{aligned}$$

2 Usar el Teorema 13.7 para demostrar que el sistema de ecuaciones siguiente tiene una solución única para todos los valores de b_1, b_2, b_3 y hallar la solución.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

3 Probar que el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ bx + cy + az &= 0 \\ cx + ay + bz &= 0 \end{aligned}$$

tiene soluciones no triviales si y sólo si $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

---

[6] Véase el Teorema 14.5 de la Sección 14.3: Si $|\mathbf{A}| = 0$, el rango de $\mathbf{A}$ es menor que n y el sistema (13.34) tiene al menos un grado de libertad, luego tiene un número infinito de soluciones.

14

Otros temas de álgebra lineal

Los matemáticos profesionales usan la palabra "obvio"
para indicar que es obvio cómo dar una demostración completa.
El uso de "obvio" para decir "Estoy seguro de que es cierto,
pero no puedo probarlo" no es una práctica recomendable.
—*C. Clark* (1982)

En un modelo económico descrito por un sistema de ecuaciones lineales es importante saber cuándo el sistema tiene solución y cuándo esta solución es única. Para dar condiciones generales de existencia y unicidad de soluciones es conveniente introducir las nociones de vectores linealmente dependientes e independientes, junto con la de rango de una matriz. Esto es lo que vamos a hacer ahora. En este capítulo se estudian también los autovalores (o valores propios) y el teorema espectral para matrices simétricas. Estos conceptos nos serán muy útiles en el Capítulo 17, cuando estudiemos las condiciones de segundo orden para optimización en varias variables.

14.1 INDEPENDENCIA LINEAL

Recuérdese que se puede escribir todo sistema de ecuaciones lineales como una ecuación vectorial. Así, el sistema del Ejemplo 13.6 de la Sección 13.2 era el siguiente:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 4x_1 + 2x_3 &= 8 \\ 6x_2 - 3x_3 &= -12 \end{aligned} \tag{1}$$

Se puede escribir este sistema como la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b} \tag{2}$$

donde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \tag{3}$$

En virtud de (2), el sistema (1) tiene solución si y sólo si **b** es combinación lineal de los vectores columna de la matriz **A** de los coeficientes. Esto ocurre en este caso porque, en el Ejemplo 13.6 Sección 13.2 veíamos que $x_1 = 1/2$, $x_2 = -1/2$ y $x_3 = 3$ constituyen una solución de (1), luego $\mathbf{b} = (1/2)\mathbf{a}_1 + (-1/2)\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$. En este caso decimos que **b** es *linealmente dependiente* de los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$, o que *depende linealmente* de ellos.

Más generalmente, sea $C \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto finito de vectores. Si un vector de C es combinación lineal de los restantes se dice que el vector *depende linealmente* de los otros y que C es un conjunto de vectores *linealmente dependientes*. Si ningún vector de C es combinación lineal de los demás se dice que C es un conjunto de vectores *linealmente independientes*.

Vamos a dar una definición equivalente de conjunto de vectores linealmente dependientes o independientes que sea simétrica.

> Los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ de $\mathbb{R}^m$ son **linealmente dependientes** si existen números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que
>
> $$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{14.1}$$
>
> Si esa ecuación se verifica solamente cuando $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ se dice que los vectores son **linealmente independientes**.

En otras palabras, una combinación lineal de vectores linealmente independientes puede ser igual al vector **0** sólo si todos los coeficientes de la combinación lineal son cero.

Ejemplo 14.1

(a) Demostrar que $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes. Interpretar el resultado.

(b) Demostrar que $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes. Interpretar el resultado.

Solución:

(a) Se ve que $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$, luego $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$. Tomando $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$ se obtiene $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ lo que, en virtud de la definición (14.1), prueba que $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son linealmente dependientes. El vector $\mathbf{a}_2$ apunta a la misma dirección que $\mathbf{a}_1$ y su longitud es dos veces la de $\mathbf{a}_1$ (ver Figura 14.1).

(b) La ecuación $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ da lugar al sistema

$$\begin{aligned} 3c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución única $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son linealmente independientes (véase Figura 14.2).

La definición formal de dependencia lineal que acabamos de dar puede parecer extraña. Sin embargo, se puede demostrar fácilmente la equivalencia siguiente:

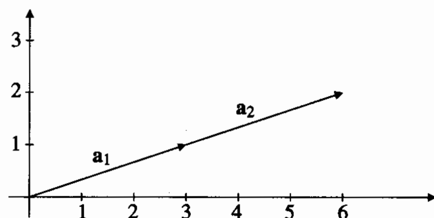


FIGURA 14.1 Los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son linealmente dependientes.

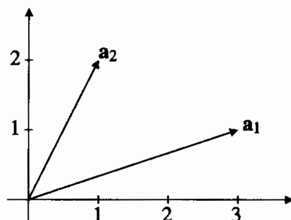


FIGURA 14.2 Los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son linealmente independientes.

Los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ de $\mathbb{R}^m$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es combinación lineal de los demás.

Demostración: Supongamos que $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ son linealmente dependientes. Entonces, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos nulos tales que $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. Reordenando los vectores si fuera preciso, se puede suponer que $c_1 \neq 0$. Despejando $\mathbf{a}_1$ se obtiene

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_1}\mathbf{a}_n$$

Así, $\mathbf{a}_1$ es combinación lineal de los restantes vectores.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{a}_1$, por ejemplo, es combinación lineal de los demás y sean $d_2, \ldots, d_n$ escalares tales que $\mathbf{a}_1 = d_2\mathbf{a}_2 + d_3\mathbf{a}_3 + \cdots + d_n\mathbf{a}_n$. Se tiene entonces que

$$(-1)\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + d_3\mathbf{a}_3 + \cdots + d_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

Como al menos uno de los coeficientes no es 0, entonces los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ son linealmente dependientes.

Como unos vectores que no sean linealmente dependientes son linealmente independientes se tiene:

Los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ de $\mathbb{R}^m$ son linealmente independientes si y sólo si ninguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Es útil tener una cierta visión geométrica de lo que significa la dependencia e independencia lineal. El Ejemplo 14.1 muestra las posibilidades para el caso de dos vectores de $\mathbb{R}^2$. Sean $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ dos vectores no paralelos de $\mathbb{R}^3$ con origen el de coordenadas. Si t_1 y t_2 son números reales, el vector $\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2$ es combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. Geométricamente, el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ se llama el **plano generado** por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. Todo vector del plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ depende linealmente de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$.

Sea $\mathbf{a}_3$ otro vector que *no* está en el plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. Entonces los tres vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ son linealmente independientes porque ninguno de ellos es combinación lineal de los demás. En general, tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y sólo si están contenidos en un plano. Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes si y sólo si no hay ningún plano que los contenga. Las Figuras 14.3 y 14.4 ilustran gráficamente estos hechos.

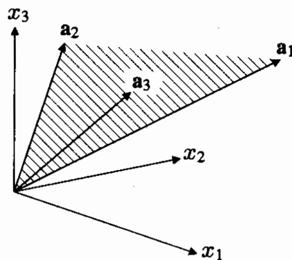


FIGURA 14.3 Los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ son linealmente dependientes.

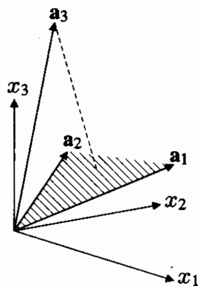


FIGURA 14.4 Los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ son linealmente independientes.

En $\mathbb{R}^m$ dos vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de los vectores es proporcional al otro, por ejemplo si $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{a}_2$. Si $c \neq 0$, se dice que son **vectores paralelos**.

Dependencia lineal y sistemas de ecuaciones lineales

Consideremos el sistema general de m ecuaciones con n incógnitas, escrito en su forma usual y como ecuación vectorial:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{14.2}$$

Hemos designado aquí por $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ a los vectores columna de la matriz de los coeficientes y por $\mathbf{b}$ al vector columna de componentes $b_1, \ldots, b_m$ (véase el Ejemplo 12.4 de la Sección 12.2).

Supongamos que (14.2) tiene dos soluciones $(u_1, \ldots, u_n)$ y $(v_1, \ldots, v_n)$. Entonces

$$u_1\mathbf{a}_1 + \cdots + u_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \qquad \text{y} \qquad v_1\mathbf{a}_1 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$(u_1 - v_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (u_n - v_n)\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{$*$}$$

Escribamos $c_1 = u_1 - v_1$, $\ldots$, $c_n = u_n - v_n$. El hecho de que las soluciones sean distintas equivale a que $c_1, \ldots, c_n$ no sean todos cero. Así, si el sistema (14.2) tiene más de una solución, los vectores columna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ son linealmente dependientes. Equivalentemente: si los vectores columna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ son linealmente independientes, el sistema (14.2) tiene a lo más una solución. Sin embargo, no podemos decidir si el sistema tiene solución sin considerar el vector $\mathbf{b}$ de los términos independientes.

Ejemplo 14.2

Consideremos los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{A}$ la matriz $n \times n$ cuyas columnas son

esos n vectores:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \tag{14.3}$$

Probar que los n vectores columna son linealmente independientes si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Solución: Los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la ecuación vectorial $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Esta ecuación vectorial es equivalente al sistema homogéneo (13.34) del Teorema 13.7, Sección 13.8 y este teorema prueba que (13.34) tiene sólo la solución trivial si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Nota: Dos vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes si y sólo si el determinante $|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2|$ de la matriz cuyas columnas son $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ es cero. Esto se verifica si y sólo si el área en la Figura 13.1 colapsa a cero. Un enunciado similar es cierto si $|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3| = 0$, donde $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 13.3).

Problemas

1 Escribir $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2 Averiguar cuáles de los pares de vectores siguientes son linealmente independientes:

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3 Demostrar que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes (usar el Ejemplo 14.2).

4 Demostrar que los vectores $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(3, 1, 4)$ y $(1, 2, -2)$ son linealmente dependientes.

5 Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^m$. Demostrar que $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ y $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ son linealmente independientes. ¿Se verifica lo mismo para $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, y $\mathbf{a} + \mathbf{c}$?

6 (a) Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vectores no nulos tales que $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$. Demostrar que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ son linealmente independientes.

(b) Sean $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^m$ tales que $\mathbf{a}_i \perp \mathbf{a}_j$ para todo $i \neq j$. Demostrar que $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ son linealmente independientes.

7 Demostrar los enunciados siguientes:

(a) Si un conjunto de vectores es linealmente dependiente, entonces todo conjunto *mayor* (esto es, un conjunto que contiene al original) es también un conjunto de vectores linealmente dependientes.

(b) Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, entonces todo subconjunto (esto es, un conjunto contenido en el original) es también un conjunto de vectores linealmente independientes.

14.2 EL RANGO DE UNA MATRIZ

Se puede asociar a toda matriz un número muy importante que se llama su *rango*. Una matriz **A** de orden $m \times n$ tiene n vectores columna, cada uno con m componentes. El mayor número de esos vectores columna de **A** que forman un conjunto linealmente independiente se llama el **rango** de **A** y se designa por $r(\mathbf{A})$.

El **rango** $r(\mathbf{A})$ de una matriz **A** es el máximo número de vectores columna linealmente independientes de **A**. Si A es la matriz cero entonces su rango es 0.	(14.4)

El conocimiento del rango de una matriz significa tener una información útil. En particular, el rango tiene una importancia crucial para enunciar los resultados referentes a la existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, como se ve en la Sección siguiente.

Ejemplo 14.3

Sea **A** una matriz cuadrada de orden n. Como la matriz tiene n columnas, el rango será menor o igual que n. De hecho, según el Ejemplo 14.2, los n vectores columna de **A** son linealmente independientes si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$. Se deduce de aquí que una matriz cuadrada **A** de orden n tiene rango n si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Se puede caracterizar el rango de una matriz en términos de los menores no nulos de la matriz. En general, se llama un **menor** de orden k de **A** al determinante de la matriz resultante de suprimir todas las filas de **A** salvo k de ellas y suprimir todas las columnas de **A** salvo k de ellas.

Ejemplo 14.4

Hallar todos los menores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Son los siguientes:

(**a**) *4 menores de orden 3.* Se obtienen suprimiendo una columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(**b**) *18 menores de orden 2.* Se obtienen suprimiendo una fila y dos columnas de todas las formas posibles. Dos de ellos son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{(suprimiendo la tercera fila y la tercera y cuarta columnas)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(suprimiendo la segunda fila y la primera y tercera columnas)}$$

(**c**) *12 menores de orden 1.* Son los 12 elementos de **A**.

La relación entre el rango y los menores viene descrita en el teorema siguiente:

Teorema 14.1

El rango $r(\mathbf{A})$ de la matriz $\mathbf{A}$ es igual al orden de un menor no nulo de $\mathbf{A}$ de orden máximo.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden n, el menor de $\mathbf{A}$ de mayor orden es $|\mathbf{A}|$. Por tanto, $r(\mathbf{A}) = n$ si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$. Esto está de acuerdo con el Ejemplo 14.2.[1]

Ejemplo 14.5

Hallar los rangos de las matrices siguientes:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Ninguna de las matrices tiene rango mayor que 3 porque el orden máximo de sus menores es 3.

(**a**) El rango es 3 porque el siguiente menor de orden 3 es $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

(**b**) Todos los menores de orden 3 son 0 y $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$, luego el rango es 2.

(**c**) Todos los menores de orden 3 y 2 son 0. El rango es 1 puesto que no todos los elementos son cero.

Ejemplo 14.6

Hallar el rango de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5-x & 2 & 1 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ según los valores de x.

Solución: Desarrollando $|\mathbf{A}|$ por la tercera columna tenemos

$$|\mathbf{A}| = 1[-(1-x)] + (1-x)[(5-x)(1-x) - 4] = x(1-x)(x-6)$$

Si $x \neq 0$, $x \neq 1$ y $x \neq 6$, el rango es 3. Como el menor

$$\begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

independientemente del valor de x, el rango de la matriz es 2 si x es igual a 0, 1, ó 6.

Recuérdese que el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta. De aquí que el resultado siguiente no sea sorprendente:

Teorema 14.2

El rango de una matriz $\mathbf{A}$ es igual al de su traspuesta: $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}')$.

[1] Se pueden encontrar demostraciones del Teorema 14.1 en la mayoría de los libros de álgebra lineal, por ejemplo, Hadley (1973).

Demostración: Sea $|\mathbf{D}|$ un menor de $\mathbf{A}$. Entonces $|\mathbf{D}'|$ es un menor de $\mathbf{A}'$ y viceversa. Como $|\mathbf{D}'| = |\mathbf{D}|$, la conclusión se deduce del Teorema 14.1.

En virtud de (14.4) y del Teorema 14.2 tenemos que el rango de una matriz es también igual al mayor número de filas linealmente independientes. Así tenemos tres maneras de probar que $r(\mathbf{A}) = k$:

(a) Hallar un conjunto de k columnas linealmente independientes y probar que ningún conjunto con *más* de k columnas es linealmente independiente.

(b) Hallar un conjunto de k filas linealmente independientes y probar que ningún conjunto con *más* de k filas es linealmente independiente.

(c) Hallar un menor de orden k distinto de 0 y probar que *todos* los menores de orden mayor que k son 0.

Una manera eficaz de hallar el rango de una matriz

Ninguno de los métodos que hemos descrito para hallar el rango de una matriz es muy eficaz. Uno mejor se basa en el hecho de que el rango de una matriz permanece invariante por operaciones elementales (véase, por ejemplo, Hadley (1973)). Al final de la Sección 13.7 definimos las operaciones elementales por filas. Las mismas operaciones hechas con columnas se llaman operaciones elementales por columnas. Las operaciones elementales por filas y columnas sirven para hallar el rango de una matriz, aparte del uso que ya hemos hecho de ellas para calcular determinantes e inversas. En lo que viene a continuación escribiremos $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ para expresar que la matriz $\mathbf{B}$ se obtiene de $\mathbf{A}$ por operaciones elementales por filas o columnas.

Ejemplo 14.7

Hallar el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Solución: Tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \;\; -1 \\ \leftarrow \!\lrcorner \quad | \\ \leftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\lrcorner \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \leftarrow\!\lrcorner \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la última matriz es evidentemente 2 porque hay exactamente dos filas linealmente independientes. Por tanto, la matriz original tiene rango 2.

Problemas

1 Hallar el rango de las matrices siguientes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

2 Hallar el rango de las matrices siguientes según los valores de los parámetros:

(a) $\begin{pmatrix} x & 0 & x^2-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & x-1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} t+3 & 5 & 6 \\ -1 & t-3 & -6 \\ 1 & 1 & t+4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 \\ 0 & z & w & 1 \\ 1 & x & y & 0 \\ 0 & z & w & 1 \end{pmatrix}$

3 Dar un ejemplo en el que $r(\mathbf{AB}) \neq r(\mathbf{BA})$. (*Indicación:* Probar con matrices 2×2.)

14.3 RESULTADOS PRINCIPALES SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Consideremos el siguiente sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{14.5}$$

ó $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz $m \times n$ de los coeficientes.

Se define la **matriz ampliada** $\mathbf{A_b}$ como la matriz $m \times (n+1)$ que se obtiene al añadir a la derecha de A la columna **b**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A_b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La relación entre los rangos de A y $\mathbf{A_b}$ es clave para determinar si el sistema (14.5) tiene solución. Como todas las columnas de A están en $\mathbf{A_b}$, el rango de A es menor o igual que el de $\mathbf{A_b}$. Además, como $\mathbf{A_b}$ tiene solamente una columna más que A, el número $r(\mathbf{A_b})$ es menor o igual que $r(\mathbf{A})+1$.

Teorema 14.3

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible (esto es, que tenga al menos una solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada. Brevemente:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{tiene solución} \quad \iff \quad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b})$$

Demostración: Designemos a los vectores columna de $\mathbf{A_b}$ por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, **b** y supongamos que (14.5) tiene una solución $(x_1, \ldots, x_n)$; entonces $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$. Multiplicando las primeras n columnas de $\mathbf{A_b}$ por $-x_1, \ldots, -x_n$ respectivamente y añadiendo la suma al vector de la última columna se tiene que $\mathbf{A_b} \sim [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{0}]$. Evidentemente esta matriz tiene el mismo rango que A, luego $r(\mathbf{A_b}) = r(\mathbf{A})$ porque el rango se conserva por operaciones elementales por columnas.

Recíprocamente, supongamos que $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = k$. Entonces A tiene k columnas linealmente independientes. Para simplificar notaciones supondremos que las primeras k columnas $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ son linealmente independientes. Como $r(\mathbf{A_b}) = k$, el vector **b** es combinación lineal $\mathbf{b} = x_1^0\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k^0\mathbf{a}_k$ de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, porque si no $\mathbf{A_b}$ tendría rango $k+1$. En este caso $(x_1^0, \ldots, x_k^0, 0, \ldots, 0)$ es una solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

El Teorema 14.3 suministra un test muy fácil para conocer si un sistema de ecuaciones lineales tiene soluciones. El sistema tiene al menos una solución si y sólo si $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b})$. Por ejemplo, si $m = 5$, $n = 10$ y $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = 2$, el sistema tiene al menos una solución.

Ejemplo 14.8

Aplicar el Teorema 14.3 al sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - \ x_2 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Solución: La matriz de los coeficientes y la ampliada son

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A_b} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Como $|\mathbf{A}| = 0$, es $r(\mathbf{A}) < 2$, luego $r(\mathbf{A}) = 1$ porque no todos sus elementos son 0. Pero $r(\mathbf{A_b}) = 2$, porque el menor formado por la segunda columna y la tercera es igual a 1. Así $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A_b})$, luego el sistema no tiene soluciones. Comprobamos el resultado por eliminación. De la primera ecuación obtenemos que $x_2 = 2x_1 - 3$, lo que sustituido en la segunda da $4x_1 - 4x_1 + 6 = 5$ y así se tiene la contradicción $6 = 5$.

Ecuaciones sobrantes

Consideremos el caso en que $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = k$ con $k < m$, es decir que el rango común a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A_b}$ es menor que el número de ecuaciones. El número máximo de vectores fila linealmente independientes de $\mathbf{A_b}$ es k, luego existen k vectores fila de $\mathbf{A_b}$ que son linealmente independientes y cualquier otro vector fila de $\mathbf{A_b}$ es combinación lineal de esos k vectores. Vamos a demostrar que si el vector $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ verifica las k ecuaciones correspondientes a los k vectores fila linealmente independientes de $\mathbf{A_b}$ entonces verifica también las ecuaciones restantes.

Para simplificar notaciones supondremos que los k primeros vectores fila de $\mathbf{A_b}$ son linealmente independientes. Para $s = k+1, \dots, m$, escribimos

$$(a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}, b_s) = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_{s\ell}(a_{\ell 1}, a_{\ell 2}, \dots, a_{\ell n}, b_\ell) \tag{$*$}$$

donde λ_{s1}, λ_{s2}, …, λ_{sk} son constantes. Supongamos que $\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} x_j^0 = b_\ell$, para $\ell = 1, \dots, k$, es decir que $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ verifican las k primeras ecuaciones de (14.5). De $(*)$ deducimos en particular que $a_{sj} = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_{s\ell} a_{\ell j}$ y que $b_s = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_{s\ell} b_\ell$. Para $s = k+1, \dots, m$ tenemos pues

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j^0 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_{s\ell} a_{\ell j} \right) x_j^0 = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_{s\ell} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} x_j^0 \right) = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_{s\ell} b_\ell = b_s$$

Esto prueba que, si $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ verifica las k primeras ecuaciones de (14.5) es automáticamente una solución de las $m-k$ últimas ecuaciones de (14.5).

Teorema 14.4

Supongamos que el sistema (14.5) es compatible y que el rango común $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = k < m$. Existen entonces $m-k$ ecuaciones que sobran, en el sentido de que toda solución del sistema formado por las otras k ecuaciones verifica también estas $m-k$ ecuaciones. Así se pueden ignorar estas $m-k$ ecuaciones para resolver el sistema.

Grados de libertad

Consideremos el caso en que $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = k$, donde k es menor que el número de variables del sistema. Como $r(\mathbf{A}) = k$ sabemos que existe al menos un menor de orden k en $\mathbf{A}$ que es distinto de 0 (Teorema 14.1).

Cambiando de orden las ecuaciones y las variables, si fuera preciso, podemos suponer que la matriz $k \times k$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

que es la submatriz de $\mathbf{A}$ de la esquina superior izquierda, tiene determinante distinto de cero.

Si $k < m$, las últimas $m - k$ ecuaciones de (14.5) sobran y el sistema (14.5) entero tiene las mismas soluciones que el formado por las primeras k ecuaciones:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{array} \tag{1}$$

En esta situación escribimos:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

de tal manera que el sistema (1) se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{Cy} + \mathbf{Rz} = \mathbf{b}^* \qquad \text{o} \qquad \mathbf{Cy} = \mathbf{b}^* - \mathbf{Rz} \tag{2}$$

Como hemos supuesto que $|\mathbf{C}| \neq 0$, la matriz $\mathbf{C}$ tiene inversa. Multiplicando a la izquierda cada miembro de la segunda ecuación de (2) por $\mathbf{C}^{-1}$ obtenemos

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}^* - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Rz} \tag{3}$$

Si elegimos un vector cualquiera $\mathbf{z}$, de componentes $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, entonces, el vector $\mathbf{y}$, y por tanto, $x_1, x_2, \ldots, x_k$, están unívocamente determinados. Estas últimas son funciones lineales de $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. Así tenemos el teorema siguiente:

Teorema 14.5

Supongamos que el sistema (14.5) es compatible y que $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = k < n$. Entonces se pueden dar valores arbitrarios a un cierto conjunto de $n - k$ variables y las restantes k variables quedan entonces unívocamente determinadas. En este caso decimos que el sistema tiene $n - k$ **grados de libertad.**

Ejemplo 14.9

Averiguar si el sistema siguiente es compatible y, en caso afirmativo, hallar sus grados de libertad.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Solución: Se tiene que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & -10 & -3 & -9 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A_b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & -10 & -3 & -9 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

En general, $r(\mathbf{A_b}) \geq r(\mathbf{A})$. Todos los menores de orden 4 de $\mathbf{A_b}$ son iguales a 0 (obsérvese que varios pares de columnas son proporcionales), luego $r(\mathbf{A_b}) \leq 3$.

Ahora bien, hay menores de orden 3 distintos de 0. Por ejemplo, el menor formado por los elementos que están en las columnas primera, tercera y cuarta y en las filas primera, segunda y cuarta es distinto de cero, esto es

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -36 \tag{$*$}$$

Por tanto, $r(\mathbf{A}) = 3$. Como $3 \geq r(\mathbf{A_b}) \geq r(\mathbf{A})$, tenemos que $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = 3$, y el sistema es compatible. Hay una ecuación que sobra.

Como las filas primera, segunda y cuarta de $\mathbf{A_b}$ son linealmente independientes, podemos prescindir de la tercera ecuación. El número de variables es 5 y, como $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = 3$, hay *2 grados de libertad.*

Vamos a hallar las soluciones del sistema. El determinante $(*)$ es distinto de 0, luego escribimos el sistema de 3 ecuaciones independientes como

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + x_4 + x_2 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 - x_2 + 6x_5 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_3 - 3x_4 + 2x_2 - 9x_5 &= 3 \end{aligned} \tag{$**$}$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz 3×3 de los coeficientes de x_1, x_3 y x_4 en $(**)$ tiene determinante distinto de 0, luego tiene inversa. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

y así se ve que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}x_2 \\ 3x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}x_2 \\ -3x_5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $x_2 = a$ y $x_5 = b$ son números reales arbitrarios, la solución general es

$$x_1 = 1, \quad x_2 = a, \quad x_3 = \tfrac{1}{2}a, \quad x_4 = -3b, \quad x_5 = b$$

Con esto se comprueba que hay 2 grados de libertad. Es conveniente comprobar que esos valores de $x_1, \ldots, x_5$ verifican el sistema de ecuaciones original para todos los valores posibles de a y b.

El concepto de grados de libertad que hemos introducido en el Teorema 14.5 es muy importante. Nótese que si un sistema de ecuaciones lineales tiene k grados de libertad, *existen* k variables que se pueden elegir arbitrariamente y las demás vienen determinadas por éstas. No es cierto que se pueda elegir arbitrariamente cualquier conjunto de k variables, en particular las primeras. En el Ejemplo 14.9 hay 2 grados de libertad, pero no se puede elegir x_1 arbitrariamente porque $x_1 = 1$.

Problemas

1 Usar los Teoremas 14.3 a 14.5 para averiguar si los siguientes sistemas de ecuaciones son compatibles. En caso afirmativo hallar el número de grados de libertad. Hallar todas las soluciones. Comprobar los resultados por eliminación.

(a) $$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 7x_4 &= 7 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 7 \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+ 2x_3} - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2 Demostrar que el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= k \\ x + cy &= 1 \end{aligned}$$

tiene solución única, salvo para un valor particular c^* de c. Hallar esa solución. Demostrar que, para $c = c^*$, el sistema no tiene solución excepto para un valor particular k^* de k. Hallar la solución en este caso.

3 Discutir las soluciones de

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -x + ay - 21z &= 2 \\ 3x + 7y + az &= b \end{aligned}$$

para diferentes valores de a y b.

4 Sea $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial. Demostrar que, si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones del sistema, también lo es $(1 - \lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2$ para todo número real λ. Usar esto para demostrar que un sistema compatible tiene o bien una solución o infinitas. En otras palabras, no puede tener, por ejemplo, exactamente tres soluciones.

5 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2q \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4q \\ 3x_1 - 2x_2 + px_3 &= q \end{aligned}$$

donde p y q son constantes arbitrarias.

(a) ¿Para qué valores de p y q tiene este sistema solución única, varias soluciones, o ninguna?

(b) Hallar para cada valor de p el conjunto de todos los vectores $\mathbf{z}$ que son ortogonales a los tres vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ p \end{pmatrix}$$

(c) Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que si un vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

6 Sea $\mathbf{A}_t$ la matriz definida por

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & t \\ 4 & 7-t & -6 \end{pmatrix}$$

para todo número real t.

(a) ¿Para qué valores de t tiene inversa $\mathbf{A}_t$?

(b) Hallar el rango de $\mathbf{A}_t$ para los distintos valores de t.

(c) Si $t = -3$, hallar todos los vectores $\mathbf{x}$ que verifican la ecuación vectorial

$$\mathbf{A}_{-3}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(d) Para $t = 2$, hallar un vector $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ que sea ortogonal a cada vector de la forma $\mathbf{A}_2\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x}$ es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$.

14.4 AUTOVALORES

Hemos visto en la Sección 12.8 las potencias $\mathbf{A}^n$, $n = 1, 2, \dots$ de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$. Estas potencias surgen en muchos problemas de aplicación. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden elevado, calcular $\mathbf{A}^5$ o, aún peor, $\mathbf{A}^{100}$ es un problema serio. Supongamos que hay un vector no nulo $\mathbf{x}$ y un escalar λ tales que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (*)$$

En este caso se tendrá $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$. Se demuestra por inducción que

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$$

para todo n. Así se pueden deducir muchas propiedades de $\mathbf{A}^n$ estudiando el número λ^n, lo que es mucho más sencillo.

Un vector $\mathbf{x}$ no nulo que verifica $(*)$ se llama **autovector** o **vector propio**, y el número λ correspondiente se llama **autovalor** o **valor propio**. El vector cero no es interesante como solución porque $\mathbf{A0} = \lambda\mathbf{0}$ para todo escalar λ.

Se usan los resultados sobre autovalores y autovectores en teoría de optimización, en teoría de ecuaciones diferenciales lineales y en diferencias, en estadística, en dinámica de poblaciones y en muchas otras aplicaciones de las matemáticas. Damos una definición formal:

Autovalores y autovectores

Si $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$, decimos que el escalar λ es un **autovalor** de $\mathbf{A}$ si existe un vector no nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \tag{14.6}$$

En esta situación se dice que $\mathbf{x}$ es un **autovector** de $\mathbf{A}$ de autovalor λ.

Debe notarse que, si $\mathbf{x}$ es un autovector asociado a λ, entonces $\alpha\mathbf{x}$ es otro autovector asociado a λ, para todo escalar $\alpha \neq 0$. Los autovalores y autovectores se llaman también **valores característicos** y **vectores característicos**, respectivamente.

Ejemplo 14.10

Hemos estudiado en el Ejemplo 12.21 de la Sección 12.7 las cuotas de mercado de tres empresas. Nos preguntamos ahora si habrá una cuota que sea la misma que la del año siguiente suponiendo que la matriz de transición es la dada en el ejemplo. Se puede formular el problema de esta manera: ¿es posible encontrar un vector inicial $\mathbf{v}$ de cuota de mercado que satisfaga

$$\mathbf{Tv} = \mathbf{v}$$

En otras palabras, ¿tiene la matriz $\mathbf{T}$ el autovalor $\lambda = 1$?

La respuesta es afirmativa, El vector $\mathbf{v}$ de componentes 0,4, 0,1 y 0,5 es un autovector porque

$$\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}55 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}35 & 0{,}85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

(En el Problema 5 se estudia este Ejemplo con más detalle.)

Cálculo de los autovalores

La ecuación (14.6) se puede escribir

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{14.7}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden n. Según el Teorema 13.7 de la Sección 13.8, este sistema de ecuaciones lineales homogéneas tiene una solución no trivial $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ si y sólo si la matriz de los coeficientes tiene determinante *igual* a 0, esto es si y sólo si

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \tag{$*$}$$

Escribiendo $p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$ con $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ tenemos la ecuación

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{14.8}$$

que se llama **ecuación característica** de $\mathbf{A}$. De la definición de determinante deducimos que $p(\lambda)$ es un polinomio en λ, que se llama **polinomio característico** de la matriz $\mathbf{A}$. Sus raíces[2] son

[2] Según el Teorema fundamental del álgebra, la ecuación (14.8) tiene n raíces, reales o complejas. Las raíces complejas también son autovalores, pero sólo consideraremos el caso de raíces reales en este libro.

precisamente los autovalores de **A**.

Si las componentes del vector **x** son $x_1, \ldots, x_n$, se puede escribir (14.7) en la forma

$$\begin{array}{rcrcccrcl} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{array} \tag{14.9}$$

Un autovector asociado a λ es una solución no trivial $(x_1, \ldots, x_n)$ de (14.9).

Ejemplo 14.11

Hallar los autovalores y autovectores reales de las matrices siguientes:

$$\textbf{(a)}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \textbf{(b)}\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) La ecuación característica es

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

cuyas soluciones $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 3$ son los autovalores de **A**. Para $\lambda = \lambda_1 = -2$, (14.9) da

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

Tomando $x_2 = t$ tenemos $x_1 = -\frac{2}{3}t$. Los autovectores asociados a $\lambda_1 = -2$ son, por tanto,

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in R)$$

Para $\lambda_2 = 3$, (14.9) implica que $x_1 = x_2$, luego los autovectores son

$$\mathbf{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

(b) La ecuación característica es

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

que no tiene raíces reales, luego la matriz no tiene autovalores reales.

Ejemplo 14.12

Hallar los autovalores y autovectores reales de las matrices siguientes:

$$\textbf{(a)}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \textbf{(b)}\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) La ecuación característica es

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 = 0$$

que tiene una única raíz real $\lambda = 1$. Los autovectores asociados a $\lambda = 1$ verifican (14.9), que es, en este caso particular,

$$\begin{aligned} -x_1 \quad\quad + 6x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x_1 - x_2 \quad\quad &= 0 \\ \tfrac{1}{3}x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones son los autovectores

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

En este caso sólo hay un autovector linealmente independiente.

(**b**) La ecuación característica es

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Para $\lambda_1 = 1$, el sistema (14.9) es

$$\begin{aligned} 4x_1 - 6x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema por eliminación se obtienen los autovectores

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Para $\lambda_2 = 2$, el sistema (14.9) es

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones son equivalentes. Poniendo $x_2 = s$ y $x_3 = t$ (hay dos grados de libertad), tenemos $x_1 = 2s + 2t$. Por tanto, los autovectores asociados $\lambda_2 = 2$ son todos los vectores de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad (s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R})$$

Ejemplo 14.13

Designemos por $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ a una matriz diagonal $n \times n$ cuyos elementos en la diagonal principal sean $c_1, \ldots, c_n$. La ecuación característica de D es

$$|\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} c_1-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2-\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_n-\lambda \end{vmatrix} = (c_1-\lambda)(c_2-\lambda)\cdots(c_n-\lambda)$$

Los autovalores de $\mathbf{D}$ son precisamente los elementos de la diagonal principal. Sea $\mathbf{e}_j$ el vector unitario, que tiene todas sus componentes 0 salvo la j-ésima que vale 1. Como $\mathbf{D}\mathbf{e}_j = c_j\mathbf{e}_j$ se tiene que $\mathbf{e}_j$ es un autovector de $\mathbf{D}$ asociado a c_j.

Ejemplo 14.14

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

una matriz 2×2. ¿Cuándo son sus autovalores reales? ¿Qué signos tienen estos autovalores reales?

Solución: Los autovalores son las raíces de la ecuación característica

$$0 = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$$
$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Las raíces de esta ecuación de segundo grado son

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

Estas raíces son reales si y sólo si $(a_{11} + a_{22})^2 \geq 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, lo que equivale a que $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \geq 0$. En particular, los autovalores son reales si la matriz es simétrica porque, entonces, $a_{12} = a_{21}$ y tenemos así una suma de cuadrados.

Si los autovalores son reales y los designamos por λ_1 y λ_2, entonces

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$
$$= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Así, la suma $\lambda_1 + \lambda_2$ de los autovalores es igual a $a_{11} + a_{22}$, o sea la suma de los elementos diagonales, que se llama la *traza* de la matriz (véase el Problema 8 de la Sección 12.9). El producto $\lambda_1\lambda_2$ de los autovalores es igual a $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}|$. Así se deduce que:

1. Los dos autovalores son positivos si y sólo si $a_{11} + a_{22} > 0$ y $|\mathbf{A}| > 0$
2. Los dos autovalores son negativos si y sólo si $a_{11} + a_{22} < 0$ y $|\mathbf{A}| > 0$
3. Los autovalores tienen signos distintos si y sólo si $|\mathbf{A}| < 0$

Además, uno de los autovalores es 0 si y sólo si $|\mathbf{A}| = 0$; el otro es entonces igual a $a_{11} + a_{22}$.

Problemas

1 Hallar los autovalores y autovectores de las matrices siguientes:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2 Demostrar que λ es un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ si y sólo si λ es un autovalor de la traspuesta $\mathbf{A}'$ de A.

3 Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada y λ un autovalor de $\mathbf{A}$. Demostrar que, si $|\mathbf{A}| \neq 0$, entonces $\lambda \neq 0$ y $1/\lambda$ es un autovalor de la inversa $\mathbf{A}^{-1}$.

4 Sean A y X la matrices dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (a \text{ y } b \text{ son números reales})$$

(a) Calcular $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$, $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^3$.

(b) Hallar los autovalores de $\mathbf{A}$.

(c) Escribir el polinomio característico $p(\lambda)$ como una función cúbica de λ. Probar que $p(\mathbf{A})$ es la matriz cero ($p(\mathbf{A})$ es es resultado de sustituir λ por $\mathbf{A}$ en el polinomio).[3]

Problemas avanzados

5 Calcular los autovalores de la matriz $\mathbf{T}$ del Ejemplo 14.10. (*Indicación:* Sabemos que $\lambda = 1$ es un autovalor). Si $\mathbf{v}$ es un autovector asociado a $\lambda = 1$, calcular $\mathbf{T}^n\mathbf{v}$, donde n es un número natural.

6 Demostrar que, si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices invertibles $n \times n$, entonces $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BA}$ tienen los mismos autovalores.

7 Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz cuyas columnas suman todas 1, esto es, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Demostrar que $\lambda = 1$ es un autovalor de $\mathbf{A}$. (*Indicación:* Considérese primero el caso $n = 2$.)

14.5 DIAGONALIZACIÓN

Las matrices diagonales tienen la ventaja de que es sencillo trabajar con ellas. Por ejemplo,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{DE} = \begin{pmatrix} d_1e_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2e_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3e_3 \end{pmatrix}$$

Además, para cada número natural m,

$$\mathbf{D}^m = \begin{pmatrix} d_1^m & 0 & 0 \\ 0 & d_2^m & 0 \\ 0 & 0 & d_3^m \end{pmatrix}$$

En general, una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ se dice que es una **matriz diagonalizable** si existe una matriz invertible $\mathbf{P}$ de orden $n \times n$ y una matriz diagonal $\mathbf{D}$ tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \tag{14.10}$$

donde d_1, d_2, ..., d_n son los elementos diagonales. Como se dijo en la Sección 14.4, si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden elevado, calcular una potencia alta de $\mathbf{A}$ es normalmente un problema serio. Sin embargo, supongamos que $\mathbf{A}$ es diagonalizable; entonces se verifica (14.10). Multiplicando (14.10) a la izquierda por $\mathbf{P}$ y a la derecha por $\mathbf{P}^{-1}$ obtenemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \tag{1}$$

Sea m un número natural. Por el Problema 8 de la Sección 13.6,

$$\mathbf{A}^m = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1} \tag{2}$$

[3] El que $p(\mathbf{A})$ sea la matriz cero es un caso particular del *teorema de Cayley–Hamilton*, que dice que toda matriz cuadrada verifica su ecuación característica.

Como $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal, es fácil el calcular $\mathbf{D}^m$. Así (2) suministra una forma simple de hallar $\mathbf{A}^m$. Por tanto, el problema que queda es hallar las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{D}$ de (1). Tenemos primero el resultado siguiente:

$$\mathbf{A} \text{ y } \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \text{ tienen los mismos autovalores} \tag{14.11}$$

Esto es una consecuencia de que las dos matrices tengan el mismo polinomio característico:

$$|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \mathbf{P}^{-1}\lambda\mathbf{IP}| = |\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^{-1}||\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{P}| = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$$

Esta cadena de igualdades se basa en que el determinante de un producto es el producto de los determinantes y que el determinante de la matriz inversa es el recíproco del determinante de la matriz. Ahora bien, los autovalores de una matriz diagonal son iguales a los elementos diagonales (véase Ejemplo 14.13). Se deduce que, si $\mathbf{A}$ es diagonalizable y tenemos (14.10), entonces $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de $\mathbf{A}$. Estos autovalores no tienen por qué ser distintos.

Las preguntas ahora son:

1. ¿Qué matrices cuadradas son diagonalizables?
2. Si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, ¿cómo hallamos la matriz $\mathbf{P}$ de (14.10)?

El siguiente teorema contiene las respuestas.

Teorema 14.6

Una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si $\mathbf{A}$ tiene un conjunto $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ de n autovectores linealmente independientes. En este caso,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{14.12}$$

donde $\mathbf{P}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de $\mathbf{A}$.

Demostración: La matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si existe una matriz invertible $\mathbf{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ tal que se verifica (14.10) o, equivalentemente, tal que $\mathbf{AP} = \mathbf{P}\,\text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Podemos escribir esta última ecuación en la forma

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix} = (\lambda_1 \mathbf{x}_1, \lambda_2 \mathbf{x}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{x}_n) \tag{1}$$

donde la última igualdad se deduce del hecho de que las columnas de $\mathbf{P}$ son $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \dots$, $\mathbf{x}_n$. Además, $\mathbf{AP} = (\mathbf{Ax}_1, \mathbf{Ax}_2, \dots, \mathbf{Ax}_n)$. Así (1) es equivalente a las n ecuaciones

$$\mathbf{Ax}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{2}$$

Estas ecuaciones dicen que $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ son autovectores de $\mathbf{A}$ asociados respectivamente a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Como $\mathbf{P}$ tiene inversa si y sólo si $|\mathbf{P}| \neq 0$, lo que equivale a que $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ sean linealmente independientes, queda probado el Teorema 14.6.

Ejemplo 14.15

Comprobar el Teorema 14.6 para

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(Véase Ejemplo 14.11(**a**) de la Sección 14.4.)

Solución: Los autovalores son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 3$. Podemos tomar los autovectores respectivos

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{para la cual} \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Multiplicando deducimos que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ es la matriz $\operatorname{diag}(-2, 3)$, lo que confirma el Teorema 14.6.

Ejemplo 14.16

Comprobar el Teorema 14.6 para la matriz $\mathbf{B}$ del Ejemplo 14.12 de la Sección 14.4.

Solución: Los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Como autovectores tenemos

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que son linealmente independientes, luego $\mathbf{B}$ es diagonalizable. Si tomamos

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{es} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

y multiplicando vemos que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP} = \operatorname{diag}(1, 2, 2)$.

No todas las matrices son diagonalizables. Tampoco es fácil encontrar condiciones necesarias y suficientes sencillas para que una matriz sea diagonalizable, simplemente porque no existen. Se puede demostrar que si la matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ tiene n autovalores distintos, es diagonalizable. Sin embargo, el Ejemplo 14.16 prueba que esta condición no es necesaria, porque la matriz en él es diagonalizable y sus autovalores no son todos distintos.

Problemas

1 Sea $\mathbf{D} = \text{diag}\,(1/2, 1/3, 1/4)$; calcular $\mathbf{D}^2$ y $\mathbf{D}^n$, para todo número natural $n \geq 3$. Hallar el límite de $\mathbf{D}^n$ cuando $n \to \infty$

2 Averiguar si las matrices siguientes son diagonalizables:

(a) La matriz **A** del Ejemplo 14.12(**a**), Sección 14.4.

(b) Las matrices de los Problemas 1 (e) y (f) de la Sección 14.4.

3 Probar que las matrices siguientes son diagonalizables, hallar una matriz **P** (que no es única) y luego comprobar (14.12):

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 6 & -14 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14.6 EL TEOREMA ESPECTRAL PARA LAS MATRICES SIMÉTRICAS

Muchas de las matrices cuadradas que aparecen en las aplicaciones económicas son simétricas. En particular, las condiciones de segundo orden para los extremos de las funciones de varias variables usan formas cuadráticas, que pueden ser expresadas en términos de matrices simétricas. Así es conveniente hacer un estudio de los autovalores de las matrices simétricas. Hemos visto en el Ejemplo 14.14 de la Sección 14.4 que una matriz simétrica 2×2 tiene autovalores reales. De hecho ésta es una propiedad general de las matrices simétricas en virtud del siguiente:

Teorema 14.7

Supongamos que **A** es una matriz simétrica $n \times n$ con elementos reales. Entonces:

(a) El polinomio característico de **A** tiene solamente raíces reales, esto es, todos los autovalores de **A** son reales.

(b) Si **x** e **y** son autovectores asociados respectivamente a $\lambda \neq \mu$, entonces **x** e **y** son ortogonales (en el sentido de que $\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0$).

Demostración:

(a) La demostración de (**a**) requiere técnicas avanzadas y, para ella, nos referimos a Hadley (1973).

(b) Supongamos que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ y $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$. Multiplicando a izquierda esas igualdades por $\mathbf{y}'$ y $\mathbf{x}'$, respectivamente, se obtiene:

$$(1) \quad \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}'\mathbf{x} \qquad\qquad (2) \quad \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}'\mathbf{y}$$

Como **A** es simétrica, trasponiendo cada miembro de (1) obtenemos $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}'\mathbf{y}$. Así (2) implica que $\lambda\mathbf{x}'\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}'\mathbf{y}$ o que $(\lambda - \mu)\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0$. Como $\lambda \neq \mu$, se deduce que $\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0$, luego **x** e **y** son ortogonales.

El teorema espectral

El teorema siguiente es muy importante en álgebra lineal:

Teorema 14.8 (El Teorema espectral)

Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica $n \times n$. Existe una matriz ortogonal $\mathbf{U}$ (esto es, tal que $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}'$) que verifica que

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \tag{14.13}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de $\mathbf{A}$ y la columna i-ésima de $\mathbf{U}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ asociado a λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostración: Trataremos sólo un caso particular. Según el Teorema 14.7, todos los autovalores son reales. Si son distintos, el Teorema 14.6 prueba que $\mathbf{A}$ es diagonalizable y que la matriz $\mathbf{P}$ en (14.12) del Teorema 14.6 es $\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, donde $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ son los autovectores asociados respectivamente a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Normalicemos estos autovectores para que tengan longitud 1 sustituyéndolos por $\mathbf{x}_1/||\mathbf{x}_1||, \dots, \mathbf{x}_n/||\mathbf{x}_n||$. Según el Teorema 14.7, los vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ son mutuamente ortogonales. Así la matriz $\mathbf{P}$ es ortogonal (véase Problema 3). Si ponemos $\mathbf{U} = \mathbf{P}$, hemos demostrado el Teorema 14.8 en el caso en que los autovalores sean distintos. Se puede encontrar la demostración general en Hadley (1973).

Problemas

1 Comprobar (14.13) para las matrices siguientes, hallando explícitamente $\mathbf{U}$:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Comprobar los Teoremas 14.6 y 14.7 para las siguientes matrices:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3 Demostrar que, si $\mathbf{P}$ es una matriz $n \times n$ cuyos vectores columna son todos de longitud 1 y mutuamente ortogonales, entonces $\mathbf{P}$ es ortogonal.

15

Funciones de varias variables

¿Sabe usted? Todos nos hicimos matemáticos
por la misma razón: éramos perezosos.
—Max Rosenlicht (1949)

Hasta ahora hemos estudiado mayormente funciones de una variable, esto es, funciones cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es también un conjunto de números reales. Sin embargo, la descripción de muchos fenómenos económicos exige considerar un número grande de variables de manera simultánea. Por ejemplo, la demanda de un bien depende del precio del bien, de los gustos del consumidor, de las rentas de los diferentes consumidores, y de los precios de los bienes complementarios y sustitutivos, entre otras cosas. Así esta demanda es esencialmente una función de varias variables.

Lo que los economistas necesitan son, en su mayor parte, generalizaciones sencillas de las funciones de una variable y sus propiedades. La mayoría de las dificultades surgen en el paso de una variable a dos. Parece sensato, por tanto, estudiar primero las funciones de dos variables para luego abordar las de más. No se puede olvidar, sin embargo, que hay muchos problemas económicos interesantes que se pueden representar matemáticamente sólo con el uso de las funciones de un número mayor de variables.

15.1 FUNCIONES DE DOS O MÁS VARIABLES

Comenzamos con la definición siguiente:

> Una **función** f **de dos variables** x **e** y con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ es una regla que asigna un número específico $f(x, y)$ a cada punto $(x, y) \in D$. (15.1)

Ejemplo 15.1

Consideremos la función f que asigna el número $2x + x^2y^3$ a todo par de números (x, y). La función f se define así por la fórmula

$$f(x, y) = 2x + x^2y^3$$

¿Cuánto valen $f(1, 0)$, $f(0, 1)$, $f(-2, 3)$ y $f(a + 1, b)$?

Solución: $f(1, 0) = 2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 0^3 = 2$, $f(0, 1) = 2 \cdot 0 + 0^2 \cdot 1^3 = 0$, y $f(-2, 3) = 2(-2) + (-2)^2 \cdot 3^3 = -4 + 4 \cdot 27 = 104$. Finalmente calculamos $f(a + 1, b)$ sustituyendo x por $a + 1$ e y por b en la fórmula de $f(x, y)$, lo que da $f(a + 1, b) = 2(a + 1) + (a + 1)^2b^3$.

Ejemplo 15.2

Un estudio de la demanda de leche hecho por R. Frisch y T. Haavelmo halló la relación

$$x = A\frac{r^{2,08}}{p^{1,5}} \qquad (A \text{ es una constante positiva}) \tag{$*$}$$

donde x es el consumo de leche, p es su precio relativo y r es la renta por familia. Esta ecuación define a x como función de p y r. Nótese que el consumo de leche aumenta cuando r crece y disminuye cuando el precio aumenta, lo que parece razonable.

Ejemplo 15.3

Una función de dos variables que aparece en muchos modelos económicos es

$$F(x, y) = Ax^ay^b \quad (A,\ a,\ b \text{ constantes}) \tag{15.2}$$

Normalmente se supone que F está definida solamente para $x > 0$ e $y > 0$, a veces para $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Esta F se llama una **función de Cobb–Douglas.**[1] Nótese que la función definida en $(*)$ del Ejemplo 15.2 es una función de Cobb–Douglas, porque tiene la forma $x = Ap^{-1,5}r^{2,08}$.

Otro ejemplo de una función de Cobb–Douglas, es la siguiente estimación de la función de producción de una cierta pesquería de langostas:

$$F(S, E) = 2{,}26\, S^{0,44}E^{0,48} \tag{$**$}$$

donde S designa la reserva de langostas, E el trabajo invertido y $F(S, E)$ las capturas.

Ejemplo 15.4

Si F es la función de (15.2), hallar una expresión de $F(2x, 2y)$ y de $F(tx, ty)$, donde t es un número positivo arbitrario. Hallar $F(tS, tE)$ para la función en $(**)$

Solución:

$$F(2x, 2y) = A(2x)^a(2y)^b = A2^ax^a2^by^b = 2^a2^bAx^ay^b = 2^{a+b}F(x, y)$$
$$F(tx, ty) = A(tx)^a(ty)^b = At^ax^at^by^b = t^{a+b}Ax^ay^b = t^{a+b}F(x, y)$$
$$F(tS, tE) = 2{,}26(tS)^{0,44}(tE)^{0,48} = 2{,}26\, t^{0,44}S^{0,44}t^{0,48}E^{0,48} = t^{0,92}F(S, E)$$

La última relación prueba que, si multiplicamos S y E por el factor t, las capturas vendrán multiplicadas por $t^{0,92}$ como máximo. Si $t = 2$, por ejemplo, esta fórmula prueba cómo, doblando las reservas y el trabajo, las capturas son algo menos del doble, esto es, $2^{0,92} \approx 1{,}89$ veces como máximo.

---

[1] La función de (15.2) se llama así por dos investigadores norteamericanos, C. W. Cobb y P. H. Douglas, que la aplicaron (con $a + b = 1$) en un artículo sobre la estimación de funciones de producción, publicado en 1927. De hecho se le debería llamar una "función de Wicksell" porque el economista sueco Knut Wicksell (1851–1926) introdujo estas funciones antes de 1900. Véase B. Sandelin, "On the origin of the Cobb–Douglas production function", *Economy and History*, 19, (1976); pp. 117-123.

Funciones de más de dos variables

Muchas de las funciones más importantes que se estudian en economía, como el producto nacional bruto de un país, dependen de manera compleja de un gran número de variables. En algunos modelos abstractos, puede bastar el enunciar que existen las conexiones sin especificar con más detalle esta dependencia. En este caso decimos solamente que el producto nacional bruto es *función* de las distintas variables. El concepto de función que damos es una generalización directa de la definición (15.1).

> Una **función f de n variables** $x_1, \ldots, x_n$ con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ es una regla que asigna un número específico $f(x_1, \ldots, x_n)$ a cada n-vector $(x_1, \ldots, x_n) \in D$. (15.3)

Veamos algunos ejemplos de funciones de varias variables en economía.

Ejemplo 15.5

(a) T. W. Schultz calculó que la demanda de azúcar en EE.UU. durante el periodo 1929–1935 se podía describir aproximadamente por la fórmula

$$x = 108{,}83 - 6{,}0294p + 0{,}164w - 0{,}4217t$$

La demanda x de azúcar es una función de tres variables: p (el precio del azúcar), w (un índice de producción) y t (el año, con $t = 0$ correspondiendo a 1929).

(b) R. Stone halló la fórmula siguiente para la demanda de cerveza en Inglaterra:

$$x = 1{,}058\, x_1^{0{,}136} x_2^{-0{,}727} x_3^{0{,}914} x_4^{0{,}816}$$

La cantidad demandada x es una función de cuatro variables: x_1 (la renta del individuo), x_2 (el precio de la cerveza), x_3 (un índice general de precios de otros bienes) y x_4 (la fortaleza de la cerveza).

La función más sencilla de las del Ejemplo 15.5 es (**a**). Las variables p, w y t aparecen con exponente 1 y están multiplicadas por constantes. Estas funciones se llaman *lineales*. En general,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b \tag{15.4}$$

con a_1, a_2, ..., a_n y b constantes, es una **función lineal**[2] de n variables. El Ejemplo 15.5(**b**) es un caso particular de la función general de Cobb–Douglas

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} \quad (A,\ a_1,\ \ldots,\ a_n \text{ son constantes, } A > 0) \tag{15.5}$$

definida para $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$. Nos encontraremos con esta función muchas veces a lo largo de este libro.

Nota: Si comparamos la función lineal de (15.4) con la función de Cobb–Douglas (15.5), esta última es, por supuesto, más complicada. Supongamos, sin embargo, que $A > 0$ y $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$. Tomando el logaritmo natural en cada miembro de (15.5) se obtiene

$$\ln F = \ln A + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \cdots + a_n \ln x_n \tag{15.6}$$

Esto prueba que la función de Cobb–Douglas es *log-lineal* (o ln-lineal) porque $\ln F$ es una función lineal de $\ln x_1$, $\ln x_2, \ldots, \ln x_n$.

[2] Esta terminología es muy común, aunque los matemáticos insistan en que se les debería llamar funciones *afines* si $b \neq 0$ y *lineales* sólo si $b = 0$.

Ejemplo 15.6

Supongamos que los resultados de n observaciones de una cantidad son n números positivos x_1, x_2, ..., x_n. En estadística se usan varias medidas diferentes para los valores medios. Las más corrientes son

$$\text{la } \textbf{media aritmética}: \ \bar{x}_A = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{1}$$

$$\text{la } \textbf{media geométrica}: \ \bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \tag{2}$$

$$\text{la } \textbf{media armónica}: \ \bar{x}_H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)} \tag{3}$$

Nótese que $\bar{x}_A$ es una función lineal de $x_1, \dots, x_n$, mientras que $\bar{x}_G$ y $\bar{x}_H$ son funciones no lineales ($\bar{x}_G$ es log-lineal).

Por ejemplo, si los resultados de 4 observaciones han sido $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 4$, entonces se tiene que $\bar{x}_A = (1 + 2 + 3 + 4)/4 = 2{,}5$, $\bar{x}_G = \sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt[4]{24} \approx 2{,}21$, y $\bar{x}_H = \left[(1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4)/4\right]^{-1} = 48/25 = 1{,}92$. Vemos que, en este caso, $\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A$, pero ocurre que estas desigualdades son ciertas en general:

$$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A \tag{4}$$

En el Ejemplo 1.3 de la Sección 1.4 hemos demostrado que $\bar{x}_G \leq \bar{x}_A$ para $n = 2$. Véanse también los Problemas 9 y 10 para justificar $\bar{x}_H$ y el Problema 11 para una demostración de las desigualdades (4).

Dominios

En las funciones que se estudian en economía hay normalmente restricciones explícitas o implícitas en el dominio de variación de las variables. Por ejemplo, suponemos casi siempre que la cantidad x_i de un bien es no negativa, o sea que $x_i \geq 0$. En economía, es frecuentemente de importancia capital el definir claramente los dominios de las funciones que se usan.

Al igual que en el caso de las funciones de una variable, suponemos, a menos que se diga lo contrario, que el dominio de una función definida por una fórmula es el mayor dominio en el cual la fórmula tiene sentido y da un valor único.

El dominio de las funciones de dos variables x, y, es un conjunto de puntos del plano xy. A veces es útil dibujar el dominio en el plano xy. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 15.7

Hallar los dominios de las funciones dadas por las fórmulas siguientes y dibujar esos conjuntos en el plano xy.

(a) $f(x, y) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{y}$ **(b)** $g(x, y) = \dfrac{2}{(x^2 + y^2 - 4)^{1/2}} + \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$

Solución:

(a) Para que $\sqrt{x - 1}$ y $\sqrt{y}$ tengan significado hay que exigir que $x \geq 1$ e $y \geq 0$. El dominio es, pues, el de la Figura 15.1.

(b) $(x^2 + y^2 - 4)^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ está definida solamente si $x^2 + y^2 \geq 4$. Más aún, debe ser $x^2 + y^2 \neq 4$, pues el denominador debe ser distinto de 0. Finalmente hay que exigir que $9 - (x^2 + y^2) \geq 0$, ó $x^2 + y^2 \leq 9$. En resumen, se debe tener que $4 < x^2 + y^2 \leq 9$.

Como la gráfica de $x^2+y^2=r^2$ es una circunferencia con centro en el origen y radio r, el dominio es el conjunto de los puntos (x, y) que está fuera de la circunferencia $x^2+y^2=4$ (pero no sobre ella) y dentro de $x^2+y^2=9$ (pudiendo estar sobre ella). Éste es el conjunto de la Figura 15.2.

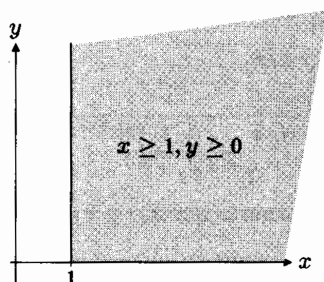


FIGURA 15.1

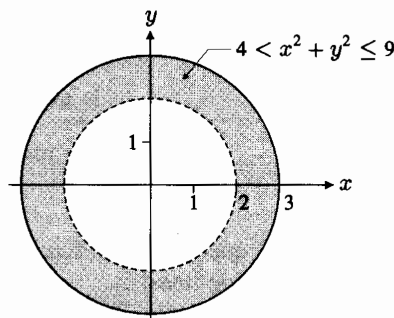


FIGURA 15.2

Ejemplo 15.8

Un individuo decide qué cantidades de n bienes distintos va a adquirir durante un cierto espacio de tiempo. La teoría de la utilidad supone que el individuo tiene una función de utilidad $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que representa las preferencias y que ésta mide la satisfacción que el individuo obtiene al adquirir x_1 unidades del bien número 1, x_2 unidades del número 2 y así sucesivamente. Éste es un ejemplo económico importante de una función de n variables, al cual volveremos varias veces.

Algunos modelos económicos suponen que

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 \ln(x_1 - c_1) + a_2 \ln(x_2 - c_2) + \cdots + a_n \ln(x_n - c_n)$$

donde las constantes (o parámetros) c_1, c_2, $\dots$, c_n representan las mínimas cantidades "de subsistencia" que debe tener el consumidor de los distintos bienes para poder subsistir. Algunas de esas constantes c_i pueden ser cero. Como $\ln z$ está definido sólo cuando $z > 0$, vemos que la condición para que U esté definida es que $x_1 > c_1$, $x_2 > c_2, \dots, x_n > c_n$.

Problemas

1 Sea $f(x,y) = xy^2$. Calcular $f(0,1)$, $f(-1,2)$ y $f(a,a)$.

2 Sea $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^3$. Calcular $f(1,1)$, $f(-2,3)$, $f(1/x, 1/y)$, $[f(x+h,y) - f(x,y)]/h$ y $[f(x,y+k) - f(x,y)]/k$.

3 Sea $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$.

(a) Hallar $f(-1,2)$, $f(a,a)$ y $f(a+h,b) - f(a,b)$.

(b) Probar que $f(2x,2y) = 2^2 f(x,y)$ y, en general, $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$ para todo t.

4 Sea $F(K,L) = 10K^{1/2}L^{1/3}$, $K \geq 0$, $L \geq 0$.

(a) Hallar $F(1,1)$, $F(4,27)$, $F(9,1/27)$, $F(3,\sqrt{2})$, $F(100, 1.000)$ y $F(2K,2L)$.

(b) Hallar una constante a tal que $F(tK,tL) = t^a F(K,L)$ para todo $t > 0$, $K \geq 0$ y $L \geq 0$.

5 Ciertos estudios de economía agraria emplean funciones de producción de la forma $Y = F(K, L, T)$, donde Y es el volumen de la cosecha, K el capital invertido, L el trabajo y T la superficie de la explotación agrícola.

(a) Explicar el significado de $F(K+1, L, T) - F(K, L, T)$.

(b) Muchos estudios suponen que F es de Cobb–Douglas. ¿Qué forma tiene F entonces?

(c) Si F es de Cobb–Douglas, hallar $F(tK, tL, tT)$ expresándola en términos de t y $F(K, L, T)$.

6 Un estudio de la producción de leche halló que

$$y = 2{,}90\, x_1^{0{,}015} x_2^{0{,}250} x_3^{0{,}350} x_4^{0{,}408} x_5^{0{,}030}$$

donde y es la producción de leche y $x_1, \ldots, x_5$ son las cantidades de cinco factores distintos. (Por ejemplo, x_1 es trabajo y x_3 es consumo de hierba.)

(a) Si se doblan los factores de producción, ¿qué ocurre con y?

(b) Escribir la relación en forma log-lineal.

7 Estudiar para qué valores de (x, y) están definidas las funciones dadas por las fórmulas siguientes y dibujar los dominios para los casos segundo y tercero.

(a) $\dfrac{x^2 + y^3}{y - x + 2}$ (b) $\sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$ (c) $\sqrt{(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)}$

8 Averiguar para qué pares de números (x, y) están definidas las funciones dadas por las fórmulas siguientes

(a) $\ln(x + y)$ (b) $\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ (c) $\sqrt{y - x^2} - \sqrt{\sqrt{x} - y}$

9 En un viaje en automóvil se emplean 5 minutos de detención en semáforos (a una velocidad media de 0 km/h), 10 minutos conduciendo por carreteras secundarias a una velocidad media de 30 km/h, 20 en una carretera principal a una velocidad media de 60 km/h y 15 minutos de autopista a una media de 80 km/h. Hallar el trayecto recorrido y la velocidad media.

Problemas avanzados

10 Supongamos que n máquinas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ producen el mismo bien durante un tiempo T y que los tiempos de producción por unidad son respectivamente $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Probar que, si todas las máquinas son igualmente eficaces y han producido juntas exactamente lo mismo en el tiempo T, entonces el tiempo de producción por unidad de cada máquina es la media armónica $\bar{t}_H$ de $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

11 En este problema usamos el Ejemplo 15.6 y las definiciones dadas en él. También, si $f(x)$ es cóncava en el intervalo I y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pertenecen a I, entonces por la desigualdad de Jensen (9.18), Sección 9.6,

$$(*) \qquad f\Big(\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Big) \geq \frac{1}{n} f(x_1) + \frac{1}{n} f(x_2) + \cdots + \frac{1}{n} f(x_n)$$

(a) Probar que, si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, entonces $\bar{x}_H = \bar{x}_G = \bar{x}_A$.

(b) Sea $f(x) = \ln x$. Entonces f es cóncava en $(0, \infty)$. Probar que $\bar{x}_G \leq \bar{x}_A$ usando la desigualdad $(*)$.

(c) En la desigualdad $\bar{x}_G \leq \bar{x}_A$, sustituir x_1 por $1/x_1$, x_2 por $1/x_2, \ldots, x_n$ por $1/x_n$. Demostrar que $\bar{x}_H \leq \bar{x}_G$.

15.2 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En esta sección se estudia la manera de visualizar las funciones de varias variables, en particular las de dos.

Superficies en el espacio tridimensional

Una ecuación en *dos* variables x, y del tipo $f(x, y) = c$ se puede representar en el plano mediante una curva, que se llama su **gráfica**. De manera análoga, una ecuación $g(x, y, z) = c$ en *tres* variables x, y, z se puede representar por un cierto subconjunto del espacio tridimensional, que se llama también la **gráfica** de la ecuación. (Para recordar lo estudiado sobre el espacio tridimensional véase la Sección 12.3.) Esta gráfica consta de todas las ternas (x, y, z) que verifican la ecuación, y forman lo que se suele llamar una **superficie** en el espacio. Las ecuaciones

$$\text{(a)}\quad x = a, \qquad \text{(b)}\quad y = b, \qquad \text{(c)}\quad z = c$$

describen tres casos especialmente sencillos. En ellas se entiende que no hay otras restricciones para las variables que las que se indican. Los puntos (x, y, z) del espacio que verifican la ecuación $x = a$ (sin restricciones para y y z) son los del plano de la Figura 15.3(a); las Figuras 15.3(b) y 15.3(c) contienen las gráficas de las otras dos ecuaciones, que también representan planos.

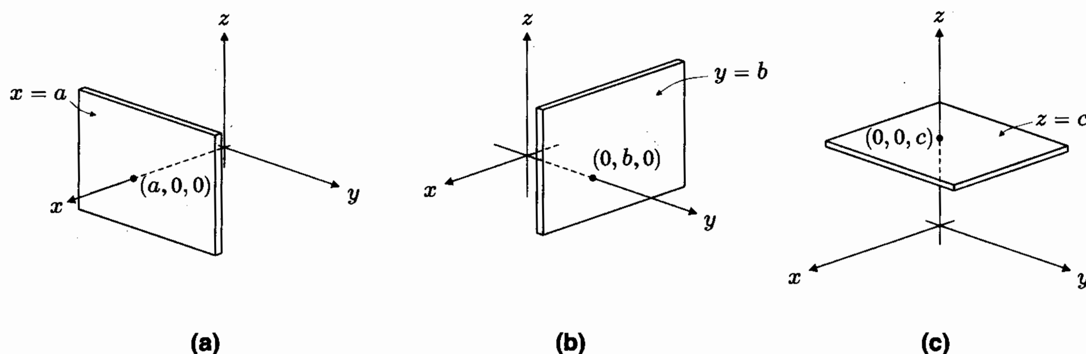


FIGURA 15.3

Algunos ejemplos más interesantes de superficies en el espacio representadas por ecuaciones en tres variables x, y, z son los siguientes:

$$\text{(d)}\quad px + qy + rz = m, \qquad \text{(e)}\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Se puede dar una interpretación económica de la ecuación (d). Supongamos que una persona gasta una cantidad m de dinero en la compra de tres bienes, cuyos precios unitarios respectivos son p, q y r. Si compra x unidades del primero, y unidades del segundo y z unidades del tercero, el coste total es $px + qy + rz$. Por tanto, (d) es la *ecuación presupuestaria* de esa persona porque sólo las ternas (x, y, z) que la verifican representan compras cuando el gasto total es m. Como explicamos en la Sección 12.5, la ecuación (d) representa un *plano* en el espacio, el **plano presupuestario**. Como en la mayoría de los casos debe ser $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$, la parte interesante del plano descrito por la ecuación (d) es el triángulo de vértices $P = (m/p, 0, 0)$, $Q = (0, m/q, 0)$ y $R = (0, 0, m/r)$, representado en la Figura 15.4.

Consideremos ahora la ecuación (e). Según lo estudiado en la Sección 12.4 (véase (12.16)), la expresión $x^2 + y^2 + z^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2$ es el cuadrado de la distancia desde el origen $(0, 0, 0)$ al punto (x, y, z). Por tanto, la gráfica de (e) consta de todos los puntos (x, y, z) cuya distancia al origen es igual a 2. Así, la gráfica es la superficie esférica de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2, representada en la Figura 15.5. Si se sustituyera (e) por la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, el conjunto correspondiente sería la esfera sólida.

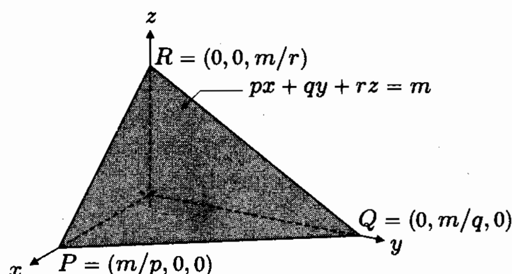


FIGURA 15.4

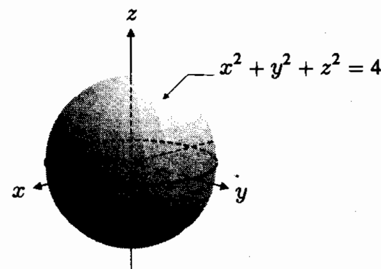


FIGURA 15.5

La gráfica de una función de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables definida en un dominio A del plano xy. Por definición, la gráfica de la función f es la de la ecuación $z - f(x, y) = 0$. Si f es una función "que se comporta bien", su gráfica es una superficie lisa del espacio, como la que muestra la Figura 15.6.

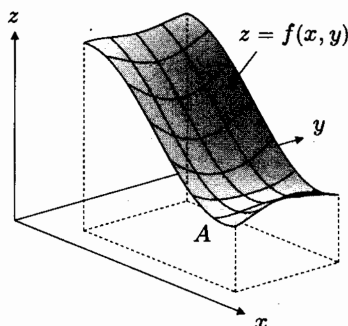


FIGURA 15.6 Gráfica de $z = f(x, y)$.

Este método de representar gráficamente una función de dos variables nos ayuda a visualizar su comportamiento en términos generales. El inconveniente es que requiere una cierta habilidad artística el representar en sólo dos dimensiones la gráfica de $z = f(x, y)$ que es un subconjunto del espacio tridimensional. Como consecuencia de esto, casi no se van a poder usar estos gráficos para realizar medidas cuantitativas. Sin embargo, se pueden dibujar gráficas de funciones de dos variables muy fácilmente usando los recursos de los modernos programas de computadores. Describimos ahora un segundo método que funciona mejor en general.

Curvas de nivel para $z = f(x,y)$

Los cartógrafos dibujan características topográficas de la superficie terrestre, como colinas y valles, en un mapa plano. Para ello dibujan *curvas de nivel*, que son contornos que unen puntos del mapa que representan posiciones del terreno con la misma altitud sobre el nivel del mar. Están, por ejemplo, las curvas de nivel de los 100 metros sobre el nivel del mar, las de 200, 300 y 400 y así sucesivamente. Cuando esas curvas de nivel están muy juntas hay una pendiente muy pronunciada. El estudio de los mapas da así una idea razonablemente buena de las variaciones de altitud del terreno.

Podemos usar la misma idea para representar geométricamente una función $z = f(x, y)$ arbitraria. Para ello se corta la gráfica de la función en el espacio tridimensional por planos horizontales, esto es, paralelos al plano xy. Luego se proyectan esas intersecciones perpendicularmente sobre el

plano xy. Si el plano por el que hemos cortado es $z = c$, la proyección de la intersección sobre el plano xy se llama la **curva de nivel** de f de cota c. La curva de nivel será, pues, la curva plana de ecuación

$$f(x, y) = c$$

La Figura 15.7 proporciona una imagen de esta curva de nivel.

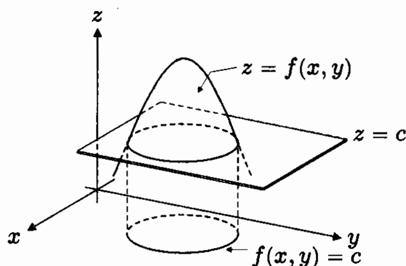


FIGURA 15.7 La gráfica de $z = f(x, y)$ y una de sus curvas de nivel.

Ejemplo 15.9

Consideremos la función de dos variables definida por la ecuación

$$z = x^2 + y^2 \tag{1}$$

¿Cuáles son las curvas de nivel? Dibujar un conjunto de curvas de nivel y la gráfica de la función.

Solución: La variable z toma sólo valores ≥ 0. Las curvas de nivel son las de ecuación

$$x^2 + y^2 = c \tag{2}$$

donde $c \geq 0$. Vemos, pues, que son circunferencias en el plano xy con centro en el origen y radio $\sqrt{c}$, véase Figura 15.8.

Referente a la gráfica de (1), sabemos que todas las curvas de nivel son circunferencias. Para $y = 0$ la ecuación queda $z = x^2$. Esto prueba que la gráfica de (1) corta al plano xz en una parábola, (nótese que el plano xz tiene como ecuación $y = 0$). De manera análoga vemos que, para $x = 0$, tenemos $z = y^2$, que es la gráfica de una parábola en el plano yz. Se deduce de esto que se obtiene la gráfica de (1) al hacer girar la parábola $z = x^2$ alrededor del eje z. Así la superficie se llama un **paraboloide** de revolución y viene representada en la Figura 15.9, que también muestra las curvas de nivel en el plano xy.

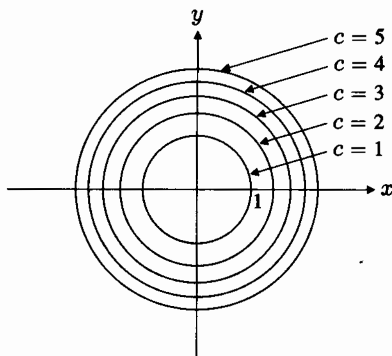


FIGURA 15.8

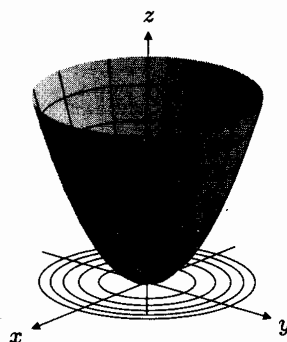


FIGURA 15.9

Ejemplo 15.10

Supongamos que $F(K, L)$ designa el número de unidades producidas por una empresa cuando el capital es K y el trabajo L. Una curva de nivel de esta función es una curva del plano KL con una ecuación del tipo

$$F(K, L) = Y_0 \qquad (Y_0 \text{ es constante})$$

Esta curva se llama una **isocuanta**, nombre que significa "igual cantidad". Las Figuras 15.10 y 15.11 muestran la gráfica y algunas isocuantas de una función de Cobb–Douglas $F(K, L) = AK^aL^b$ con $a + b < 1$ y $A > 0$. Es conveniente ver la superficie de la Figura 15.10 desde una perspectiva distinta a la usada para las otras figuras de esta sección.

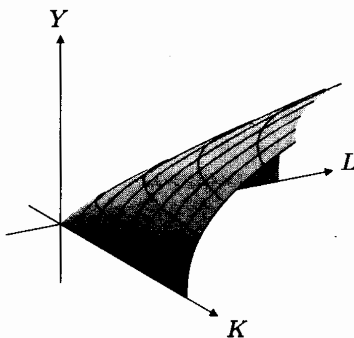


FIGURA 15.10

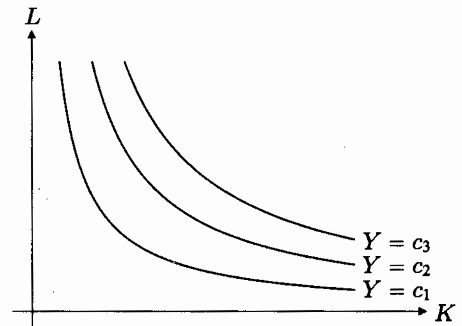


FIGURA 15.11

Ejemplo 15.11

Probar que todos los puntos (x, y) que verifican $xy = 3$ están sobre una curva de nivel de la función

$$g(x, y) = \frac{3(xy + 1)^2}{x^4y^4 - 1}$$

Solución: Sustituyendo $xy = 3$ en la expresión de g obtenemos

$$g(x, y) = \frac{3(xy + 1)^2}{(xy)^4 - 1} = \frac{3(3 + 1)^2}{3^4 - 1} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$

Para todo (x, y) tal que $xy = 3$, el valor de $g(x, y)$ es constante e igual a $3/5$. Esto significa que $xy = 3$ está dentro de la curva de nivel de g, de cota $3/5$.

De hecho, para todo $c \neq \pm 1$, $xy = c$ es la ecuación de una curva de nivel de g porque $g(x, y) = 3(c + 1)^2/(c^4 - 1)$ si $xy = c$.

Otras superficies del espacio tridimensional

El dibujar a mano gráficas de ecuaciones en tres variables no es una tarea sencilla. Sin embargo, en la actualidad, hay una buena cantidad de programas de computador que dibujan fácilmente superficies del espacio tridimensional. Dos de estas superficies dibujadas por computador son las de las Figuras 15.12 y 15.13. La Figura 15.12 se asemeja a un balón de rugby.

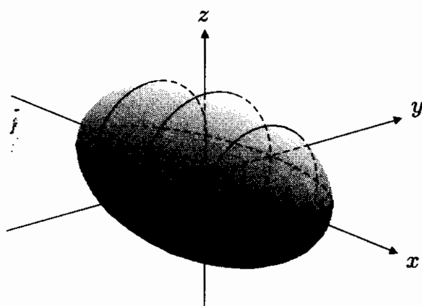


FIGURA 15.12 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

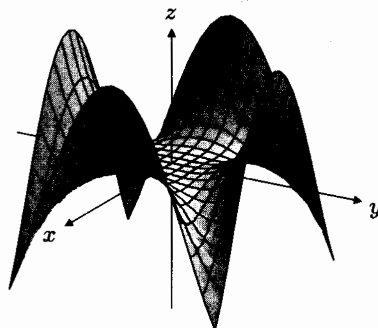


FIGURA 15.13 $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$.

Funciones de n variables y el espacio euclídeo n-dimensional R^n

No hay una interpretación geométrica visual concreta para funciones de n variables cuando $n \geq 3$. Sin embargo, los economistas siguen usando en estos casos el *lenguaje geométrico*, aun cuando no estén haciendo geometría. Es usual llamar **espacio euclídeo n-dimensional** al conjunto de todas las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales, y designarlo por $\mathbb{R}^n$. Para $n = 1, 2, 3$ hay interpretaciones geométricas visuales de $\mathbb{R}^n$: la recta, el plano y el espacio tridimensional, repectivamente. Para $n \geq 4$ no hay interpretación visual, pero sigue habiendo geometría y por eso se usa el lenguaje.

Si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función de n variables, llamamos la **gráfica** de f al conjunto de todos los puntos $\big(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tales que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertenece al dominio de f. Llamamos también a esta gráfica, por similitud, una **superficie** o, más exactamente, una **hipersuperficie** de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si z_0 es un número, el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^n$ que verifican $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_0$ se llama una **superficie de nivel** de f.

En teoría de la producción es usual dar a las superficies de nivel un nombre diferente. Si $x = f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es la cantidad producida a partir de las cantidades v_1, v_2, ..., v_n, de los distintos factores de producción, las superficies de nivel $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = x_0$ (constante) se llaman *isocuantas*, como en el Ejemplo 15.10.

Continuidad

Se puede generalizar a funciones de varias variables el concepto de continuidad para funciones de una variable. Hablando informalmente, una función de n variables es continua si cambios pequeños en las variables independientes producen cambios pequeños en los valores de la función. Al igual que en el caso de una variable, tenemos la siguiente regla útil:

> Toda función de n variables que se puede construir a partir de funciones continuas por operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y composición de funciones es continua allí donde esté definida.

Si una función de una variable es continua, seguirá siéndolo cuando se le considere como función de varias variables. Por ejemplo, $f(x, y, z) = x^2$ es una función continua de x, y, z porque cambios pequeños de x, y y z producen cambios pequeños de x^2.

Ejemplo 15.12

¿Dónde son continuas las funciones dadas por las fórmulas siguientes?

$$\textbf{(a)} \quad f(x,y,z) = x^2y + 8x^2y^5z - xy + 8z \qquad \textbf{(b)} \quad g(x,y) = \frac{xy-3}{x^2+y^2-4}$$

Solución:

(a) La función f está definida y es continua para cualesquiera valores de x, y, z por ser suma de productos de potencias.

(b) La función g está definida y es continua para todo (x, y) excepto los de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. En ellos el denominador es cero, luego $g(x, y)$ no está definida.

Problemas

1 Dibujar las gráficas de las funciones siguientes en el espacio tridimensional, así como un conjunto de curvas de nivel de cada una de ellas:

(a) $z = 3 - x - y$ (b) $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

2 Probar que $x^2 + y^2 = 6$ es una curva de nivel de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2 + 2$ y que todas las curvas de nivel de f son circunferencias con centro en el origen.

3 Probar que $x^2 - y^2 = c$ está en una curva de nivel de $f(x,y) = e^{x^2}e^{-y^2} + x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ para todo valor de la constante c.

4 Sea $f(x)$ una función de una variable y definamos la función g de dos variables por la relación $g(x,y) = f(x)$. Nótese que y no aparece en la fórmula de g. Explicar cómo se puede obtener la gráfica de g a partir de la de f. Hacer el dibujo en el caso particular $f(x) = -x^3$.

5 Explicar por qué dos curvas de nivel de $z = f(x,y)$ correspondientes a cotas diferentes no se cortan.

15.3 DERIVADAS PARCIALES EN DOS VARIABLES

Cuando estudiamos una función $y = f(x)$ de una variable, la derivada $f'(x)$ mide la tasa de variación de la función cuando x cambia. Para funciones de dos variables $z = f(x, y)$ queremos ver la velocidad de variación de la función respecto de los cambios de valores en las variables independientes. Por ejemplo, si $f(x, y)$ son los beneficios de una empresa cuando se usan cantidades x e y de dos materias primas distintas, queremos saber cómo y cuánto crecerán los beneficios al variar x e y.

Consideremos la función

$$z = x^3 + 2y^2 \tag{1}$$

Supongamos primero que y se mantiene constante. Entonces $2y^2$ es constante y la tasa de variación de z respecto de x está dada por

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2$$

Por otra parte podemos dejar x fijo en (1) y estudiar cómo varía z cuando y cambia. Esto significa hallar la derivada de z con respecto a y manteniendo x constante. El resultado es

$$\frac{dz}{dy} = 4y$$

Se pueden estudiar otros tipos de variaciones, por ejemplo cuando x e y cambian simultáneamente. En esta Sección nos vamos a limitar a considerar variaciones bien de x o de y.

Cuando trabajemos con funciones de dos variables, escribiremos $\partial z/\partial x$ en lugar de dz/dx para designar a la derivada de z respecto a x. De la misma manera escribimos $\partial z/\partial y$ en vez de dz/dy. Tenemos, por tanto,

$$z = x^3 + 2y^2 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y$$

Damos en general las siguientes definiciones:

> Sea $z = f(x, y)$. La **derivada parcial** de z (o f) con respecto a x, denotada por $\partial z/\partial x$, es la derivada de $f(x, y)$ con respecto a x cuando y se mantiene constante. La derivada parcial de z (o f) con respecto a y, denotada por $\partial z/\partial y$, es la derivada de $f(x, y)$ con respecto a y cuando x se mantiene constante. (15.7)

Si $z = f(x, y)$ se escribirá también $\partial z/\partial x = \partial f/\partial x$ ó $\partial z/\partial y = \partial f/\partial y$. Nótese que $\partial f/\partial x$ es la tasa de variación de $f(x, y)$ con respecto a x cuando y es constante, y lo análogo para $\partial f/\partial y$.

Normalmente son fáciles de calcular las derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$. Para calcular $\partial f/\partial x$ considérese la y como constante y derívese $f(x, y)$ con respecto a x como si f fuera función sólo de x. Se pueden aplicar a las derivadas parciales todas las reglas de derivación de funciones de una variable. Veamos algunos ejemplos más.

Ejemplo 15.13

Calcular las derivadas parciales de las funciones siguientes:

$$\textbf{(a)} \quad f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + x + y^2 \qquad \textbf{(b)} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Solución:

(**a**) Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 + 1 \qquad (y \text{ permanece constante})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 2y \qquad (x \text{ permanece constante})$$

(**b**) La regla de derivación de un cociente da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2xxy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

Obsérvese que la función en (**b**) es simétrica en x e y, en el sentido de que el valor de la función no varía si intercambiamos x e y. Así, intercambiando x e y en la fórmula de $\partial f/\partial x$, hallamos la fórmula correcta para $\partial f/\partial y$. Calcular $\partial f/\partial y$ de la manera usual y comprobar que la respuesta anterior es correcta.

Se usan otras muchas notaciones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$. Algunas de las más comunes son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y) = f'_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y) = f'_2(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Las más satisfactorias de entre ellas son $f'_1(x,y)$ y $f'_2(x,y)$. Los subíndices numéricos se refieren a las posiciones de las variables en la función. Así f'_1 designa a la derivada parcial con respecto a la primera variable, y f'_2 con respecto a la segunda. También observamos que las derivadas parciales son, a su vez, funciones de x e y. Finalmente, $f'_1(a,b)$ y $f'_2(a,b)$ designan los valores de las derivadas parciales en el punto (a,b) en vez de en el punto genérico (x,y). Por ejemplo, en la función del Ejemplo 15.13(**a**),

$$f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + x + y^2 \Longrightarrow f'_1(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 + 1$$

luego $f'_1(0,0) = 1$ y $f'_1(-1,2) = 3(-1)^2 2 + 2(-1)2^2 + 1 = -1$.

Se usan a menudo las notaciones $f'_x(x,y)$ y $f'_y(x,y)$, sobre todo en conexión con las funciones compuestas, pero a veces estas notaciones son ambiguas. Por ejemplo, ¿qué significa $f'_x(x^2y, x-y)$?

Derivadas parciales de orden superior

Si $z = f(x,y)$, entonces $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se llaman las **derivadas parciales de primer orden** o **derivadas parciales primeras**. Esas derivadas parciales son, a su vez, funciones de dos variables. A partir de $\partial f/\partial x$, podemos construir dos nuevas funciones tomando las derivadas parciales con respecto a x e y. De la misma manera podemos tomar las derivadas parciales de $\partial f/\partial y$ con respecto a x e y. Las cuatro funciones así obtenidas se llaman las **derivadas parciales de segundo orden**, o **derivadas parciales segundas**, de $f(x,y)$ y se les designa por

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Por razones de brevedad hablamos a veces de las "parciales primeras y segundas", suprimiendo la palabra "derivadas".

Ejemplo 15.14

Para la función del Ejemplo 15.13(**a**) tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy + 2y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 + 4xy = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 + 2$$

Usamos otros tipos de notación para las derivadas parciales segundas; por ejemplo $\partial^2 f/\partial x^2$ se designa también por $f''_{11}(x,y)$ ó $f''_{xx}(x,y)$. De la misma manera $\partial^2 f/\partial y \partial x$ se puede escribir como $f''_{12}(x,y)$ ó $f''_{xy}(x,y)$. Nótese que la notación $f''_{12}(x,y)$ significa que se deriva primero $f(x,y)$ con respecto a la primera variable, x, y luego con respecto a la segunda, y. Para calcular $f''_{21}(x,y)$ hay que derivar en orden inverso. En el Ejemplo 15.14, esas dos derivadas parciales segundas "mixtas" (o "parciales cruzadas") son iguales. Éste va a ser el caso para la mayoría de las funciones $z = f(x,y)$, es decir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{15.8}$$

En el Teorema 15.1 de la Sección 15.5 se dan condiciones suficientes para que una función f verifique la igualdad en (15.8).

Es muy importante recordar el significado exacto de los distintos símbolos que hemos introducido. Por ejemplo, si consideramos (15.8), sería un error creer que las dos expresiones son iguales porque $\partial x \partial y$ es lo mismo que $\partial y \partial x$. Lo correcto es que la expresión de la izquierda es la derivada de $\partial f/\partial y$ con respecto a x, y la de la derecha es la derivada de $\partial f/\partial x$ con respecto a y. Es un hecho notable, en absoluto trivial, que las dos coinciden en muchos casos. Ponemos otro ejemplo. Es claro que $\partial^2 z/\partial x^2$ es distinto de $(\partial z/\partial x)^2$. En efecto, si $z = x^2 + y^2$, entonces $\partial z/\partial x = 2x$. Por tanto, $\partial^2 z/\partial x^2 = 2$, mientras que $(\partial z/\partial x)^2 = 4x^2$.

De manera similar definimos las derivadas parciales terceras, cuartas, así como las de órdenes superiores. Por ejemplo, escribimos $\partial^4 z/\partial x \partial y^3 = z''''_{yyyx}$ para indicar que derivamos z tres veces con respecto a y y luego derivamos el resultado con respecto a x.

Damos otro ejemplo.

Ejemplo 15.15

Si $f(x, y) = x^3 e^{y^2}$, hallar las derivadas parciales primeras y segundas en $(x, y) = (1, 0)$.

Solución: Para hallar $f'_1(x, y)$ derivamos $x^3 e^{y^2}$ con respecto a x considerando a y como una constante. Si y es constante, también lo es e^{y^2}. Por tanto,

$$f'_1(x, y) = 3x^2 e^{y^2} \qquad \text{y así} \qquad f'_1(1, 0) = 3 \cdot 1^2 e^{0^2} = 3$$

Para hallar $f'_2(x, y)$ derivamos $f(x, y)$ con respecto a y considerando a x como una constante:

$$f'_2(x, y) = x^3 2y e^{y^2} = 2x^3 y e^{y^2} \qquad \text{y así} \qquad f'_2(1, 0) = 0$$

Para calcular la parcial segunda $f''_{11}(x, y)$ hay que derivar $f'_1(x, y)$ con respecto a x otra vez, considerando a y como una constante:

$$f''_{11}(x, y) = 6x e^{y^2} \qquad \text{y así} \qquad f''_{11}(1, 0) = 6 \cdot 1 e^{0^2} = 6$$

Para calcular $f''_{22}(x, y)$ hay que derivar $f'_2(x, y) = 2x^3 y e^{y^2}$ con respecto a y considerando a x como una constante. Como $y e^{y^2}$ es producto de dos funciones en y, usamos la regla del producto y obtenemos

$$f''_{22}(x, y) = (2x^3)(1 \cdot e^{y^2} + y 2y e^{y^2}) = 2x^3 e^{y^2} + 4x^3 y^2 e^{y^2}$$

Evaluando esta derivada en $(1, 0)$ obtenemos $f''_{22}(1, 0) = 2$. Además,

$$f''_{12}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[f'_1(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 e^{y^2}) = 3x^2 2y e^{y^2} = 6x^2 y e^{y^2}$$

y

$$f''_{21}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}[f'_2(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 y e^{y^2}) = 6x^2 y e^{y^2}$$

Por tanto, $f''_{12}(1, 0) = f''_{21}(1, 0) = 0$.

Aproximaciones de las derivadas parciales

Recuérdese que, para funciones $f(x)$ de una variable x, podemos a menudo tener una buena aproximación de $f'(x)$ calculando $f(x + 1) - f(x)$ (véase Ejemplo 4.5 en la Sección 4.3). Como $f'_x(x, y)$ es la derivada de $f(x, y)$ con respecto a x considerando a y como constante, obtenemos la aproximación correspondiente escribiendo

$$f'_x(x, y) \approx f(x + 1, y) - f(x, y)$$

En palabras:

La derivada parcial $f'_x(x, y)$ es aproximadamente igual a la variación de $f(x, y)$ que resulta al aumentar x en una unidad manteniendo y constante.	(15.9)

La derivada parcial $f'_y(x, y)$ es aproximadamente igual a la variación de $f(x, y)$ que resulta al aumentar y en una unidad manteniendo x constante.	(15.10)

El número $f'_x(x, y)$ mide la tasa de variación de f con respecto a x. Si $f'_x(x, y) > 0$, un aumento pequeño en x significa un aumento de $f(x, y)$. Cuando la aproximación de (15.9) es admisible, decimos que $f'_x(x, y) > 0$ significa que un aumento unitario en x produce un aumento de $f(x, y)$. De manera análoga, $f'_x(x, y) < 0$ significa que un aumento unitario en x produce una disminución de $f(x, y)$.

Nota: Se deben usar con precaución las aproximaciones (15.9) y (15.10). Hablando grosso modo, no serán demasiado inexactas siempre que las derivadas parciales no varíen mucho en los intervalos correspondientes.

Ejemplo 15.16

Hemos estudiado la función $x = Ap^{-1{,}5}r^{2{,}08}$ en el ejemplo 15.2. Calcular las derivadas parciales de x con respecto a p y r, discutiendo sus signos.

Solución: Tenemos que

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -1{,}5Ap^{-2{,}5}r^{2{,}08}, \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = 2{,}08Ap^{-1{,}5}r^{1{,}08}$$

Como A, p y r son positivos, $\partial x/\partial p < 0$ y $\partial x/\partial r > 0$. Estos signos están de acuerdo con las notas finales del Ejemplo 15.2.

Problemas

1 Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para las funciones siguientes:

(a) $z = x^2 + 3y^2$ (b) $z = xy$ (c) $z = 5x^4y^2 - 2xy^5$ (d) $z = e^{x+y}$

(e) $z = e^{xy}$ (f) $z = e^x/y$ (g) $z = \ln(x + y)$ (h) $z = \ln(xy)$

2 Hallar $f'_1(x, y)$, $f'_2(x, y)$ y $f''_{12}(x, y)$ para las funciones siguientes:

(a) $f(x, y) = x^7 - y^7$ (b) $f(x, y) = x^5 \ln y$ (c) $f(x, y) = (x^2 - 2y^2)^5$

3 Hallar todas las derivadas parciales de primero y segundo orden de las funciones siguientes:

(a) $z = 3x + 4y$ (b) $z = x^3y^2$ (c) $z = x^5 - 3x^2y + y^6$

(d) $z = x/y$ (e) $z = (x - y)/(x + y)$ (f) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

4 Sea $F(S, E) = 2{,}26\, S^{0{,}44}E^{0{,}48}$ (véase Ejemplo 15.3).

(a) Calcular $F'_S(S, E)$ y $F'_E(S, E)$.

(b) Probar que $SF'_S + EF'_E = kF$ para una constante k.

5 Demostrar que, si $z = (ax + by)^2$, entonces $xz'_x + yz'_y = 2z$.

6 Hallar todas las derivadas parciales primeras y segundas de las funciones siguientes:

(a) $z = x^2 + e^{2y}$ (b) $z = y \ln x$ (c) $z = xy^2 - e^{xy}$

7 Sea $f(x, y) = x \ln y - y^2 2^{xy}$. Hallar todas las derivadas parciales primeras y segundas en $(x, y) = (1, 1)$.

8 Sea $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. Probar que $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0$.

Problemas avanzados

9 Calcular $\partial^{p+q} z/\partial y^q \partial x^p$ en $(0, 0)$ para las funciones siguientes:

(a) $z = e^x \ln(1 + y)$ (b) $z = e^{x+y}(xy + y - 1)$

10 Demostrar que, si $u = Ax^a y^b$, entonces

$$\frac{1}{u'_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u''_{xy}}{u'_x u'_y} \right) = \frac{1}{u'_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u''_{xy}}{u'_x u'_y} \right)$$

15.4 DERIVADAS PARCIALES Y PLANOS TANGENTES

Las derivadas parciales de primer orden tienen una interpretación geométrica interesante. Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, con gráfica como la de la Figura 15.14. Mantengamos el valor de y fijo, igual a y_0. Los puntos (x, y) de la gráfica de f para los que $y = y_0$ son los de la curva K_y de la figura. La derivada parcial $f'_x(x_0, y_0)$ es la derivada de $z = f(x, y_0)$ con respecto a x en el punto $x = x_0$ y es, por tanto, la pendiente de la recta tangente l_y a la curva K_y en $x = x_0$. De la misma forma, $f'_y(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente l_x a la curva K_x en $y = y_0$.

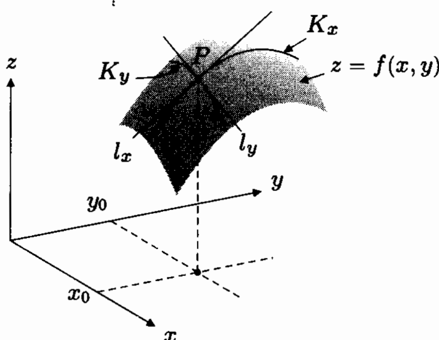


FIGURA 15.14

Esta interpretación geométrica de las dos derivadas parciales se puede formular de otra manera. Imaginemos que la gráfica de f describe una montaña, y supongamos que estamos situados en el punto P de coordenadas $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en tres dimensiones, donde la altitud es de $f(x_0, y_0)$ unidades sobre el plano xy. La pendiente del terreno en P depende de la dirección en que la consideremos. En particular, consideremos la dirección paralela al eje x. Entonces $f'_x(x_0, y_0)$ es una medida de la inclinación del terreno en esa dirección. En la figura $f'_x(x_0, y_0)$ es negativa, porque

moviéndose desde P en la dirección del eje x positivo, bajamos. De la misma forma vemos que $f'_y(x_0, y_0)$ es una medida de la "inclinación del terreno" en la dirección paralela al eje y positivo. En la figura vemos que $f'_y(x_0, y_0)$ es positiva, lo que significa que la pendiente es de subida en esa dirección.

Las derivadas segundas "directas" f''_{xx} y f''_{yy} tienen también una interpretación geométrica clara. Consideremos la curva K_y de la gráfica de f en la figura. A lo largo de esta curva $f''_{xx}(x, y_0)$ es negativa, porque $f'_x(x, y_0)$ decrece cuando x crece. En concreto, $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$. De la misma manera vemos que, moviéndose a lo largo de K_x, ocurre que $f'_y(x_0, y)$ decrece cuando y crece, luego $f''_{yy}(x_0, y) < 0$ a lo largo de K_x. En concreto, $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$.

Ejemplo 15.17

Consideremos la Figura 15.15, que muestra algunas curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$. Sobre la base de esta figura, responder a las siguientes preguntas:

(**a**) ¿Qué signos tienen $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en P y Q?

(**b**) ¿Qué soluciones tienen las ecuaciones: (i) $f(3, y) = 4$ y (ii) $f(x, 4) = 6$?

(**c**) ¿Qué valor máximo puede alcanzar $f(x, y)$ para $x = 2$ y para qué valor de y lo alcanza?

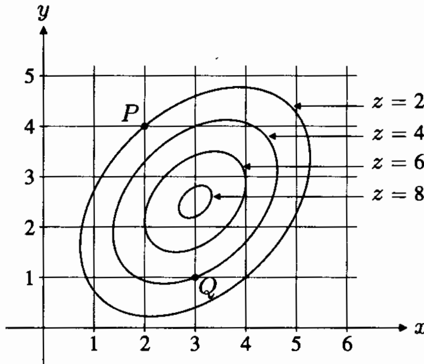


FIGURA 15.15

Solución:

(**a**) En la posición P, estamos en la curva de nivel $f(x, y) = 2$. Si miramos en la dirección del eje x positivo, a lo largo de la recta $y = 4$, vemos que el terreno se eleva porque las curvas de nivel más cercanas corresponden a cotas (valores de z) más altas. De aquí se deduce que $f'_x > 0$ en P. Si, desde la posición P, miramos en la dirección del eje y positivo a lo largo de $x = 2$ el terreno desciende. Así, debe ser $f'_y < 0$ en P. De forma análoga hallamos que $f'_x < 0$ y $f'_y > 0$ en Q.

(**b**) La ecuación (i) tiene las soluciones $y = 1$ e $y = 4$ porque la recta $x = 3$ corta a la curva de nivel $f(x, y) = 4$ en $(3, 1)$ y en $(3, 4)$. La ecuación (ii) no tiene solución porque la recta $y = 4$ no corta a la curva de nivel $f(x, y) = 6$.

(**c**) El mayor valor de c para el que la curva de nivel $f(x, y) = c$ corta a $x = 2$ es $c = 6$. El mayor valor de $f(x, y)$ cuando $x = 2$ es 6 y vemos que ese máximo se alcanza cuando $y \approx 2{,}2$.

Planos tangentes

Consideremos de nuevo la Figura 15.14. Las dos rectas tangentes l_x y l_y determinan un único plano que pasa por el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Este plano se llama el *plano tangente* a la superficie

en P. Por (12.23), Sección 12.5 sabemos que la ecuación general de un plano del espacio que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) es $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Si $c = 0$, el plano es paralelo al eje z. Si $c \neq 0$ y resolvemos la ecuación en $z - z_0$ obtenemos

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) \tag{1}$$

donde $A = -a/c$ y $B = -b/c$.

Por tanto, el plano tangente a la superficie en P debe tener una ecuación de esta forma. Hay que determinar A y B. Ahora bien, la recta l_y está en el plano. Como la pendiente de esta recta es $f_1'(x_0, y_0)$, los puntos (x, y, z) que están en l_y vienen caracterizados por las dos ecuaciones $y = y_0$ y $z - z_0 = f_1'(x_0, y_0)(x - x_0)$. Entonces esos puntos (x, y, z) pertenecen al plano (1) sólo si $A = f_1'(x_0, y_0)$. De manera análoga vemos que $B = f_2'(x_0, y_0)$. Enunciamos la conclusión:

El **plano tangente** a $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$, es el de ecuación

$$z - z_0 = f_1'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2'(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{15.11}$$

El plano tangente viene representado en la Figura 15.16.

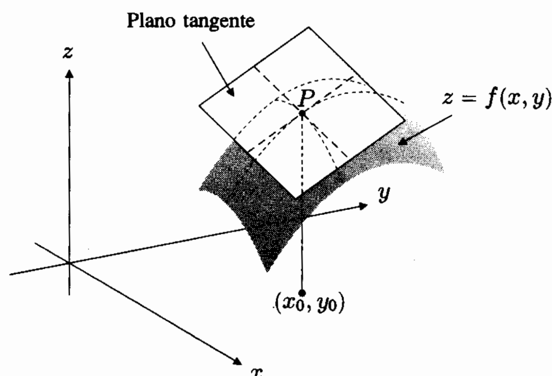


FIGURA 15.16 La gráfica de una función $z = f(x, y)$ y su plano tangente en P.

Ejemplo 15.18

Hallar el plano tangente a la superficie

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$$

en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 5)$

Solución: Como $f(1, 1) = 5$, el punto dado está en la gráfica de f. Tenemos que

$$f_1'(x, y) = 2x + 2y, \qquad f_2'(x, y) = 2x + 4y$$

luego $f_1'(1, 1) = 4$ y $f_2'(1, 1) = 6$. Así (15.11) nos da

$$z - 5 = 4(x - 1) + 6(y - 1), \qquad \text{o sea} \qquad z = 4x + 6y - 5$$

Problemas

1 En la Figura 15.17 hemos dibujado algunas curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$, junto con la recta $2x + 3y = 12$.

(a) ¿Qué signos tienen f'_x y f'_y en P y Q?

(b) Hallar las soluciones posibles de (i) $f(1, y) = 2$ y (ii) $f(x, 2) = 1$.

(c) Hallar el mayor valor de $f(x, y)$ para los (x, y) de la recta $2x + 3y = 12$?

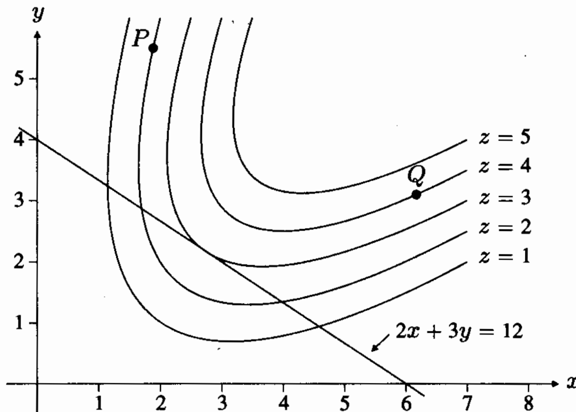


FIGURA 15.17

2 Sea $F(x, y)$ una función de la cual sabemos solamente que $F(0,0) = 0$, $F'_1(x, y) \geq 2$ para todo (x, y) y $F'_2(x, y) \leq 1$ para todo (x, y). ¿Qué relaciones hay entre los valores de $F(0,0)$, $F(1,0)$, $F(2,0)$, $F(0,1)$, y $F(1,1)$? Escribir las desigualdades que hay entre esos números.

3 Hallar los planos tangentes a las superficies siguientes en los puntos que se indican:

(a) $z = x^2 + y^2$ en $(1, 2, 5)$ (b) $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ en $(1, 3, 2)$

4 Demostrar que todos los planos tangentes a $z = xf(y, x)$ pasan por el origen.

15.5 DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Las funciones que los economistas estudian normalmente tienen más de dos variables, luego necesitamos extender a ellas el concepto de derivadas parciales.

> Si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $\partial f / \partial x_i$ es la derivada de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con respecto a x_i considerando las otras variables x_j $(j \neq i)$ como constantes. (15.12)

Las n derivadas parciales que acabamos de definir son las de primer orden, o derivadas primeras. Otras notaciones para las derivadas parciales primeras de $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i} = \partial z / \partial x_i = z'_i = f'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Al igual que en (15.9) y (15.10) de la Sección 15.3, tenemos la siguiente aproximación:

La derivada parcial $\partial z/\partial x_i$ es aproximadamente igual a la variación de la función $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ producida por un aumento unitario de x_i mientras que las otras x_j $(j \neq i)$ permanecen constantes. (15.13)

Lo anterior se expresa así en símbolos:

$$f_i'(x_1, \ldots, x_n) \approx f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Para cada una de las parciales primeras de f, tenemos n parciales segundas:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = z''_{ij}$$

Los dos índices i, j pueden tomar cualquier valor entre 1, 2, ..., n, luego hay en total n^2 derivadas parciales segundas. La matriz $n \times n$ de las parciales segundas, a saber,

$$\begin{pmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) & \ldots & f''_{1n}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) & \ldots & f''_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(\mathbf{x}) & f''_{n2}(\mathbf{x}) & \ldots & f''_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \tag{15.14}$$

se llama la **hessiana** (o la **matriz hessiana**) de f en el punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Como, normalmente, $f''_{ij}(\mathbf{x}) = f''_{ji}(\mathbf{x})$ para todo i, j, el número de parciales distintas se reduce de n^2 a $\frac{1}{2}n(n+1)$ a lo más, y la hessiana es simétrica (véase el Teorema 15.1 más adelante.)

Ejemplo 15.19

Hallar las parciales primeras con respecto a A, B y T de la función $a(A, B, T) = 122 + 3A - 25T - 75B^2 - A/B$. Hallar la hessiana de $a(A, B, T)$.

Solución:

$$\partial a/\partial A = 3 - 1/B, \qquad \partial a/\partial B = -150B + A/B^2, \qquad \partial a/\partial T = -25$$

y la hessiana es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 a}{\partial A^2} & \dfrac{\partial^2 a}{\partial A \partial B} & \dfrac{\partial^2 a}{\partial A \partial T} \\ \dfrac{\partial^2 a}{\partial B \partial A} & \dfrac{\partial^2 a}{\partial B^2} & \dfrac{\partial^2 a}{\partial B \partial T} \\ \dfrac{\partial^2 a}{\partial T \partial A} & \dfrac{\partial^2 a}{\partial T \partial B} & \dfrac{\partial^2 a}{\partial T^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{B^2} & 0 \\ \dfrac{1}{B^2} & -150 - 2\dfrac{A}{B^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El teorema de Young

Hemos dicho antes que, si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces z''_{ij} y z''_{ji} son usualmente iguales. Esto implica que el orden de derivación no tiene importancia. El siguiente teorema da un resultado más general y preciso.

Teorema 15.1 (Teorema de Young)

Supongamos que dos derivadas parciales de orden m de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se han obtenido con el mismo número de derivaciones respecto a cada una de las variables y son continuas en un conjunto abierto S. Entonces las dos derivadas parciales son iguales en todo punto de S.

Vamos a explicar este enunciado con un poco más de detallé. Sea $m = m_1 + \cdots + m_n$ y supongamos que se deriva $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ m_1 veces con respecto a x_1, m_2 veces con respecto a x_2, y así sucesivamente. Supongamos que se verifica la condición de continuidad de esas derivadas parciales de orden m-ésimo. Entonces obtenemos el mismo resultado sea cual sea el orden en que tomemos las derivadas. Así escribimos la derivada resultante en la forma

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}$$

En particular, para $m = 2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n)$$

si esas parciales son continuas. En el Problema 6 damos un ejemplo en el que no se verifica esa igualdad. Se puede encontrar una demostración del teorema de Young en libros más avanzados de análisis matemático.

Definiciones formales de derivadas parciales

Hasta ahora hemos considerado en este capítulo funciones dadas por fórmulas explícitas y hemos calculado sus derivadas parciales usando las reglas ordinarias de derivación. Si no podemos usar esas reglas de derivación, debemos acudir a la definición formal de derivadas parciales. Ésta se relaciona estrechamente con la correspondiente definición de derivadas ordinarias de funciones de una variable, porque las derivadas parciales son simplemente derivadas ordinarias cuando todas las variables menos una se consideran constantes.

Si $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ y ponemos $g(x_i) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ (donde la expresión quiere indicar que consideramos todas las variables x_j como constantes, salvo la x_i), es $\partial z / \partial x_i = g'(x_i)$. Si usamos la definición de $g'(x_i)$ dada en (4.3) Sección 4.2, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h} \tag{15.15}$$

Si consideramos $h = 1$ como un número próximo a 0 obtenemos la aproximación de (15.13). Si no existe el límite en (15.15), decimos que *no existe* $\partial z / \partial x_i$, o que z no es derivable con respecto a x_i en el punto. Por ejemplo, si una función describe la altura de una pirámide, las derivadas parciales en el vértice de la pirámide no existen.

Casi todas las funciones que consideremos tendrán derivadas parciales continuas en cualquier punto de sus dominios. Si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales primeras continuas en el dominio A, decimos que f es **continuamente diferenciable**[3] en A. En este caso se dice también que f es una **función C^1** en A. Si todas las derivadas parciales hasta el orden k existen y son continuas se dice que f es una **función C^k**.

[3] Este nombre parece adecuado, aun cuando no sea exactamente la terminología matemática estándar.

Problemas

1 Hallar todas las parciales primeras de las funciones siguientes:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$ (b) $f(x, y, z) = 5x^2 - 3y^3 + 3z^4$ (c) $f(x, y, z) = xyz$

(d) $f(x, y, z) = x^4/yz$ (e) $f(x, y, z) = (x^2 + y^3 + z^4)^6$ (f) $f(x, y, z) = e^{xyz}$

2 Si $F(x, y, z) = x^2 e^{xz} + y^3 e^{xy}$, hallar $F_1'(1, 1, 1)$, $F_2'(1, 1, 1)$ y $F_3'(1, 1, 1)$.

3 Sean x e y las poblaciones de dos ciudades y d la distancia entre ellas. Supongamos que el número T de personas que viajan entre ambas está dado por

$$T = k\frac{xy}{d^n} \qquad (k \text{ y } n \text{ son constantes positivas})$$

Calcular $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ y $\partial T/\partial d$, estudiando sus signos.

4 Hallar todas las parciales primeras y segundas de la función $w(x, y, z) = 3xyz + x^2 y - xz^3$.

5 Hallar todas las derivadas parciales primeras de las funciones siguientes:

(a) $E(p, q) = ap^2 e^{bq}$ (b) $R(p_1, p_2) = \alpha p_1^{\beta} + \gamma e^{p_1 p_2}$ (c) $x(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

Problemas avanzados

6 Se define la función f por $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Probar que no se verifica el teorema de Young en (0,0) hallando $f_1'(0, y)$ y $f_2'(x, 0)$, y demostrando que $f_{12}''(0, 0) = 1$ y $f_{21}''(0, 0) = -1$. Probar que esto no contradice al teorema de Young porque f_{12}'' y f_{21}'' son discontinuas en $(0, 0)$.

7 Hallar todas las derivadas parciales primeras de $f(u, v, w) = u^{v^w}$.

15.6 DERIVADAS PARCIALES EN ECONOMÍA

En esta Sección se consideran unos cuantos ejemplos económicos de derivadas parciales.

Ejemplo 15.20

Consideremos una función de producción agrícola $Y = F(K, L, T)$, donde Y es el número de unidades producidas, K el capital invertido, L el trabajo y T la superficie de tierra. Entonces $\partial Y/\partial K = F_K'$ se llama la **productividad marginal del capital** y es la tasa de variación de la producción Y con respecto a K cuando L y T se mantienen constantes. De manera análoga, $\partial Y/\partial L = F_L'$ es la **productividad marginal del trabajo** y $\partial Y/\partial T = F_T'$ es la **productividad marginal de la tierra**. Por ejemplo, si se mide el capital K en dólares y $\partial Y/\partial K = 5$, entonces un aumento de la entrada de capital de un dólar dará un aumento de la producción de cinco unidades.

Supongamos, en particular, que F es la función de Cobb–Douglas

$$F(K, L, T) = AK^a L^b T^c \qquad (A,\ a,\ b \text{ y } c \text{ son constantes positivas}) \tag{1}$$

Hallar las productividades marginales y las parciales segundas. Estudiar sus signos.

Solución: Las productividades marginales son

$$F_K' = AaK^{a-1}L^b T^c, \qquad F_L' = AbK^a L^{b-1} T^c, \qquad F_T' = AcK^a L^b T^{c-1} \tag{2}$$

Suponiendo que K, L y T son positivas, las productividades marginales son positivas. Así, un aumento de capital, trabajo o tierra se traducirá en un aumento del número de unidades producidas.

Las derivadas parciales segundas cruzadas son

$$\begin{aligned} F''_{KL} &= AabK^{a-1}L^{b-1}T^{c} \\ F''_{KT} &= AacK^{a-1}L^{b}T^{c-1} \\ F''_{LT} &= AbcK^{a}L^{b-1}T^{c-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Compruébese que F''_{LK}, F''_{TK} y F''_{TL} dan los mismos resultados respectivos que en (3). Nótese que esas parciales son positivas. Llamamos *complementarios* a los factores de cada uno de los pares (capital y trabajo, capital y tierra, tierra y trabajo) porque si uno aumenta, aumenta la productividad marginal del otro.

Las parciales segundas directas son

$$\begin{aligned} F''_{KK} &= Aa(a-1)K^{a-2}L^{b}T^{c} \\ F''_{LL} &= Ab(b-1)K^{a}L^{b-2}T^{c} \\ F''_{TT} &= Ac(c-1)K^{a}L^{b}T^{c-2} \end{aligned}$$

Por ejemplo, F''_{KK} es la derivada parcial de la productividad marginal del capital respecto a K. Si $a < 1$, entonces $F''_{KK} < 0$ y hay por tanto una disminución de la productividad marginal del capital —esto es, un pequeño incremento del capital invertido redunda en una disminución de la productividad marginal del capital. Podemos interpretar eso diciendo que, aunque un pequeño incremento del capital hace que la producción aumente ($F'_{k} > 0$), este aumento se produce a una tasa decreciente ($F''_{kk} < 0$). Lo análogo ocurre para el trabajo (sin $b < 1$) y la tierra (si $c < 1$).

Ejemplo 15.21

Sea x un índice de la cantidad total de bienes producidos y consumidos en una sociedad y z una medida del nivel de contaminación. Si $u(x, z)$ mide el bienestar total de la sociedad (y ésta no es una función fácil de calcular), ¿qué signos cabe esperar que tengan $u'_x(x, z)$ y $u'_z(x, z)$? ¿Cuál piensa el lector que es la hipótesis que los economistas hacen sobre el signo de $u''_{xz}(x, z)$?

Solución: Es razonable pensar que el bienestar aumenta cuando crece la cantidad de bienes, pero en ese caso aumenta el nivel de contaminación. Así, normalmente, se tendrá que $u'_x(x, z) > 0$ y $u'_z(x, z) < 0$. En virtud de (15.13) de la Sección 15.5, $u''_{xz} = (\partial/\partial z)(u'_x)$ es aproximadamente igual a la variación de u'_x cuando el nivel de contaminación crece una unidad. Se suele suponer que $u''_{xz} < 0$. Como u'_x es aproximadamente igual al aumento de bienestar producido por un aumento unitario de x, la hipótesis significa que este aumento de bienestar descenderá cuando aumente el nivel de contaminación. Un ejemplo: si alguien se encuentra en una habitación llena de humo de tabaco, su satisfacción por recibir un trozo más de tarta disminuirá si la concentración de humo crece demasiado.

Ejemplo 15.22

En ciertos estudios económicos se usa la siguiente versión modificada de la función de Cobb–Douglas:

$$F(K, L) = AK^{a}L^{b}e^{cK/L} \qquad (A,\ a,\ b \text{ y } c \text{ son constantes positivas})$$

Hallar las productividades marginales F'_K y F'_L y estudiar sus signos.

Solución: Derivando con respecto a K, manteniendo L constante, también es constante AL^b, luego

$$F'_K = AL^b \frac{\partial}{\partial K}\left(K^a e^{cK/L}\right)$$

Ahora debemos usar la regla de derivación de un producto. Según la regla de la cadena, la derivada de $e^{cK/L}$ con respecto a K es $(c/L)e^{cK/L}$, luego

$$F'_K = AL^b\left[aK^{a-1}e^{cK/L} + K^a(c/L)e^{cK/L}\right] = \left(\frac{a}{K} + \frac{c}{L}\right)F(K, L)$$

De manera análoga,

$$F'_L = AK^a\left[bL^{b-1}e^{cK/L} + L^b(-cK/L^2)e^{cK/L}\right] = \left(\frac{b}{L} - \frac{cK}{L^2}\right)F(K, L)$$

Si K y L son positivas, F'_K es siempre positiva, pero F'_L es positiva sólo si $b > cK/L$. (Si $b < cK/L$, entonces $F'_L < 0$, luego un aumento del trabajo conlleva una reducción de la producción. Por tanto la función es más adecuada como función de producción en un dominio en el que $b > cK/L$.)

Ejemplo 15.23

Dada la función general de Cobb–Douglas F en forma logarítmica

$$\ln F = \ln A + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \cdots + a_n \ln x_n \qquad (*)$$

(véase (15.6), Sección 15.1), probar que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)F$$

Solución: Derivando cada miembro de $(*)$ parcialmente con respecto a x_i por la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x_i} = a_i \frac{1}{x_i} \qquad \text{ó} \qquad x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = a_i F$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i F = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)F = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)F$$

Ejemplo 15.24

En el Ejemplo 15.8 de la Sección 15.1 hemos considerado la función $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como una medida de la satisfacción o "utilidad" que un individuo obtiene de consumir las cantidades x_1, x_2, ..., x_n de n bienes distintos. La derivada parcial $\partial U/\partial x_i$ se llama la **utilidad marginal** del bien i-ésimo. Normalmente las utilidades marginales son positivas porque es de esperar que la utilidad crezca cuando las cantidades de bienes consumidos aumentan.

Para la función $U = a_1 \ln(x_1 - c_1) + a_2 \ln(x_2 - c_2) + \cdots + a_n \ln(x_n - c_n)$ de ese ejemplo tenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{a_1}{x_1 - c_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{a_2}{x_2 - c_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n} = \frac{a_n}{x_n - c_n}$$

Si los parámetros a_1, a_2, ..., a_n son todos positivos y $x_1 > c_1$, $x_2 > c_2$, ..., $x_n > c_n$, vemos que todas las utilidades marginales son positivas.

Problemas

1 Se estimó la demanda de dinero en EE.UU. durante el periodo 1929–1952 en

$$M = 0{,}14Y + 76{,}03(r-2)^{-0{,}84} \qquad (r > 2)$$

donde Y es la renta nacional anual y r es el tipo de interés en porcentaje anual. Hallar $\partial M/\partial Y$ y $\partial M/\partial r$ y estudiar sus signos.

2 Si a y b son constantes, hallar $KY'_K + LY'_L$ en los casos siguientes:

(a) $Y = AK^a + BL^a$ (b) $Y = AK^aL^b$ (c) $Y = \dfrac{K^2L^2}{aL^3 + bK^3}$

3 Sea $F(K, L, M) = AK^aL^bM^c$. Probar que $KF'_K + LF'_L + MF'_M = (a+b+c)F$.

4 Sean $D(p,q)$ y $E(p,q)$ las demandas de dos bienes cuando los precios unitarios son p y q respectivamente. Supongamos que los bienes son sustitutivos el uno del otro, por ejemplo mantequilla y margarina. ¿Cuáles deben ser normalmente los signos de las derivadas parciales de D y E con respecto a p y q?

5 Calcular $\partial U/\partial x_i$ para la función $U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 100 - e^{-x_1} - e^{-x_2} - \cdots - e^{-x_n}$.

Problemas avanzados

6 Calcular $KY'_K + LY'_L$ para $Y = Ae^{\lambda t}[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-m/\rho}$.

15.7 MODELOS LINEALES CON OBJETIVOS CUADRÁTICOS

En esta Sección estudiamos algunos modelos sencillos de optimización que conducen al problema de maximizar o minimizar una función objetivo cuadrática en dos variables.

Ejemplo 15.25 (Monopolista discriminador)

Consideremos una empresa que vende un producto en dos áreas geográficas aisladas. Supongamos que puede poner precios diferentes en cada una de las áreas porque no es fácil revender en una lo que se ha comprado en otra. Por ejemplo, parece que los servicios de mensajería pueden poner precios más altos en Europa que en EE.UU. Supongamos también que la empresa tiene un cierto poder de monopolio, en el sentido de ejercer una influencia sobre los precios en los dos mercados ajustando las cantidades que vende en cada uno. Los economistas suelen llamar "monopolista discriminador" a una empresa con este poder.

Un monopolista discriminador tiene dos curvas de demanda independientes cara a los dos mercados aislados. Supongamos que las inversas de éstas son

$$P_1 = a_1 - b_1Q_1, \qquad P_2 = a_2 - b_2Q_2 \tag{1}$$

para los mercados 1 y 2 respectivamente. Supongamos también que la función de costes totales es

$$C(Q) = \alpha(Q_1 + Q_2)$$

es decir, que los costes totales son proporcionales a la producción total.[4]

[4] Esta función de costes desprecia los gastos de transporte, pero el punto esencial que se quiere poner de relieve es que, aun cuando los suministros a las dos áreas son sustitutivos perfectos desde el punto de vista de la producción, el monopolista pondrá en general precios diferentes, si se le permite.

Los beneficios totales en función de Q_1 y Q_2 son

$$\begin{aligned}\pi(Q_1, Q_2) &= P_1Q_1 + P_2Q_2 - C(Q_1 + Q_2)\\ &= (a_1 - b_1Q_1)Q_1 + (a_2 - b_2Q_2)Q_2 - \alpha(Q_1 + Q_2)\\ &= (a_1 - \alpha)Q_1 + (a_2 - \alpha)Q_2 - b_1Q_1^2 - b_2Q_2^2\end{aligned}$$

Queremos hallar los valores de Q_1 y Q_2 que hacen máxima la función de beneficios. El resolver este problema como en la Sección 3.2 completando el cuadrado es sencillo porque Q_1 y Q_2 aparecen como variables separadas. De hecho,

$$\pi = -b_1\left[Q_1 - \frac{(a_1 - \alpha)}{2b_1}\right]^2 - b_2\left[Q_2 - \frac{(a_2 - \alpha)}{2b_2}\right]^2 + \frac{(a_1 - \alpha)^2}{4b_1} + \frac{(a_2 - \alpha)^2}{4b_2} \tag{2}$$

Así la solución está en las cantidades óptimas

$$Q_1^* = (a_1 - \alpha)/2b_1, \qquad Q_2^* = (a_2 - \alpha)/2b_2$$

Se pueden hallar los precios correspondientes sustituyendo estos valores en (1); se obtiene

$$P_1^* = a_1 - b_1Q_1^* = \tfrac{1}{2}(a_1 + \alpha), \quad P_2^* = a_2 - b_2Q_2^* = \tfrac{1}{2}(a_2 + \alpha)$$

En virtud de (2), los beneficios máximos son

$$\pi^* = \frac{(a_1 - \alpha)^2}{4b_1} + \frac{(a_2 - \alpha)^2}{4b_2}$$

Esta solución es válida siempre que $a_1 \geq \alpha$ y $a_2 \geq \alpha$. En este caso P_1^* y P_2^* son mayores o iguales que α. Esto implica que no hay posibilidad de "subvención cruzada", esto es, que se venda en un mercado por debajo de los costes y se subvencionen las pérdidas con las ganancias en el otro mercado. Tampoco hay "dumping", es decir, que los precios en un mercado sean menores que los costes. Es notable que los precios óptimos sean independientes de b_1 y b_2. Más importante aún, nótese que los precios *no* son iguales en los dos mercados, excepto en el caso particular en que $a_1 = a_2$. En efecto, $P_1^* > P_2^*$ si y sólo si $a_1 > a_2$. Esto quiere decir que el precio es superior en aquel mercado en el que los consumidores están dispuestos a pagar un precio unitario más elevado cuando la cantidad es próxima a cero.

Este análisis ha sido sencillo por la "separabilidad" de las variables en la función cuadrática $\pi(Q_1, Q_2)$, que era la suma de una función cuadrática $\pi_1(Q_1) = (a_1 - \alpha - b_1Q_1)Q_1$ de Q_1 y otra $\pi_2(Q_2) = (a_2 - \alpha - b_2Q_2)Q_2$ de Q_2, sin ningún término en Q_1Q_2. Si la función de costes del monopolista discriminador fuese $C(Q) = \alpha Q + \beta Q^2$, donde $Q = Q_1 + Q_2$ es la producción total, podríamos también maximizar la función de beneficios $\pi(Q_1, Q_2)$ por el método de completar los cuadrados. Sin embargo, el análisis sería más complicado, por lo cual lo dejamos de lado.

Ejemplo 15.26 (Monopsonista discriminador)

Un monopolista es una empresa que se enfrenta a una curva de demanda decreciente. Un monopolista discriminador como el del Ejemplo 15.25 se enfrenta a curvas de demanda decrecientes en dos o más mercados aislados. Por otra parte, un monopsonista es una empresa que se enfrenta a una curva de oferta creciente en uno o más de sus factores de producción. Un "monopsonista discriminador" tiene dos o más curvas de oferta crecientes para tipos distintos del mismo recurso, por ejemplo, trabajadores de distinta raza o sexo. Por supuesto, la discriminación por raza o sexo es ilegal en muchos países. El análisis que vamos a hacer sugiere una posible razón por la que la discriminación debe ser ilegal, y por qué no se puede confiar en que las empresas practiquen voluntariamente la no discriminación.

Consideremos una empresa que utiliza cantidades L_1 y L_2 de dos tipos de trabajo como su único recurso para una producción Q de acuerdo con la función de producción sencilla

$$Q = L_1 + L_2$$

De esta forma, trabajo y producción están medidos de tal forma que cada unidad de trabajo da una de producción. Nótese también que los dos tipos de trabajo son esencialmente indistinguibles porque cada unidad de cada tipo contribuye con una unidad de producción. Supongamos, sin embargo, que hay dos mercados de trabajo separados, con diferentes funciones de oferta que especifican el salario que hay que pagar para conseguir una determinada cantidad de mano de obra. Concretamente, supongamos que esas funciones son

$$w_1 = \alpha_1 + \beta_1 L_1, \qquad w_2 = \alpha_2 + \beta_2 L_2$$

Supongamos, finalmente, que la empresa es competitiva en su mercado, tomando el precio P como fijo. Entonces los beneficios de la empresa son

$$\begin{aligned}\pi(L_1, L_2) &= PQ - w_1 L_1 - w_2 L_2 = P(L_1 + L_2) - (\alpha_1 + \beta_1 L_1)L_1 - (\alpha_2 + \beta_2 L_2)L_2 \\ &= (P - \alpha_1)L_1 - \beta_1 L_1^2 + (P - \alpha_2)L_2 - \beta_2 L_2^2 \\ &= -\beta_1\Big(L_1 - \frac{P - \alpha_1}{2\beta_1}\Big)^2 - \beta_2\Big(L_2 - \frac{P - \alpha_2}{2\beta_2}\Big)^2 + \frac{(P - \alpha_1)^2}{4\beta_1} + \frac{(P - \alpha_2)^2}{4\beta_2}\end{aligned}$$

Se deduce de aquí que las demandas óptimas de trabajo son

$$L_1^* = \frac{P - \alpha_1}{2\beta_1}, \qquad L_2^* = \frac{P - \alpha_2}{2\beta_2}$$

que producen el máximo beneficio de

$$\pi^* = \frac{(P - \alpha_1)^2}{4\beta_1} + \frac{(P - \alpha_2)^2}{4\beta_2}$$

Los salarios correspondientes son

$$w_1^* = \alpha_1 + \beta_1 L_1^* = \tfrac{1}{2}(P + \alpha_1), \qquad w_2^* = \alpha_2 + \beta_2 L_2^* = \tfrac{1}{2}(P + \alpha_2)$$

Por tanto, $w_1^* = w_2^*$ sólo si $\alpha_1 = \alpha_2$. Esto quiere decir que el salario es mayor para aquel tipo de trabajo que demanda mayor salario para niveles bajos de oferta de trabajo. Quizás este es el tipo de trabajo con mejor porvenir.

Ejemplo 15.27 (Econometría: Regresión lineal)

La mayor parte de la economía aplicada se ocupa de analizar datos para tratar de discernir un patrón que ayude a entender el pasado y, posiblemente, a predecir el futuro. Por ejemplo, los datos sobre precio y cantidad de un cierto bien, como el gas natural, se pueden usar para calcular una curva de demanda que pueda servir para predecir cómo va a reaccionar la demanda ante cambios de precios en el futuro. La técnica más común para hacer esto es la *regresión lineal.*

Supongamos que la variable y (por ejemplo la cantidad demandada) depende de la variable x (por ejemplo, precio o renta). Supongamos que se tienen observaciones (x_t, y_t) de ambas variables en tiempos $t = 1, 2, \dots, T$. La técnica de la regresión lineal consiste en ajustar una función lineal

$$y = \alpha + \beta x$$

a los datos, como se indica en la Figura 15.18. Por supuesto un ajuste perfecto es posible

solamente si existen números α y β tales que

$$y_t = \alpha + \beta x_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

Esto ocurre rara vez. Lo que ocurre en general es que

$$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

donde e_t es un término de *error* o *perturbación*.

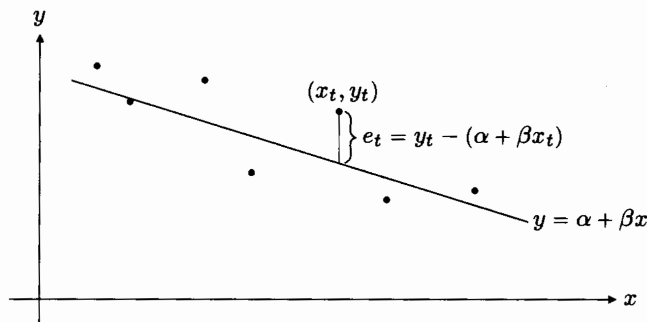


FIGURA 15.18

Se desea, evidentemente, que los errores sean pequeños en media. Por tanto, hay que ingeniarselas para elegir los parámetros de tal manera que hagan los errores "lo más pequeños posible". Una forma de hacer esto es elegir α y β de tal manera que se haga mínima la suma $\sum_{t=1}^{T}(y_t - \alpha - \beta x_t)$.

Sin embargo esto no es muy conveniente porque discrepancias positivas grandes cancelan discrepancias negativas grandes. Así la suma de los errores puede ser cero aun estando muy lejos de un ajuste perfecto o, por lo menos, bueno. De alguna manera tenemos que evitar que los errores positivos cancelen a los negativos.

Eso se hace minimizando la función de "pérdida"

$$L(\alpha, \beta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_t^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \alpha - \beta x_t)^2 \tag{1}$$

que es la media de los cuadrados de los errores. Desarrollando el cuadrado obtenemos[5]

$$L(\alpha, \beta) = T^{-1}\sum_t (y_t^2 + \alpha^2 + \beta^2 x_t^2 - 2\alpha y_t - 2\beta x_t y_t + 2\alpha\beta x_t)$$

Esto es una función cuadrática de α y β. Vamos a demostrar cómo se puede minimizar esta función completando los cuadrados. Así se obtendrá una estimación de α y β que se llama *de mínimos cuadrados*.

Antes de hacerlo vamos a introducir una notación estándar. Vamos a escribir

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{x_1 + \cdots + x_T}{T} = T^{-1}\sum_t x_t \\ \mu_y &= \frac{y_1 + \cdots + y_T}{T} = T^{-1}\sum_t y_t \end{aligned} \tag{2}$$

---

5 Desde ahora en adelante pondremos a veces $\sum_t$ en lugar de $\sum_{t=1}^{T}$.

para designar a la *media estadística* de x_t e y_t respectivamente. También vamos a poner

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= T^{-1}\sum_t (x_t-\mu_x)^2\\ \sigma_{yy} &= T^{-1}\sum_t (y_t-\mu_y)^2\\ \sigma_{xy} &= T^{-1}\sum_t (x_t-\mu_x)(y_t-\mu_y)\end{aligned} \tag{3}$$

para designar a las *varianzas estadísticas* de x_t e y_t y a la *covarianza*, respectivamente. Nótese que la definición de σ_{xx} implica que

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= T^{-1}\sum_t (x_t^2-2\mu_x x_t+\mu_x^2) = T^{-1}\sum_t x_t^2 - 2\mu_x T^{-1}\sum_t x_t + \mu_x^2\\ &= T^{-1}\sum_t x_t^2 - 2\mu_x^2+\mu_x^2 = T^{-1}\sum_t x_t^2 - \mu_x^2\end{aligned}$$

De manera análoga es

$$\sigma_{yy} = T^{-1}\sum_t y_t^2 - \mu_y^2, \qquad \sigma_{xy} = T^{-1}\sum_t x_t y_t - \mu_x\mu_y$$

Se deben comprobar estas últimas relaciones como ejercicio. La expresión de $L(\alpha,\beta)$ se escribe ahora como

$$\begin{aligned}L(\alpha,\beta) &= (\sigma_{yy}+\mu_y^2)+\alpha^2+\beta^2(\sigma_{xx}+\mu_x^2)-2\alpha\mu_y-2\beta(\sigma_{xy}+\mu_x\mu_y)+2\alpha\beta\mu_x\\ &= \alpha^2+\mu_y^2+\beta^2\mu_x^2-2\alpha\mu_y-2\beta\mu_x\mu_y+2\alpha\beta\mu_x+\beta^2\sigma_{xx}-2\beta\sigma_{xy}+\sigma_{yy}\end{aligned}$$

Completando los cuadrados se obtiene

$$L(\alpha,\beta) = (\mu_y-\alpha-\beta\mu_x)^2+\sigma_{xx}\left(\beta-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2+\sigma_{yy}-\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}}$$

De aquí se deduce que los valores que minimizan $L(\alpha,\beta)$ (o la estimación de α y β por "mínimos cuadrados") es

$$\hat{\beta} = \sigma_{xy}/\sigma_{xx}, \qquad \hat{\alpha} = \mu_y - \hat{\beta}\mu_x = \mu_y - (\sigma_{xy}/\sigma_{xx})\mu_x \tag{4}$$

Nótese en particular que la recta

$$y = \hat{\alpha}+\hat{\beta}x$$

pasa por el punto medio (μ_x,μ_y) de los pares observados (x_t,y_t), $t=1,\ldots,T$.

Problemas

1 Supongamos que un monopolista practica discriminación de precios en la venta de un producto poniéndole precios distintos en mercados separados. Supongamos que las curvas de demanda son

$$P_1 = 100 - Q_1, \qquad P_2 = 80 - Q_2$$

y supongamos que la función de costes es $C = 6(Q_1+Q_2)$. ¿Cuánto hay que vender en los dos mercados para hacer máximos los beneficios? ¿A qué precios? ¿Cuánto se deja de ganar si se declara ilegal la discriminación de precios?

2 Calcular la pérdida de beneficios si al monopolista discriminador del Ejemplo 15.25 no se le permite discriminar.

3 Calcular la pérdida de beneficios si al monopsonista discriminador del Ejemplo 15.26 no se le permite discriminar.

4 En el Ejemplo 15.27 hallar la expresión de $\hat{L}$, el mínimo valor de $L(\alpha, \beta)$.

15.8 FORMAS CUADRÁTICAS EN DOS VARIABLES

En las Secciones 3.1 y 3.2 dimos ejemplos en los que se podían optimizar funciones de una variable completando el cuadrado. Los Ejemplos 15.25 a 15.27 indican cómo el completar los cuadrados puede valer también para funciones cuadráticas de varias variables. Las técnicas del cálculo ahorran manipulaciones algebraicas en muchos casos. Sin embargo, aun las técnicas de cálculo que se van a dar en el Capítulo 17, especialmente las condiciones de segundo orden, requieren hasta cierto punto estudiar las propiedades de funciones cuadráticas particulares, llamadas "formas cuadráticas".

Una **forma cuadrática** de dos variables es una función

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{15.16}$$

donde a, b y c son constantes reales. Usando notación matricial podemos escribir (véase Problema 4)

$$f(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Las parciales segundas de f son $f''_{11} = 2a$, $f''_{12} = f''_{21} = 2b$ y $f''_{22} = 2c$, luego, según la Sección 15.5, la hessiana de f es

$$2 \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Se dice que la forma cuadrática $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es **definida positiva** si $f(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Se dice que es **semidefinida positiva** si $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y). Se dice que $f(x, y)$ es **definida negativa** si $f(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, y es **semidefinida negativa** si $f(x, y) \leq 0$ para todo (x, y). Finalmente, se dice que $f(x, y)$ es **indefinida** si hay dos pares distintos (x^-, y^-) y (x^+, y^+) tales que $f(x^-, y^-) < 0$ y $f(x^+, y^+) > 0$.

Ejemplo 15.28

Clasificar cada una de las cinco formas cuadráticas siguientes:

(a) $x^2 + y^2$ **(b)** $(x + y)^2$ **(c)** $-x^2 - y^2$ **(d)** $-(x + y)^2$ **(e)** $x^2 - y^2$

Solución: **(a)** $x^2 + y^2 > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ luego $x^2 + y^2$ es definida positiva.

(b) $(x + y)^2 \geq 0$ para todo (x, y) y $(x + y)^2 = 0$ para $(x, y) = (1, -1)$, por ejemplo. Por tanto, $(x + y)^2$ es semidefinida positiva, pero no definida positiva.

(c) y **(d)** son como **(a)** y **(b)** respectivamente, con el signo opuesto. Así las formas cuadráticas son, respectivamente, definida negativa y semidefinida negativa.

(e) $x^2 - y^2 > 0$ si $(x, y) = (1, 0)$ y $x^2 - y^2 < 0$ si $(x, y) = (0, 1)$. Por tanto, la forma cuadrática es indefinida.

Nótese que $f(0, 0) = 0$ cualesquiera que sean las constantes a, b y c, luego las definiciones precedentes de formas cuadráticas definidas positivas y negativas tienen que excluir el punto $(0, 0)$.

Las definiciones implican evidentemente que (a) una forma cuadrática definida o semidefinida positiva tiene un mínimo en $(0, 0)$, (b) una forma cuadrática definida o semidefinida negativa tiene un máximo en $(0, 0)$ y (c) una forma cuadrática *indefinida* no tiene máximo ni mínimo en ninguna parte. Cuando la forma cuadrática es definida (positiva o negativa), el mínimo o el máximo es *estricto*.

La clasificación de una forma cuadrática depende enteramente de los coeficientes a, b y c. De hecho, probaremos el siguiente resultado importante:

La **forma cuadrática** $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es

$$\text{definida positiva} \iff a > 0,\ c > 0,\ \text{y} \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0 \tag{15.17}$$

$$\text{semidefinida positiva} \iff a \geq 0,\ c \geq 0,\ \text{y} \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \geq 0 \tag{15.18}$$

$$\text{definida negativa} \iff a < 0,\ c < 0,\ \text{y} \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0 \tag{15.19}$$

$$\text{semidefinida negativa} \iff a \leq 0,\ c \leq 0,\ \text{y} \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \geq 0 \tag{15.20}$$

$$\text{indefinida} \iff \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0 \tag{15.21}$$

Recuérdese que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

por definición de determinante de una matriz 2×2 (véase (13.4) Sección 13.1).

Demostración: Demostraremos primero (15.18). Supongamos que $f(x,y)$ es semidefinida positiva. Entonces, en particular, $f(1,0) = a \geq 0$ y $f(0,1) = c \geq 0$. Si $a = 0$ entonces $f(x,1) = 2bx + c$, que solamente puede ser ≥ 0 para todo x siempre que sea $b = 0$. (Si $b > 0$, tomando x negativo suficientemente pequeño se hace negativo $f(x,1)$. Si $b < 0$, eligiendo x positivo suficientemente grande se hace $f(x,1)$ negativo). Así, $ac - b^2 = 0$. Si $a > 0$, entonces $f(-b,a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = a(ac - b^2)$, que debe ser no negativo, luego $ac - b^2 \geq 0$.

Para probar la implicación contraria en (15.18), supongamos que $a \geq 0$, $c \geq 0$ y $ac - b^2 \geq 0$. Si $a = 0$, entonces de $ac - b^2 \geq 0$ se deduce que $b = 0$ y así $f(x,y) = cy^2 \geq 0$ para todo (x,y). Si $a > 0$, podemos escribir

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2 \tag{$*$}$$

Como $c - b^2/a \geq 0$ y $a > 0$, vemos que $f(x,y) \geq 0$ para todo (x,y).

La equivalencia de (15.20) se prueba de la misma manera que (15.18) cambiando los signos.

Para probar (15.17) supongamos que $f(x,y)$ es definida positiva. Entonces $f(1,0) = a > 0$ y $f(0,1) = c > 0$. Pero entonces $(*)$ da $f(-b/a, 1) = c - b^2/a = (ac - b^2)/a > 0$, luego $ac - b^2 > 0$. Para demostrar la implicación contraria en (15.17) supongamos $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$. En virtud de $(*)$, $f(x,y) \geq 0$ para todo (x,y). Si $f(x,y) = 0$, entonces $x + by/a = 0$ e $y^2 = 0$, luego $x = y = 0$. Por tanto, $f(x,y)$ es definida positiva. La equivalencia (15.19) se prueba de la misma forma, cambiando los signos.

Demostramos finalmente (15.21). Supongamos que $f(x,y)$ es indefinida. Como no se pueden satisfacer ninguna de las desigualdades de (15.18) ni de (15.20), o bien a y c tienen signos opuestos o $ac - b^2 < 0$. Pero si a y c tienen signos opuestos, entonces $ac < 0 \leq b^2$ de todas formas, luego $ac - b^2 < 0$ en todo caso.

Para probar la implicación contraria (15.21), supongamos que $ac - b^2 < 0$. Si $a \neq 0$, entonces $f(1,0) = a$ y $f(-b,a) = a(ac - b^2)$ tienes signos contrarios, luego $f(x,y)$ es indefinida. Si $a = 0$ y $c = 0$, entonces $f(1,1) = 2b$ y $f(-1,1) = -2b$. Como $ac - b^2 < 0$ implica que $b^2 > 0$ en este caso, se tiene que $b \neq 0$ y así $f(x,y)$ es indefinida. Si $a = 0$ y $c \neq 0$, entonces $f(0,1) = c$ y $f(c,-b) = -b^2c$ tienen signos distintos, luego $f(x,y)$ es indefinida.

Funciones cuadráticas generales de dos variables

Sumando a (15.16) una función lineal $px + qy + r$ de x e y obtenemos

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r \tag{15.22}$$

Ésta es la función cuadrática general de x e y. Si $ac \neq b^2$ y escribimos

$$\xi = \frac{cp - bq}{2(ac - b^2)}, \qquad \eta = \frac{aq - bp}{2(ac - b^2)}, \qquad d = r - (a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2) \tag{15.23}$$

se verifica que

$$2a\xi + 2b\eta = p, \qquad 2b\xi + 2c\eta = q, \qquad a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d = r$$

y la función se puede escribir en la forma

$$f(x,y) = a(x+\xi)^2 + 2b(x+\xi)(y+\eta) + c(y+\eta)^2 + d \tag{15.24}$$

Si $ac = b^2 \neq 0$, entonces

$$f(x,y) = a\Big(x + \sqrt{\frac{c}{a}}y\Big)^2 + px + qy + r$$

y es fácil estudiar directamente la función cuadrática. Una transformación similar funciona si $ac = b^2 = 0$ y bien a ó c es $\neq 0$. Si $a = b = c = 0$, la función no es cuadrática.

Así, previas sustituciones como antes si fueran precisas, la función cuadrática general se reduce a una del tipo

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + d$$

Desde luego el término independiente d no cambia esencialmente el comportamiento de $f(x,y)$. Así, en todos los casos interesantes, la función cuadrática general (15.22) se reduce a la forma cuadrática (15.16) que se estudió con detalle anteriormente.

Formas cuadráticas con restricciones lineales

Consideremos la forma cuadrática $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ y supongamos que las variables están sujetas a la restricción lineal $px + qy = 0$, con $q \neq 0$. Despejando y en la restricción tenemos $y = -px/q$ y, sustituyendo este valor de y en la expresión de Q, se obtiene

$$Q = ax^2 + 2bx\Big(-\frac{px}{q}\Big) + c\Big(-\frac{px}{q}\Big)^2 = \frac{1}{q^2}(aq^2 - 2bpq + cp^2)x^2 \tag{$*$}$$

Decimos que $Q(x,y)$ es **definida positiva, o negativa, sujeta a la restricción** $px + qy = 0$ si Q es positiva, o negativa, para todo $(x,y) \neq (0,0)$ que verifica la restricción $px + qy = 0$. Como es

$$-\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & a & b \\ q & b & c \end{vmatrix} = aq^2 - 2bpq + cp^2 \tag{$**$}$$

se tiene en virtud de $(*)$ que

$$\left.\begin{array}{l} Q = ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ es definida positiva} \\ \text{sujeta a la restricción } px + qy = 0 \end{array}\right\} \iff \begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & a & b \\ q & b & c \end{vmatrix} < 0 \tag{15.25}$$

Problemas

1 Usar (15.17) a (15.21) para clasificar las formas cuadráticas siguientes:

(a) $4x^2 + 8xy + 5y^2$ (b) $-x^2 + xy - 3y^2$ (c) $x^2 - 6xy + 9y^2$

(d) $4x^2 - y^2$ (e) $\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$ (f) $6xy - 9y^2 - x^2$

2 Probar que las funciones cuadráticas siguientes se pueden escribir en la forma (15.23) usando (15.24):

(a) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y$ (b) $f(x, y) = -x^2 - xy + y^2 - x - y + 5$

3 Determinar si son definidas positivas o negativas las formas cuadráticas siguientes sujetas a la restricción lineal dada:

(a) $x^2 - 2xy + y^2$ sujeta a $x + y = 0$

(b) $2x^2 - 4xy + y^2$ sujeta a $3x + 4y = 0$

(c) $-x^2 + xy - y^2$ sujeta a $5x - 2y = 0$

4 Comprobar la ecuación matricial que aparece después de la ecuación (15.16).

15.9 FORMAS CUADRÁTICAS EN VARIAS VARIABLES

A menudo se encuentran formas cuadráticas en más de dos variables como la siguiente, que tiene tres, $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + 5x_2^2 - x_3^2$. La suma de los exponentes de las variables en cada término es 2.

Una **forma cuadrática general** en n variables es una función $Q = Q(x_1, \dots, x_n)$ que tiene una expresión de doble suma

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{ij}x_ix_j + \cdots + a_{nn}x_n^2 \tag{15.26}$$

Si escribimos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la definición de multiplicación de matrices implica que

$$Q(x_1, \dots, x_n) = Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{15.27}$$

Desde luego, $x_ix_j = x_jx_i$, luego se puede escribir $a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = (a_{ij} + a_{ji})x_ix_j$. Si se sustituye a_{ij} y a_{ji} por $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, entonces se pueden igualar a_{ij} y a_{ji} sin cambiar $Q(x_1, \dots, x_n)$. Así se puede suponer en (15.26) que

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{(para todo } i \text{ y } j) \tag{15.28}$$

lo que significa que la matriz **A** es simétrica.

Ejemplo 15.29

Escribir

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_1x_2 - 3x_1x_3 + 3x_2x_1 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3x_1 + 2x_3x_2 + x_3^2$$

en la forma (15.27), con **A** no simétrica y con **A** simétrica.

Solución:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

El signo de una forma cuadrática

Nos interesan particularmente las condiciones que aseguren que Q es siempre positiva o siempre negativa, generalizando así algunos de los resultados de la sección anterior.

En general se dice que una matriz $\mathbf{A}$ simétrica $n \times n$, o la forma cuadrática Q correspondiente, es **definida positiva** si

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \qquad (\text{para todo } (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)) \tag{15.29}$$

Se dice que es **definida negativa** si

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0 \qquad (\text{para todo } (x_1, \dots x_n) \neq (0, \dots, 0)) \tag{15.30}$$

Si sustituimos $>$ por ≥ 0 en (15.29), entonces tenemos el concepto de matriz o forma cuadrática **semidefinida positiva** y, de manera análoga, tenemos el concepto de **semidefinida negativa** al sustituir $<$ por $\leq$ en (15.30). Finalmente, $\mathbf{A}$ es **indefinida** si no es ni semidefinida positiva ni semidefinida negativa. En ese caso existen vectores $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ tales que $\mathbf{x}_0'\mathbf{A}\mathbf{x}_0 < 0$ y $\mathbf{y}_0'\mathbf{A}\mathbf{y}_0 > 0$. Nótese que $Q(0, \dots, 0) = 0$ cualesquiera que sean las constantes a_{ij}, luego en las definiciones de definida positiva y negativa hay que excluir el punto $(0, \dots, 0)$.

Ejemplo 15.30

Sea $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una matriz diagonal $n \times n$. Averiguar cuándo es la matriz $\mathbf{D}$: (**a**) definida negativa, (**b**) semidefinida positiva y (**c**) indefinida.

Solución: $\mathbf{D}$ es una matriz simétrica cuya forma cuadrática asociada es

$$Q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

(**a**) Esta forma cuadrática es definida negativa si $\lambda_i < 0$ para todo $i = 1, 2 \dots, n$. Recíprocamente, si $\lambda_i \geq 0$ para algún i, entonces $Q(\mathbf{e}_i) \geq 0$ donde $\mathbf{e}_i$ es el vector cuya i-ésima componente es 1 y el resto cero. Por tanto, si $\mathbf{D}$ es definida negativa, entonces $\lambda_i < 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

(**b**) $\mathbf{D}$ es evidentemente semidefinida positiva si y sólo si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

(**c**) $\mathbf{D}$ es evidentemente indefinida si y sólo si existen al menos un elemento positivo y otro negativo en la diagonal.

Por el Ejemplo 14.13 de la Sección 14.4, los elementos diagonales de una matriz diagonal son sus autovalores. Por tanto, el Ejemplo 15.30 prueba que las propiedades de ser definida, semidefinida o indefinida de una forma cuadrática dependen de los autovalores. Lo mismo se verifica para toda matriz 2×2 simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Por el Ejemplo 14.14, sus autovalores reales λ_1 y λ_2 suman $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$ y su producto es $\lambda_1\lambda_2 = \det(\mathbf{A})$. Por (15.18), $\mathbf{A}$ es semidefinida positiva si y sólo si $a \geq 0$, $c \geq 0$ y $\det(\mathbf{A}) \geq 0$. Como el hecho de que $\det(\mathbf{A}) \geq 0$ implica que a y c no pueden tener signos opuestos, debe verificarse que $\mathbf{A}$ es semidefinida positiva si y sólo si $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c \geq 0$ y $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2 \geq 0$. Se deduce que $\mathbf{A}$ es semidefinida positiva si y sólo si λ_1 y λ_2 son no negativos. Los casos de matrices semidefinidas negativas, de definidas positivas o negativas y de indefinidas son semejantes. De hecho, el signo de una forma cuadrática general en n variables está determinado por los signos de los autovalores de la matriz asociada a causa del siguiente

Teorema 15.2

Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica. Entonces:

(**a**) $\mathbf{A}$ es definida positiva $\iff$ todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son positivos.

(**b**) $\mathbf{A}$ es semidefinida positiva $\iff$ todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son ≥ 0.

(**c**) $\mathbf{A}$ es definida negativa $\iff$ todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son negativos.

(**d**) $\mathbf{A}$ es semidefinida negativa $\iff$ todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son ≤ 0

(**e**) $\mathbf{A}$ es indefinida $\iff$ $\mathbf{A}$ tiene dos autovalores con signos opuestos.

Demostración: Sea λ cualquier autovalor de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{x}_\lambda \neq \mathbf{0}$ un autovector asociado a λ, es decir, tal que $\mathbf{A}\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x}_\lambda$. Por tanto, $Q(\mathbf{x}_\lambda) = \mathbf{x}'_\lambda\mathbf{A}\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{x}'_\lambda\lambda\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x}'_\lambda\mathbf{x}_\lambda$, que tiene el mismo signo que λ. Ahora bien, si $\mathbf{A}$ es definida positiva, entonces $Q(\mathbf{x}_\lambda) = \mathbf{x}'_\lambda\mathbf{A}\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x}'_\lambda\mathbf{x}_\lambda > 0$ para todos los autovectores $\mathbf{x}_\lambda \neq \mathbf{0}$ luego todos los autovalores son positivos. Un razonamiento similar vale para matrices definidas negativas, semidefinidas positivas o negativas y para indefinidas.

Recíprocamente, por el Teorema 14.8 de la Sección 14.6, existe una matriz ortogonal $\mathbf{U}$ (es decir $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}'$) tal que

$$\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathbf{D}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de $\mathbf{A}$. Por tanto,

$$\mathbf{A} = (\mathbf{U}')^{-1}(\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U})\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}')^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}'$$

Ahora bien, se debe verificar para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ que

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}'\mathbf{x} = (\mathbf{U}'\mathbf{x})'\mathbf{D}(\mathbf{U}'\mathbf{x}) = \mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{U}'\mathbf{x}$. Además, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, es $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ porque $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{y}$. Por tanto, en el caso (**a**), cuando todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son positivos, es $\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y} > 0$ para todo $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ y así $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, lo que implica que $\mathbf{A}$ es definida positiva. Las demostraciones de los casos (**b**) a (**e**) son semejantes.

Ejemplo 15.31

Comprobar el signo de la forma cuadrática del Ejemplo 15.29.

Solución: La ecuación característica de la matriz simétrica correspondiente es

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Así, $(5-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$, que se reduce a $\lambda(1-\lambda)(\lambda-6) = 0$. Por tanto, los autovalores son 0, 1, y 6. En virtud de (**b**) en el Teorema 15.2, la forma cuadrática es semidefinida positiva.

Para poder aplicar el Teorema 15.2 hay que calcular los autovalores de la matriz asociada. El teorema siguiente hace posible el clasificar una matriz **A** hallando los signos de ciertos menores de **A**.

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. Los **menores principales dominantes** de **A** son los n determinantes:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad (k = 1, \dots, n) \tag{15.31}$$

Nótese que D_k se obtiene a partir de $|\mathbf{A}|$ suprimiendo las últimas $n-k$ filas y las últimas $n-k$ columnas. Así, para $k = 1, 2, 3, \dots, n$, los menores principales dominantes son

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{15.32}$$

Se puede probar el resultado siguiente:[6]

Teorema 15.3

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz simétrica, con menores principales dominantes D_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ definidos por (15.32). Entonces:

(**a**) **A** es definida positiva $\iff$ $D_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

(**b**) **A** es definida negativa $\iff$ $(-1)^k D_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

Aunque la demostración del Teorema 15.3 es demasiado avanzada para este libro, se la puede ilustrar con un ejemplo, el del caso en que **A** sea diagonal, $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. En este caso, el Ejemplo 14.13 de la Sección 14.4 y el Teorema 15.2 implican que **A** es definida positiva si y sólo si $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Los menores principales dominantes de **A** son λ_1, $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, ..., $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_n$, que son todos positivos si y sólo si $\lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Así se comprueba el caso (**a**) del Teorema 15.3 en este ejemplo. Por otra parte, **A** es definida negativa si y sólo si $\lambda_i < 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Aquí los menores principales dominantes tienen signos alternos si y sólo si $\lambda_i < 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, que es el caso (**b**) del Teorema 15.3.

[6] Véase, por ejemplo, Hadley (1973).

Cuando **A** es una matriz 2×2, las condiciones (15.17) y (15.19) de la Sección 15.8 son las traducciones del Teorema 15.3. La razón es que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$$

implica que $ac > b^2 \geq 0$, luego $ac > 0$, lo que implica a su vez que a y c deben tener el mismo signo.

Ejemplo 15.32

Demostrar que la matriz siguiente es definida negativa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución: En este caso,

$$-3 < 0\,, \qquad \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -25 < 0$$

Por el Teorema 15.3 (**b**), vemos que **A** es definida negativa. Como ejercicio se debe comprobar este resultado aplicando el test de los autovalores del Teorema 15.2.

El caso de formas semidefinidas

Se puede estar tentado de conjeturar que una matriz es semidefinida si todas las desigualdades estrictas del Teorema 15.3(**a**) se sustituyen por desigualdades no estrictas ($\geq$ ó $\leq$). Esto es falso. La forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = 0x_1^2 + 0 \cdot x_1 x_2 - x_2^2 = -x_2^2$ es semidefinida negativa, no semidefinida positiva. Sin embargo, los menores principales dominantes de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

correspondiente son ≥ 0 (de hecho son ambos cero).

Para comprobar que una forma cuadrática es semidefinida hay que comprobar los signos de *todos los menores principales* de la matriz **A** correspondiente, no sólo los menores principales dominantes. Un menor principal de orden r de **A** es el que se obtiene suprimiendo $n - r$ filas y las $n - r$ columnas *con la misma numeración. Se puede probar que una forma cuadrática* $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ *es semidefinida positiva si y sólo si todos los menores principales de* **A** *son* ≥ 0. En el caso de las matrices 2×2, (15.18) de la Sección 15.8 confirma este resultado. También *se puede demostrar que* $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ *es semidefinida negativa si y sólo si todos los menores principales de orden* k *de* **A** *tienen el mismo signo que* $(-1)^k$. Para el caso 2×2, (15.20) lo confirma.

Otro caso en que es fácil comprobar que se verifican esos dos resultados es el de **A** diagonal. Entonces **A** es semidefinida positiva si y sólo si todos sus elementos diagonales son no negativos. Entonces, los menores principales de **A**, que son producto de sus elementos diagonales, serán también no negativos si y sólo si sus elementos diagonales son no negativos. No hay un razonamiento obvio para el caso en que sea **A** semidefinida negativa.

Problemas

1 Escribir la forma cuadrática (15.26) desarrollada para $n = 3$.

2 Escribir las formas cuadráticas siguientes en la forma matricial (15.27) con **A** simétrica:

(a) $x^2 + 2xy + y^2$ (b) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$

3 Usar el Teorema 15.3 para clasificar las formas cuadráticas siguientes en las tres variables x_1, x_2 y x_3:

(a) $x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2$ (b) $x_2^2 + 8x_3^2$ (c) $-3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2$

4 Sea **A** una matriz simétrica semidefinida positiva. Demostrar que **A** es definida positiva si $|\mathbf{A}| \neq 0$.

16

Técnicas de estática comparativa

El mero poder y conocimiento
exaltan la naturaleza humana pero no la bendicen.
—*Francis Bacon* (The Advancement of Learning)

La finalidad última de este capítulo es estudiar las propiedades de las funciones definidas implícitamente por un sistema de ecuaciones. Nos interesa en particular ver cómo variables económicas como oferta y demanda responden a cambios en los parámetros como el precio. Éste es el tema de estudio de la estática comparativa, en la cual la pregunta general es: ¿qué ocurre con una solución óptima cuando los parámetros del problema cambian? Una gran proporción del análisis económico se basa en la estática comparativa, luego este tema es extraordinariamente importante.

16.1 LA REGLA DE LA CADENA

Muchos modelos económicos manejan funciones compuestas. Se trata de funciones de una o varias variables que, a su vez, son funciones de otras variables básicas. Por ejemplo, la cantidad producida (output) puede ser función del capital y el trabajo y ambos son funciones del tiempo. ¿Cómo varía la cantidad producida con el tiempo? Más generalmente, ¿qué le ocurre al valor de una función compuesta cuando los valores de sus variables básicas cambian? Éste es el problema general que estudiamos en esta sección y en la siguiente. Los resultados que se obtengan van a generalizar la regla de la cadena de la Sección 5.2 a derivadas parciales. En esta sección se considera el caso más sencillo.

Supongamos que

$$z = F(x, y) \tag{1}$$

es una función de x e y donde, a su vez,

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \tag{2}$$

son funciones de una variable t. Sustituyendo (2) en (1) obtenemos

$$z = F(f(t), g(t)) \tag{3}$$

de tal manera que z es función de t únicamente. Una variación de t producirá en general una variación de $f(t)$ y $g(t)$ y, como resultado, una variación de z. ¿Cómo cambia z cuando varía t? Por ejemplo, ¿producirá un aumento de t un aumento o una disminución de z? La respuesta a estas preguntas será mucho más fácil si se puede hallar una expresión de dz/dt, la tasa de variación de z con respecto a t. Esta expresión viene dada por la regla siguiente:

La regla de la cadena

Si $z = F(x, y)$, $x = f(t)$, $y = g(t)$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = F_1'(x, y)\frac{dx}{dt} + F_2'(x, y)\frac{dy}{dt} \tag{16.1}$$

Es importante comprender con precisión el contenido de (16.1). Esta fórmula suministra la derivada de $z = F(x, y)$ con respecto a t existen las derivadas parciales de F con respecto a x e y, y x, y son funciones derivables de t. Esta derivada se llama normalmente la **derivada total** de z con respecto a t. Según (16.1) el hecho de que la primera variable x dependa de t contribuye con el término $F_1'(x, y)\, dx/dt$ a la derivada total. Análogamente, el hecho de que la segunda variable y dependa de t contribuye con el término $F_2'(x, y)\, dy/dt$ a la derivada total. La derivada total dz/dt es la *suma* de las dos contribuciones.

Damos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 16.1

Usar (16.1) para calcular dz/dt en la función $z = F(x, y) = x^2 + y^3$, donde $x = t^2$, $y = 2t$.

Solución: Se tiene que

$$F_1'(x, y) = 2x, \qquad F_2'(x, y) = 3y^2, \qquad \frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2$$

Así la fórmula (16.1) da

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot 2t + 3y^2 \cdot 2 = 4tx + 6y^2 = 4t^3 + 24t^2$$

donde la última igualdad se obtiene al sustituir x e y por sus valores en función de t. En este caso podemos comprobar que se verifica la regla de la cadena sustituyendo x por t^2 e y por $2t$ en la expresión de $F(x, y)$ y derivando luego con respecto a t. El resultado es

$$z = x^2 + y^3 = (t^2)^2 + (2t)^3 = t^4 + 8t^3 \Longrightarrow \frac{dz}{dt} = 4t^3 + 24t^2$$

como anteriormente.

Ejemplo 16.2

Supongamos que se venden dos bienes en un mercado a los precios unitarios p y q. Supongamos que las demandas de los dos bienes dependen de los precios de ambos. Todo otro factor que pueda influir en la demanda se considera constante. Designemos por $D_1 = D_1(p, q)$ a la demanda del primer bien.

Supongamos finalmente que los precios p y q varían con el tiempo t, y sean $p = p(t)$ y $q = q(t)$ sus expresiones en función de él. Entonces la demanda resulta ser una función de t únicamente, $D_1 = D_1(p(t), q(t))$, e interesa saber cómo D_1 cambia cuando t varía. Este problema es el mismo que nos propusimos anteriormente, sólo que los símbolos son distintos. Renombrando los símbolos de manera adecuada y usando la regla de la cadena (16.1) se deduce que

$$\frac{dD_1}{dt} = \frac{\partial D_1(p,q)}{\partial p}\dot{p}(t) + \frac{\partial D_1(p,q)}{\partial q}\dot{q}(t)$$

donde hemos puesto puntos para designar a las derivadas con respecto al tiempo. El primer sumando del miembro de la derecha da el efecto que tiene sobre la demanda un cambio en el precio p, y el segundo da el efecto de un cambio en q.

Ejemplo 16.3

El Ejemplo 15.10 de la Sección 15.2 estudiaba la función de producción $Y = F(K, L)$, donde Y representa la cantidad producida, K capital y L trabajo. Supongamos que K y L son funciones del tiempo. Entonces (16.1) nos dice que

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial K}\dot{K} + \frac{\partial Y}{\partial L}\dot{L} \tag{1}$$

Esto se interpreta diciendo que la producción total crece a la tasa obtenida multiplicando la productividad marginal de cada recurso por la tasa de cambio de ese recurso y sumando estos términos.

Para el caso particular de la función de Cobb–Douglas $F(K, L) = AK^aL^b$ se tiene

$$\dot{Y} = aAK^{a-1}L^b\dot{K} + bAK^aL^{b-1}\dot{L} \tag{2}$$

Dividiendo cada término de (2) por $Y = AK^aL^b$ obtenemos

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = a\frac{\dot{K}}{K} + b\frac{\dot{L}}{L}$$

Por tanto, la tasa relativa de variación de la cantidad producida es combinación lineal de las tasas relativas de variación de capital y trabajo.

Damos ahora un ejemplo típico de una manera en la que los economistas usan (16.1).

Ejemplo 16.4

Designemos por $u(x, z)$ el "bienestar total" de una sociedad, en donde x es un índice de la cantidad total de bienes producidos y consumidos, y z es una medida del nivel de contaminación. Supongamos que $u'_x(x, z) > 0$ y $u'_z(x, z) < 0$ (véase Ejemplo 15.21, Sección 15.6). Supongamos que el nivel de contaminación z es una función creciente $z = h(x)$ de x, es decir $h'(x) > 0$. Así, el bienestar total es una función

$$U(x) = u(x, h(x))$$

de x únicamente. Hallar una condición necesaria para que $U(x)$ tenga un máximo en $x = x^* > 0$, y dar una interpretación económica de esta condición.

Solución: Una condición necesaria para que $U(x)$ tenga un máximo en $x^* > 0$ es que $U'(x^*) = 0$. Para calcular $U'(x)$ usamos la regla de la cadena (16.1):

$$U'(x) = u'_x(x, h(x)) + u'_z(x, h(x))h'(x)$$

Por tanto, $U'(x^*) = 0$ implica que

$$u'_x(x^*, h(x^*)) = -u'_z(x^*, h(x^*))h'(x^*) \qquad (*)$$

Supongamos que incrementamos x^* en una unidad. ¿Cuánto ganamos? Aproximadamente $u'_x(x^*, h(x^*))$ (véase (15.9), Sección 15.3). Por otra parte, un aumento unitario de x^* conlleva uno de $h'(x^*)$ unidades en el nivel de contaminación. Por cada aumento unitario del nivel de contaminación tenemos una pérdida $u'_z(x^*, h(x^*))$ de bienestar, luego en total perdemos $u'_z(x^*, h(x^*))h'(x^*)$ de bienestar por un aumento unitario de x^*. La ecuación $(*)$ dice entonces que el bienestar que se gana por un aumento unitario de x^* es igual a lo que se pierde indirectamente por la contaminación. Esto, lógicamente, es lo que caracteriza una posición óptima.

La regla de la cadena (16.1) tiene muchas implicaciones. En particular, todas las reglas generales de derivación de funciones de una variable no son más que un caso particular de este resultado (véase Problema 4).

Derivadas direccionales

Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales $f'_1(x, y)$ y $f'_2(x, y)$ miden las tasas de variación de $f(x, y)$ en las direcciones del eje x y del eje y respectivamente. Pero también necesitamos tener una medida de la tasa de variación de la función en otras direcciones.

Fijemos un punto (x_0, y_0) en el dominio. Todo vector no nulo (h, k) representa entonces una *dirección* en la que nos alejamos de (x_0, y_0), en línea recta, hacia puntos de la forma

$$(x, y) = (x(t), y(t)) = (x_0 + th, y_0 + tk)$$

Dado el punto (x_0, y_0) y la dirección $(h, k) \neq (0, 0)$, se define la *función direccional* g por

$$g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk) \qquad (1)$$

Ésta es una función de una única variable t, que describe f cuando nos alejamos de (x_0, y_0) en la dirección (h, k) o en la opuesta $(-h, -k)$ (véase Figura 16.1). La derivada de esta función direccional se puede calcular por la regla de la cadena:

$$g'(t) = f'_1(x, y)\frac{dx}{dt} + f'_2(x, y)\frac{dy}{dt} = f'_1(x_0 + th, y_0 + tk)h + f'_2(x_0 + th, y_0 + tk)k \qquad (2)$$

Para $t = 0$ se obtiene

$$g'(0) = f'_1(x_0, y_0)h + f'_2(x_0, y_0)k \qquad (3)$$

Si, en la expresión anterior, el vector (h, k) tiene longitud 1, el miembro de la derecha se llama la *derivada direccional de f en la dirección (h, k) en el punto (x_0, y_0)* y se designa por $D_{h,k}f(x_0, y_0)$. Así tenemos:

Derivadas direccionales

La derivada direccional de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario (h, k) (es decir, $h^2 + k^2 = 1$) es

$$D_{h,k}f(x_0, y_0) = f'_1(x_0, y_0)\, h + f'_2(x_0, y_0)\, k \qquad (16.2)$$

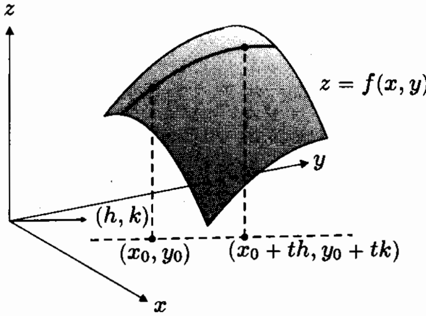


FIGURA 16.1

Nótese que solamente cuando (h, k) es de longitud 1 la derivada direccional de la función tiene la propiedad siguiente: Un alejamiento unitario del punto (x_0, y_0) en la dirección (h, k) produce una variación en f de, aproximadamente $D_{h,k}f(x_0, y_0)$. El vector $(f_1'(x_0, y_0), f_2'(x_0, y_0))$ se llama el **gradiente** de $f(x, y)$ en (x_0, y_0). Así (16.2) dice que la derivada direccional de f en la dirección (h, k) es el producto escalar del gradiente por el vector (h, k).

Calculemos la segunda derivada de la función direccional g. Para ello derivamos (2) con respecto a t y obtenemos

$$g''(t) = \frac{d}{dt}f_1'(x, y)h + \frac{d}{dt}f_2'(x, y)k \tag{4}$$

donde $x = x_0 + th$ e $y = y_0 + tk$. Usando de nuevo la regla de la cadena (16.1) tenemos

$$\frac{d}{dt}f_1'(x, y) = f_{11}''(x, y)\frac{dx}{dt} + f_{12}''(x, y)\frac{dy}{dt} = f_{11}''(x, y)h + f_{12}''(x, y)k$$
$$\frac{d}{dt}f_2'(x, y) = f_{21}''(x, y)\frac{dx}{dt} + f_{22}''(x, y)\frac{dy}{dt} = f_{21}''(x, y)h + f_{22}''(x, y)k$$

Suponiendo que $f_{12}'' = f_{21}''$, y sustituyendo en (4) obtenemos

$$g''(t) = f_{11}''(x, y)h^2 + 2f_{12}''(x, y)hk + f_{22}''(x, y)k^2 \tag{5}$$

donde $x = x_0 + th$ e $y = y_0 + tk$. Poniendo $t = 0$ y suponiendo de nuevo que (h, k) tiene longitud 1, obtenemos la siguiente **derivada direccional segunda**:

$$D_{h,k}^2 f(x_0, y_0) = f_{11}''(x_0, y_0)h^2 + 2f_{12}''(x_0, y_0)hk + f_{22}''(x_0, y_0)k^2 \tag{16.3}$$

Ejemplo 16.5

Sea $f(x, y) = xy$. Calcular las derivadas direccionales primera y segunda de f en (x_0, y_0) en las direcciones: (**a**) $(h, k) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y (**b**) $(h, k) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Solución: Tenemos que

$$f_1'(x, y) = y, \quad f_2'(x, y) = x, \quad f_{11}''(x, y) = 0, \quad f_{12}''(x, y) = f_{21}''(x, y) = 1, \quad f_{22}''(x, y) = 0$$

Así, si $(h, k) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, entonces

$$D_{h,k}f(x_0, y_0) = y_0\frac{1}{\sqrt{2}} + x_0\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + y_0)$$

y

$$D_{h,k}^2 f(x_0, y_0) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

Si $(h,k) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, entonces

$$D_{h,k}f(x_0,y_0) = y_0\frac{1}{\sqrt{2}} + x_0\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_0 - x_0)$$

y

$$D^2_{h,k}f(x_0,y_0) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

Una demostración incompleta de la regla de la cadena

Ninguna de las otras reglas de derivación sirve para probar la regla de la cadena. Así, tenemos que retroceder hasta la definición de derivada. Designemos por $\phi(t)$ a $F(f(t), g(t))$; hay que calcular el límite cuando $\Delta t \to 0$ del cociente de Newton

$$\frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \frac{F(f(t+\Delta t), g(t+\Delta t)) - F(f(t), g(t))}{\Delta t} \tag{1}$$

Como $x = f(t)$ e $y = g(t)$ ponemos $\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$ y $\Delta y = g(t+\Delta t) - g(t)$, luego $f(t+\Delta t) = x + \Delta x$, $g(t+\Delta t) = y + \Delta y$. Sustituyendo las dos últimas expresiones en (1), y sumando y restando $F(x, y+\Delta y)$, obtenemos

$$\frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta t} \tag{2}$$

Supongamos que Δx y Δy son distintos de 0 para todo Δt próximo a 0. Entonces, para todo Δt próximo a 0, unas operaciones simples nos permiten deducir que

$$\begin{aligned}\frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} &= \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &+ \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta t}\end{aligned} \tag{3}$$

Cuando $\Delta t \to 0$, entonces $\Delta x/\Delta t \to dx/dt = f'(t)$ y $\Delta y/\Delta t \to dy/dt = g'(t)$. En particular, $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. En virtud de la definición de derivadas parciales (véase (15.15), Sección 15.5) deducimos que $\big(F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)\big)/\Delta x$ tiende a $F_1'(x, y+\Delta y)$ cuando $\Delta x \to 0$ y que $\big(F(x, y+\Delta y) - F(x,y)\big)/\Delta y$ tiende a $F_2'(x,y)$ as $\Delta y \to 0$. Cuando $\Delta t \to 0$ se tiene que Δx y Δy tienden a 0 y, como F_1' es continua, $F_1'(x, y+\Delta y) \to F_1'(x,y)$.[1] Finalmente, tomando límites cuando $\Delta t \to 0$ se obtiene

$$\phi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = F_1'(x,y)\frac{dx}{dt} + F_2'(x,y)\frac{dy}{dt} \tag{4}$$

lo que prueba el enunciado.

Problemas

1 Hallar dz/dt en los casos siguientes usando la regla de la cadena (16.1):

(a) $F(x,y) = x + y^2, \quad x = t^2, \quad y = t^3.$

(b) $F(x,y) = x\ln y + y\ln x, \quad x = t+1, \quad y = \ln t.$

(c) Comprobar las respuestas sustituyendo x e y por sus valores y derivando posteriormente.

---

[1] Hay un punto sutil aquí que se debe aclarar. Cuando $\Delta t \to 0$ entonces Δx y Δy tienden a 0 los dos juntos. Lo que deberíamos realmente demostrar es que la expresión $[F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)]/\Delta x$ tiende a $F_1'(x,y)$ cuando $\Delta t \to 0$, y no hacer $\Delta x \to 0$ primero y luego hallar el límite cuando $\Delta y \to 0$.

2 Si $z = F(t, y)$ e $y = g(t)$, hallar una fórmula para dz/dt. Considérese en particular el caso en que $z = t^2 + ye^y$ e $y = t^2$.

3 En la situación del Ejemplo 16.3, sea $Y = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$ y supongamos que $K = 0{,}2t + 5$ y $L = 5e^{0{,}1t}$. Hallar dY/dt en $t = 0$.

4 Aplicar la regla de la cadena (16.1) a $F(x, y)$ en cada uno de los casos siguientes:

(a) $x + y$ (b) $x - y$ (c) $x \cdot y$ (d) x/y (e) $G(x)$

Aquí $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $G(x)$ son funciones derivables.

5 Consideremos el Ejemplo 16.4 y sea $u(x, z) = A \ln\left[1 + (x/z)^\alpha\right]$. Sea $z = h(x) = \sqrt[3]{ax^4 + b}$, donde A, α, a, b son constantes positivas. Hallar el nivel óptimo de producción x^* en este caso.

6 Se considera la función dada por

$$F(x, y) = \tfrac{2}{3} \ln x + \tfrac{1}{3} \ln y$$

(a) Hallar su dominio. Dibujar la curva de nivel $F(x, y) = 0$ y decir dónde $F(x, y) > 0$. (Usar que $F(x, y) = \frac{1}{3} \ln(x^2 y)$.)

(b) Hallar dz/dt para $z = F(x, y)$, $x = e^{3t}$ e $y = 1 + e^{-3t}$. Calcular $\lim_{t \to \infty} dz/dt$.

7 Calcular las derivadas direccionales de las funciones siguientes en el punto y dirección indicadas.

(a) $f(x, y) = 2x + y - 1$ en $(2, 1)$, en la dirección de $(1, 1)$.

(b) $g(x, y) = xe^{yx} - xy$ en $(1, 1)$, en la dirección de $(3, 4)$.

Problemas avanzados

8 Sean $z = F(x, y)$, $x = f(t)$ e $y = g(t)$; demostrar que

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

con las hipótesis sobre F, f y g adecuadas.

16.2 GENERALIZACIONES DE LA REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena se generaliza fácilmente a la situación de

$$z = F(x, y), \qquad x = f(t, s), \qquad y = g(t, s)$$

En este caso, z es una función de t y s, de expresión

$$z = F(f(t, s), g(t, s))$$

Tiene pues sentido tratar de calcular las derivadas parciales $\partial z/\partial t$ y $\partial z/\partial s$. Si mantenemos s constante, entonces z es función de t solamente, y podemos por tanto derivar usando la regla de la cadena (16.1). De la misma manera, manteniendo t constante, podemos derivar z con respecto a s usando (16.1). El resultado es el siguiente:

La regla de la cadena

Sea $z = F(x, y)$ con $x = f(t, s)$, $y = g(t, s)$; entonces

$$\text{(a)} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = F_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + F_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$\text{(b)} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = F_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + F_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial s} \tag{16.4}$$

Ejemplo 16.6

Calcular $\partial z/\partial t$ y $\partial z/\partial s$ para $z = F(x, y) = x^2 + 2y^2$, $x = t - s^2$, $y = ts$.

Solución: Tenemos que

$$F_1'(x, y) = 2x, \quad F_2'(x, y) = 4y, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -2s, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = s, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = t$$

Las fórmulas (16.4) (**a**) y (**b**) nos dan:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2x \cdot 1 + 4y \cdot s = 2(t - s^2) + 4tss = 2t - 2s^2 + 4ts^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2x \cdot (-2s) + 4y \cdot t = 2(t - s^2)(-2s) + 4tst = -4ts + 4s^3 + 4t^2s$$

Comprobar las respuestas hallando la expresión de z como función de t y s y derivando posteriormente.

El caso general

Los economistas usan a veces una versión más general de la regla de la cadena. Sea

$$z = F(x_1, \ldots, x_n) \text{ con } x_1 = f_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n = f_n(t_1, \ldots, t_m) \tag{16.5}$$

Sustituyendo en z las expresiones de las x_i como funciones de las t_j se obtiene una **función compuesta** de $t_1, \ldots, t_m$. Una generalización obvia de (16.1) y (16.4) es la siguiente:

La regla general de la cadena

En la situación de (16.5) es

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{16.6}$$

Ésta es una fórmula importante que debe entender todo economista. Un cambio pequeño de la variable básica t_j da origen a una reacción en cadena. Primero cambian todos los x_i cuando lo hace t_j, porque dependen de él. A su vez, z varía. La contribución de la variación de x_i a la derivada total de z con respecto a t_j es $(\partial z/\partial x_i)(\partial x_i/\partial t_j)$. La fórmula (16.6) muestra cómo $\partial z/\partial t_j$ es la suma de todas esas contribuciones.

Nota: Para que se verifique (16.6) hay que hacer ciertas hipótesis sobre las funciones. Las siguientes son suficientes: F es continua con derivadas parciales continuas en un dominio abierto A de $\mathbb{R}^n$ y todas las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tienen derivadas parciales continuas con respecto a $t_1, t_2, \ldots, t_m$ en un dominio B de $\mathbb{R}^m$. Suponemos también que $(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in B \Rightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$.

La fórmula de Leibniz

En la Sección 10.3 aprendimos a derivar integrales con respecto a un parámetro que está en los límites de integración. Se usa mucho en economía una generalización de las fórmulas estudiadas allí, que es la siguiente: [2]

Fórmula de Leibniz

Supongamos que existen las dos derivadas parciales de $f(t,x)$, que $a(t)$ y $b(t)$ son funciones derivables y que

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)\,dx \tag{16.7}$$

La derivada de F está dada por

$$F'(t) = f(t,b(t))b'(t) - f(t,a(t))a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,dx \tag{16.8}$$

Nótese que, cuando t cambia en (16.7), los límites de integración $a(t)$ y $b(t)$ varían, y también varía el integrando $f(t,x)$ para cada x. La fórmula (16.8) describe el efecto total de todos esos cambios sobre la integral.

Argumentamos brevemente sobre las razones de la fórmula de Leibniz. Sea H la función de tres variables dada por:

$$H(t,u,v) = \int_u^v f(t,x)\,dx$$

Poniendo $u = a(t)$ y $v = b(t)$ tenemos $F(t) = H(t,a(t),b(t))$. Por la regla de la cadena para derivar funciones compuestas,

$$F'(t) = H'_t + H'_u a'(t) + H'_v b'(t) \tag{$*$}$$

donde H'_t es la derivada de H con respecto a t cuando u y v se mantienen constantes. Es razonable pensar que se puede derivar parcialmente H con respecto a t derivando bajo el signo integral, con lo que se obtiene $H'_t = \int_u^v f'_t(t,x)\,dx$. Además, según (10.20) y (10.21) en la Sección 10.3, $H'_u = -f(t,u)$ y $H'_v = f(t,v)$. Sustituyendo estos resultados en $(*)$ se obtiene (16.8). Nótese que, si $f(t,x)$ es independiente de t, entonces $\partial f(t,x)/\partial t = 0$, luego (16.8) se reduce a (10.22).[3]

Ejemplo 16.7

Usar (16.8) para calcular $F'(t)$ cuando $F(t) = \int_t^{t^2} \frac{1}{2}x^2 t\,dx$. Comprobar la respuesta calculando primero la integral y luego derivando.

[2] En el libro de Richard Feynman *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (Bantam Books, New York, 1986), el premio Nobel describe vívidamente la utilidad de este resultado para los físicos; es igualmente útil para los economistas.

[3] Un estudio más detallado de la fórmula de Leibniz se puede encontrar en Bartle (1976), Sección 31.

Solución: Tenemos que

$$F'(t) = \frac{1}{2}(t^2)^2 t \cdot 2t - \frac{1}{2}t^2 t \cdot 1 + \int_t^{t^2} \frac{1}{2}x^2\, dx$$
$$= t^6 - \frac{1}{2}t^3 + \Big|_t^{t^2} \frac{1}{6}x^3 = t^6 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}\left[(t^2)^3 - t^3\right] = \frac{7}{6}t^6 - \frac{2}{3}t^3$$

La integral $F(t)$ es fácil de calcular explícitamente:

$$F(t) = \frac{1}{2}t \int_t^{t^2} x^2\, dx = \frac{1}{2}t \Big|_t^{t^2} \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{6}(t^7 - t^4)$$

Derivando se obtiene la misma expresión de $F'(t)$ que antes.

Ejemplo 16.8

Supongamos que una pequeña empresa tiene un beneficio neto de $y(t)$ en el instante $t \in [0, T]$. En el instante $s \in [0, T]$, el valor descontado de los beneficios futuros es

$$V(s, r) = \int_s^T y(t)e^{-r(t-s)}\, dt$$

donde r es la tasa constante de descuento (véase (10.34) de la Sección 10.4). Calcular $V_s'(s, r)$ usando la fórmula de Leibniz.

Solución: Tenemos que

$$V_s'(s, r) = -y(s) + \int_s^T y(t)re^{-r(t-s)}\, dt = -y(s) + rV(s, r) \qquad (*)$$

donde se obtiene la última igualdad sacando la constante r fuera de la integral.

Resolviendo la ecuación $(*)$ en r obtenemos

$$r = \frac{y(s) + V_s'(s, r)}{V(s, r)} \qquad (**)$$

Esto tiene una interpretación importante. En el instante s la empresa gana $y(s)$, y el valor descontado de los beneficios futuros crece a la tasa instantánea de $V_s'(s, r)$. La fracción del miembro de la derecha de $(**)$ se llama la *tasa instantánea proporcional de rendimiento* de la inversión. La ecuación $(**)$ exige que esta razón sea igual a r. En efecto, si r fuera la tasa instantánea proporcional de rendimiento de una inversión relativamente segura, como la deuda pública, y si el miembro de la izquierda de $(**)$ fuera mayor que el de la derecha, sería más rentable para el dueño vender el negocio a su valor $V(s, r)$ en el instante s, y comprar bonos. Pero si fuese menor, sería más rentable para los titulares de los bonos de la deuda pública vender sus bonos y comprar participaciones en empresas de este tipo.

Problemas

1 Usar (16.4) para hallar $\partial z/\partial t$ y $\partial z/\partial s$ en los casos siguientes:

(a) $z = xy^2, \quad x = t + s^2, \quad y = t^2 s$

(b) $z = \dfrac{x - y}{x + y}, \quad x = e^{t+s}, \quad y = e^{ts}$

2 Hallar las expresiones de $\partial z/\partial t_1$ y $\partial z/\partial t_2$ para $z = F(x)$ y $x = f(t_1, t_2)$.

3 (a) Hallar $\partial u/\partial x_i$ para $u = F(U)$ y $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(b) Aplicar el resultado anterior a $F(U) = U^\delta$ y $U = \sum_{j=1}^n A_j x_j^{\alpha_j}$, donde δ, A_j y α_j son constantes, y las variables x_j son todas positivas.

4 (a) Si $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ probar que

$$\text{(i)}\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3 \qquad \text{(ii)}\ (x+y+z)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 3$$

(b) Si $z = f(x^2y)$ probar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

5 (a) Hallar una fórmula para $\partial u/\partial r$ cuando $u = f(x, y, z, w)$ y x, y, z, w son funciones de las dos variables r y t.

(b) Sea $u = xyzw$, $x = r + s$, $y = r - s$, $z = rs$ y $w = r/s$. Calcular $\partial u/\partial r$ evaluada en $(r, s) = (2, 1)$.

6 Hallar $F'(\alpha)$ para $F(\alpha) = \int_0^1 xe^{\alpha x^2}\,dx$ $(\alpha \neq 0)$ usando (16.8). Comprobar la respuesta hallando una expresión explícita de $F(\alpha)$ y derivando después.

7 Hallar $F'(t)$ en los casos siguientes:

$$\text{(a)}\ F(t) = \int_t^{2t} x^2\,dx \qquad \text{(b)}\ F(t) = \int_1^2 \frac{e^{tx}}{x}\,dx \qquad \text{(c)}\ F(t) = \int_t^{2t} \frac{e^{tx}}{x}\,dx$$

8 En un modelo de crecimiento estudiado por N. Kaldor y J. A. Mirrlees, se define la función N por la relación

$$N(t) = \int_{t-T(t)}^{t} n(\tau)e^{-\delta(t-T(t))}\,d\tau$$

donde $T = T(t)$ es una función derivable positiva dada. Calcular $\dot{N}(t)$.

9 Supongamos que f es una función continua y que g es una función derivable. Calcular

$$\frac{d}{d\rho}\int_0^{g(\rho)} e^{-\rho t} f(t)\,dt$$

10 Se define

$$z(t) = \int_t^{2t} x(\tau)\exp\left[-\int_t^{\tau} r(s)\,ds\right] d\tau, \qquad p(t) = \exp\left[-\int_t^{2t} r(s)\,ds\right]$$

donde las funciones $x(\tau)$ y $r(s)$ son derivables. Demostrar que

$$\dot{z}(t) - r(t)z(t) = 2p(t)x(2t) - x(t)$$

11 Sea $\mathbf{x}^0$ un vector de $\mathbb{R}^n$ fijo y $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ una dirección fija en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que la función $f(\mathbf{x})$ tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden en un conjunto abierto que contenga a $\mathbf{x}^0$. Sea $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h})$.

(a) Demostrar que $g'(t) = \sum_{i=1}^n f_i'(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h})h_i$.

(b) Demostrar que $g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}''(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h})h_i h_j$. (Si $\|\mathbf{h}\| = 1$, entonces se llama a $g'(0) = \sum_{i=1}^n f_i'(\mathbf{x}^0)h_i$ la *derivada direccional* de f en $\mathbf{x}^0$ en la dirección $\mathbf{h}$, mientras que se llama a $g''(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}''(\mathbf{x}^0)h_i h_j$ la *derivada direccional segunda.*)

Problemas avanzados

12 Una empresa se enfrenta a una demanda D incierta y tiene un inventario I. Hay costes unitarios distintos por tener demasiadas existencias o demasiado pocas. La empresa desea por tanto elegir el nivel Q de existencias para minimizar la función

$$g(Q) = c(Q - I) + h \int_0^Q (Q - D)f(D)\,dD + p \int_Q^a (D - Q)f(D)\,dD$$

donde c, I, h, p y a son constantes positivas con $p > c$ y f es una función no negativa tal que $\int_0^a f(D)\,dD = 1$ (lo que significa que se puede interpretar como la función de densidad de una distribución de probabilidad).

(a) Calcular $g'(Q)$ y $g''(Q)$, y demostrar que g es convexa.

(b) Sea $F(Q^*) = \int_0^{Q^*} f(D)\,dD$, donde Q^* es el mínimo de $g(Q)$. Usar las condiciones de minimización de g de primer orden para hallar una ecuación de $F(Q^*)$, la probabilidad de que la demanda D no supere a Q^*. Usar esta ecuación para hallar el valor de $F(Q^*)$ cuando Q^* es óptimo.

16.3 DERIVADAS DE FUNCIONES DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE

A menudo necesitamos derivar funciones definidas implícitamente por una ecuación o un sistema de ecuaciones. En la Sección 5.3 hemos considerado algunos casos sencillos; es conveniente repasar esos ejemplos ahora. Aquí estudiamos el problema desde un punto de vista más general. Comenzamos con las técnicas de derivación implícita. Hay que tener en cuenta algunos problemas teóricos importantes, pero los pospondremos hasta el final de la sección.

Sea F una función de dos variables y consideremos la ecuación

$$F(x, y) = c \qquad (c \text{ es constante}) \tag{1}$$

Vemos que (1) representa una curva de nivel de F (véase Sección 15.2). Supongamos que esta ecuación define a y como una función $y = f(x)$ de x en cierto intervalo I (véase Figura 16.2). Esto significa que

$$F(x, f(x)) = c \qquad \text{para todo } x \in I \tag{2}$$

Si f es derivable, ¿cuál es la derivada de $y = f(x)$? Si la gráfica de f es la de la Figura 16.2, el problema geométrico es hallar su pendiente en un punto P.

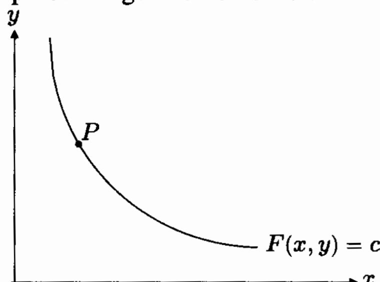


FIGURA 16.2 ¿Cuál es la pendiente en *P*?

Para hallar la expresión de la pendiente se introduce la función auxiliar u definida por $u(x) = F(x, f(x))$ para todo $x \in I$. Entonces $u'(x) = F_1'(x, f(x)) \cdot 1 + F_2'(x, f(x)) \cdot f'(x)$ por la regla de la cadena (16.1). Ahora bien, (2) dice que $u(x) = c$ para todo $x \in I$ y, como la derivada de una constante es cero, tenemos

$$u'(x) = F_1'(x, f(x)) + F_2'(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$$

Si $F_2'(x, f(x)) \neq 0$, entonces $f'(x) = -F_1'(x, f(x))/F_2'(x, f(x))$. Así, después de simplificar la notación, tenemos

$$F(x,y) = c \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)} \qquad (F_2'(x,y) \neq 0) \tag{16.9}$$

Éste es un resultado importante. Nótese que, cuando (1) define a y como función implícita de x, la fórmula (16.9) da la derivada de y con respecto a x, aun cuando sea imposible resolver la ecuación en y.

Ejemplo 16.9

Usar (16.9) para calcular y' cuando $xy^{1/2} = 2$.

Solución: Escribimos $F(x, y) = xy^{1/2}$. Entonces $F_1'(x, y) = y^{1/2}$ y $F_2'(x, y) = \frac{1}{2}xy^{-1/2}$. Por tanto (16.9) da

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)} = -\frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}xy^{-1/2}} = -\frac{2y}{x}$$

Esto confirma el resultado del ejemplo introductorio de la Sección 5.3.

Ejemplo 16.10

Dada la curva de ecuación

$$x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y = 0$$

hallar la pendiente y la ecuación de la tangente en el punto $(x, y) = (2, 1)$.

Solución: Se comprueba primero que $x = 2$ e $y = 1$ satisfacen la ecuación, luego $(2, 1)$ es un punto de la curva. Sea $F(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y$; la ecuación dada es equivalente a $F(x, y) = 0$, que es una curva de nivel de F. Como $F_1'(x, y) = 3x^2 + 2xy$ y $F_2'(x, y) = x^2 - 4y - 10$, (16.9) implica que

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 4y - 10}$$

Para $x = 2$ e $y = 1$ se tiene que $y' = 8/5$. La fórmula punto-pendiente (2.6) de la Sección 2.5 implica que la ecuación de la tangente en $(2, 1)$ es $y - 1 = (8/5)(x - 2)$, o bien $y = (1/5)(8x - 11)$.

Ejemplo 16.11

Supongamos que la ecuación $e^{xy^2} - 2x - 4y = c$ define a y como función derivable $y = f(x)$ de x. Hallar un valor de la constante c que haga $f(0) = 1$ y calcular y' en $(x, y) = (0, 1)$.

Solución: Para $x = 0$ e $y = 1$, la ecuación se tranforma en $1 - 4 = c$, luego $c = -3$. Sea $F(x, y) = e^{xy^2} - 2x - 4y$; entonces $F_1'(x, y) = y^2e^{xy^2} - 2$ y $F_2'(x, y) = 2xye^{xy^2} - 4$. En virtud de (16.9) tenemos

$$y' = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)} = -\frac{y^2e^{xy^2} - 2}{2xye^{xy^2} - 4}$$

Para $x = 0$ e $y = 1$ es $y' = -1/4$. (Nótese que en este ejemplo es imposible resolver $e^{xy^2} - 2x - 4y = -3$ explícitamente en y. Sin embargo hemos hallado una expresión explícita de la derivada de y con respecto a x).

Damos un ejemplo económico importante en el que se usa una función definida implícitamente por una ecuación.

Ejemplo 16.12

Generalizamos el Ejemplo 5.9 de la Sección 5.3 y suponemos que $D = f(t, P)$ es la demanda de un bien que depende del precio P sin impuestos y del IVA unitario, que se designa por t. Supongamos que $S = g(P)$ es la función de oferta. En general el precio de equilibrio $P = P(t)$ depende de t. En efecto, $P = P(t)$ debe verificar la ecuación

$$f(t, P) = g(P) \tag{$*$}$$

para todo t de un cierto intervalo relevante. Supongamos que $(*)$ define a P implícitamente como función derivable de t. Hallar la expresión de dP/dt; estudiar posteriormente su signo.

Solución: Sea $F(t, P) = f(t, P) - g(P)$. La ecuación $(*)$ se convierte en $F(t, P) = 0$, luego la fórmula (16.9) da

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{F_t'(t, P)}{F_P'(t, P)} = -\frac{f_t'(t, P)}{f_P'(t, P) - g'(P)} = \frac{f_t'(t, P)}{g'(P) - f_P'(t, P)} \tag{$**$}$$

Es razonable suponer que $g'(P) > 0$ (lo que significa que la oferta crece si el precio aumenta) y que $f_t'(t, P)$ y $f_P'(t, P)$ son ambas < 0 (lo que significa que la demanda decrece si el IVA o el precio aumentan). Entonces $(**)$ dice que $dP/dt < 0$, lo que implica que el precio sin IVA a que se enfrentan los oferentes decrece cuando aumenta el impuesto. Así, tanto oferentes como consumidores se ven afectados negativamente por una subida de impuestos.

Podemos también deducir la fórmula $(**)$ por derivación implícita de $(*)$ con respecto a t, considerando P como función de t:

$$f_t'(t, P) \cdot 1 + f_P'(t, P)\frac{dP}{dt} = g'(P)\frac{dP}{dt}$$

Resolviendo esta ecuación en dP/dt se obtiene $(**)$ de nuevo.

La ecuación general de la tangente a $F(x,y) = c$

Si el punto P de la Figura 16.3 tiene coordenadas (x_0, y_0), y si $F_2'(x_0, y_0) \neq 0$, entonces la pendiente de la tangente en P viene dada por la expresión $-F_1'(x_0, y_0)/F_2'(x_0, y_0)$. Usando la fórmula punto-pendiente (2.6) de la Sección 2.5, la tangente en P tiene como ecuación

$$y - y_0 = -\left[F_1'(x_0, y_0)/F_2'(x_0, y_0)\right](x - x_0)$$

Esto se puede escribir más simétricamente de la forma

$$F_1'(x_0, y_0)(x - x_0) + F_2'(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \tag{16.10}$$

que tiene la ventaja de ser cierta aun cuando $F_2'(x_0, y_0) = 0$, o sea, que la tangente en P sea vertical.

Ejemplo 16.13

Hallar la tangente a la curva del Ejemplo 16.10 en $(2, 1)$ usando (16.10).

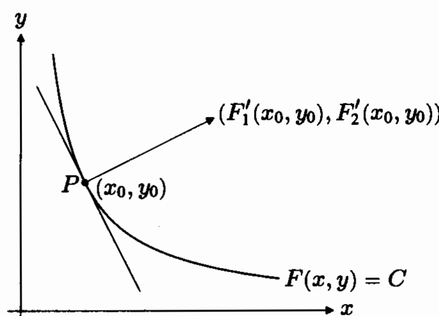


FIGURA 16.3 El gradiente es ortogonal a la tangente en *P*.

Solución: Se tiene que $F_1'(x,y) = 3x^2 + 2xy = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ en $(2,1)$ y $F_2'(x,y) = x^2 - 4y - 10 = 2^2 - 4 \cdot 1 - 10 = -10$ en $(2,1)$. Así, por (16.10),

$$16(x-2) + (-10)(y-1) = 0, \qquad \text{ó} \qquad y = (1/5)(8x - 11)$$

Éste es el mismo resultado que el del Ejemplo 16.10.

El vector $(F_1'(x_0, y_0), F_2'(x_0, y_0))$, que se designa también por $\nabla F(x_0, y_0)$, es el **gradiente** de $F(x,y)$ en (x_0, y_0). Usando la notación del producto escalar, se puede escribir (16.10) en la forma

$$(F_1'(x_0, y_0), F_2'(x_0, y_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0 \qquad (*)$$

Esto prueba que el gradiente es ortogonal a la tangente, como se ve en la Figura 16.3.

Si (h,k) es un vector unitario y $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0,0)$, según (16.2) de la Sección 16.1, el producto escalar $D = \nabla F(x_0, y_0) \cdot (h,k)$ es la derivada direccional de $F(x,y)$ en (x_0, y_0) en la dirección (h,k). Un movimiento unitario a partir de (x_0, y_0) en la dirección (h,k) modifica el valor de $F(x_0, y_0)$ en D aproximadamente. Ahora bien, según (12.19) en la Sección 12.4,

$$D = ||\nabla F(x_0, y_0)|| \cdot ||(h,k)|| \cdot \cos\phi$$

donde ϕ es el ángulo del vector $\nabla F(x_0, y_0)$ con (h,k). Por tanto, D alcanza su valor máximo cuando $\phi = 0$ porque entonces $\cos\phi = 1$.

A este respecto debe recordarse que $\cos\phi$ es siempre menor o igual que 1. Cuando $\phi = 0$, el vector $\nabla F(x_0, y_0)$ apunta en la misma dirección que (h,k). Consiguientemente, $\nabla F(x_0, y_0)$ apunta en la dirección de crecimiento máximo de $F(x,y)$. Tenemos así las siguientes propiedades importantes del gradiente.

Propiedades del gradiente

Si $\nabla F(x,y) \neq (0,0)$, entonces: (16.11)

1. $\nabla F(x,y)$ es ortogonal a la curva de nivel $F(x,y) = C$.
2. $\nabla F(x,y)$ apunta en la dirección de crecimiento máximo de $F(x,y)$.

Nota: Se puede generalizar (16.11). Si $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales, se puede probar que el gradiente $\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial f(\mathbf{x})/\partial x_1, \ldots, \partial f(\mathbf{x})/\partial x_n)$ es ortogonal a la superficie de nivel $f(\mathbf{x}) = C$ y que $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección de crecimiento máximo de $f(\mathbf{x})$.

Una fórmula de la derivada segunda

La fórmula (16.9) da la pendiente de la curva de nivel $F(x, y) = c$. A veces necesitamos saber si esta curva de nivel es convexa o cóncava y, por tanto, necesitamos calcular y''. Por (16.9) se tiene que $y' = -F_1'(x, y)/F_2'(x, y)$. Pongamos $G(x) = F_1'(x, y)$ y $H(x) = F_2'(x, y)$, sin olvidar que y es función implícita de x. Vamos a derivar el cociente

$$y' = -\frac{G(x)}{H(x)}$$

con respecto a x. Por la regla de derivar cocientes tenemos

$$y'' = -\frac{G'(x)H(x) - G(x)H'(x)}{[H(x)]^2} \tag{$*$}$$

Como y es función de x, tanto $G(x)$ como $H(x)$ son funciones compuestas. Al derivarlas como tales por la regla de la cadena (16.1) obtenemos

$$G'(x) = F_{11}''(x, y) \cdot 1 + F_{12}''(x, y) \cdot y'$$
$$H'(x) = F_{21}''(x, y) \cdot 1 + F_{22}''(x, y) \cdot y'$$

Supongamos que $F_{12}'' = F_{21}''$. Sustituyendo y' en las dos ecuaciones anteriores por el cociente (16.9)y llevando los resultados a $(*)$ obtenemos

$$y'' = -\frac{1}{(F_2')^3}\left[F_{11}''(F_2')^2 - 2F_{12}''F_1'F_2' + F_{22}''(F_1')^2\right] \tag{16.12}$$

después de hacer operaciones. Finalmente, haciendo uso de $(**)$ al final de la Sección 15.8, podemos escribir lo anterior de una forma más memorizable, a saber:

$$F(x, y) = c \implies y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(F_2')^3}\begin{vmatrix} 0 & F_1' & F_2' \\ F_1' & F_{11}'' & F_{12}'' \\ F_2' & F_{21}'' & F_{22}'' \end{vmatrix}, \quad \text{siempre que } F_2' \neq 0. \tag{16.13}$$

Ejemplo 16.14

Usar (16.12) para calcular y'' en el caso de $xy^{1/2} = 2$ (véase Ejemplo 16.9 y Ejemplo 5.10 de la Sección 5.3).

Solución: Pongamos $F(x, y) = xy^{1/2}$; entonces $F_1'(x, y) = y^{1/2}$ y $F_2'(x, y) = \frac{1}{2}xy^{-1/2}$. Además, $F_{11}'' = 0$, $F_{12}'' = \frac{1}{2}y^{-1/2}$ y $F_{22}'' = -\frac{1}{4}xy^{-3/2}$. Por (16.12) tenemos

$$y'' = -\frac{1}{(\frac{1}{2}xy^{-1/2})^3}\left[-2(\tfrac{1}{2}y^{-1/2})y^{1/2}(\tfrac{1}{2}xy^{-1/2}) + (-\tfrac{1}{4}xy^{-3/2})(y^{1/2})^2\right]$$

Simplificando obtenemos $y'' = 6y/x^2$, el mismo resultado que obtuvimos más fácilmente en el Ejemplo 5.10 de la Sección 5.3.

Consideraciones teóricas

Hasta ahora hemos estudiado en esta Sección la técnica de la derivación implícita. En particular, *siempre que* $F(x, y) = c$ definía a y como una función derivable de x, hemos podido deducir la

fórmula $y' = -F_1'(x,y)/F_2'(x,y)$. Sin embargo, es muy fácil construir ejemplos en los que esta fórmula no tiene ningún sentido. En particular, consideremos la ecuación

$$x^2 + e^{xy} = 0 \tag{1}$$

Si se pone $F(x,y) = x^2 + e^{xy}$ y $c = 0$, (1) se convierte en la ecuación $F(x,y) = c$. La fórmula (16.9) indica que

$$y' = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)} = -\frac{2x + ye^{xy}}{xe^{xy}} \tag{2}$$

siempre que $F_2'(x,y) = xe^{xy} \neq 0$. Sin embargo, una observación más cuidadosa de (1) revela que el miembro de la izquierda es siempre positivo, luego no hay ningún par (x,y) que satisfaga la ecuación. Así la gráfica de la ecuación es vacía y el "resultado" (2) no tiene sentido.

Aun cuando la curva de nivel $F(x,y) = c$ no sea la gráfica de una función $y = f(x)$, se puede considerar casi siempre como la gráfica compuesta de varias funciones. Se da un ejemplo en la Figura 16.4. La mayoría de las rectas verticales cortan tres veces a la curva de la Figura 16.4, luego la curva no es la gráfica de una función. Sin embargo, la gráfica de la Figura 16.4 consta de tres gráficas ensambladas de tres funciones distintas. La Figura 16.5 muestra la gráfica de la función de "en medio"de estas tres. Además hay una "función de abajo", cuyo rango consta de valores de y más pequeños, y cuya gráfica es la parte de la curva que está abajo y a la derecha de P en la Figura 16.4. Hay una tercera "función de arriba", cuya gráfica es la parte de la curva que está arriba y a la izquierda de Q. El razonamiento que conduce a (16.9) se puede aplicar a cada una de las tres funciones que forman la gráfica. Se puede hallar así la pendiente de la tangente a la curva de nivel de la Figura 16.4 en un punto arbitrario (x,y) de la curva, excepto en los puntos P y Q en los que $F_2'(x,y) = 0$ y, por tanto, el gradiente es paralelo al eje x. La curva tiene tangente vertical en esos puntos.

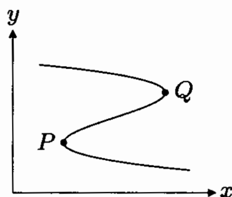


FIGURA 16.4

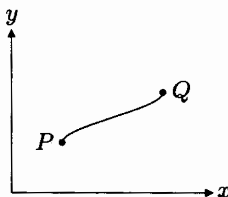


FIGURA 16.5

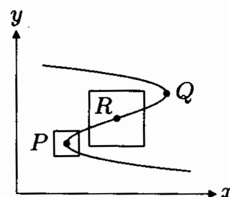


FIGURA 16.6

Es muy difícil hallar condiciones suficientes que deban satisfacer F y c para garantizar que la ecuación $F(x,y) = c$ defina a y como una función derivable de x. Sin embargo, cualquier libro de cálculo avanzado estudia este problema. El resultado esencial es el llamado *teorema de existencia de funciones implícitas* que dice que, si se tiene una ecuación $F(x,y) = c$ con F continuamente diferenciable en un entorno del punto (x_0, y_0) de la curva y si $F_2'(x_0,y_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x,y) = c$ define a y como una función continuamente diferenciable de x en un pequeño rectángulo centrado en (x_0, y_0). Además, la derivada está dada por $y' = -F_1'(x,y)/F_2'(x,y)$.[4]

La condición clave en este teorema es que $F_2'(x_0,y_0) \neq 0$. En la Figura 16.6 vemos que se satisface en el punto R. Por tanto, podemos encontrar un rectángulo con centro R tal que el trozo de curva contenido en ese rectángulo es cortado exactamente una vez por cada recta vertical que corte al rectángulo. Por otra parte, no existe ningún rectángulo con centro P que verifique esta condición

[4] De hecho, si F es continuamente diferenciable n veces, entonces y también es continuamente diferenciable n veces como función de x. En la terminología del final de la Sección 15.5: si F es una función C^n, entonces y, como función de x, es también C^n.

porque, dentro de cualquier rectángulo de este tipo que dibujemos, alguna rectas verticales cortan a la curva en dos puntos al menos y otras en ninguno.

Hemos discutido condiciones para que $F(x, y) = c$ defina a y como función derivable de x. Podríamos también preguntarnos cuáles son las condiciones para que la ecuación defina a x como función derivable de y. Por un argumento obvio de simetría, si se tiene una ecuación $F(x, y) = c$ con F continuamente diferenciable en un entorno del punto (x_0, y_0) de la curva y si $F_1'(x_0, y_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y) = c$ define a x como una función continuamente diferenciable de y en un pequeño intervalo centrado en y_0 y la derivada está dada por $x' = -F_2'(x, y)/F_1'(x, y)$.

Problemas

1 Usar la fórmula (16.9) para hallar y' cuando y está definida implícitamente por $2x^2 + 6xy + y^2 = 18$. Sea $F(x, y) = 2x^2 + 6xy + y^2$ y $c = 18$. Comprobar el resultado del Problema 2, Sección 5.3.

2 Usar las fórmulas (16.9) y (16.12) para hallar y' e y'' en los casos siguientes:

(a) $xy = 1$ (b) $x - y + 3xy = 2$ (c) $y^6 - x^5 = 0$

3 (a) Hallar la pendiente de la curva de nivel $F(x, y) = 0$ donde $F(x, y) = x^2 - y^2$. ¿Qué punto hay que excluir? Dibujar la curva de nivel en el plano xy.

(b) Hallar la pendiente de la curva de nivel $F(x, y) = 0$ donde $F(x, y) = y^3 - x^2$. ¿Qué punto hay que excluir? Dibujar la curva de nivel en el plano xy.

4 Se da una curva en el plano xy por la ecuación

$$2x^2 + xy + y^2 - 8 = 0$$

(a) Hallar la ecuación de la tangente en el punto $(2, 0)$.

(b) ¿Qué puntos de la curva tienen tangente horizontal?

5 Sea f una función con $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para todo $x > 0$.

(a) La ecuación $f(x)/f'(x) - x = t$ define a x implícitamente como función de t. Hallar dx/dt y probar que es > 0.

(b) Demostrar que la elasticidad $\text{El}_t\, f'(x) = -t/(t + x)$.

6 La ecuación $y^2 + 5x = xe^{x(y-2)}$ representa una curva del plano xy. Explicar por qué pasa por el punto $(-1, 2)$ y demostrar que la pendiente de la tangente en este punto es igual a $-4/3$. Hallar también la ecuación de la tangente en ese punto.

Problemas avanzados

7 Una función $U(x, y)$ se llama *separable* en el dominio S si existen funciones F, f y g tales que

$$U(x, y) = F(f(x) + g(y)) \qquad \text{para todo } (x, y) \in S \tag{1}$$

(a) Demostrar que, bajo hipótesis adecuadas para F, f y g, se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\ln \frac{U_x'(x, y)}{U_y'(x, y)}\right] = 0 \qquad \text{para todo } (x, y) \in S \tag{2}$$

(b) Probar que $U(x, y) = Ax^a y^b$ satisface (2) para todo $x > 0$ e $y > 0$ y demostrar luego explícitamente que esta función se puede escribir en la forma (1). (Se puede demostrar que, para ciertas restricciones suaves sobre U, (2) implica (1) en general.)

16.4 ELASTICIDADES PARCIALES

En la Sección 5.6 hemos introducido el concepto de elasticidad para funciones de una variable. Vamos a estudiar aquí el concepto correspondiente para funciones de varias variables. Esto nos va a permitir distinguir, por ejemplo, entre las elasticidades de la demanda con respecto al precio y a la renta, y también entre elasticidades propias y cruzadas.

Sea $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$; definimos la **elasticidad parcial** de z (ó de f) con respecto a x_i como la elasticidad de z con respecto a x_i cuando las demás variables se consideran constantes. En otras palabras

$$\mathrm{El}_i\, z = \frac{x_i}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{z} \frac{\partial z}{\partial x_i} \tag{16.14}$$

El número $\mathrm{El}_i\, z$ es aproximadamente igual a la variación porcentual de z producida por un aumento del 1% en x_i, mientras las otras x_j, $(j \neq i)$ permanecen constantes (véase Sección 5.6). Hay otras notaciones para las elasticidades, que se usan comúnmente en lugar de $\mathrm{El}_i\, z$, entre las que mencionamos

$$\mathrm{El}_i\, f(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad \mathrm{El}_{x_i}\, z, \qquad \hat{z}_i, \qquad \text{y} \qquad e_i \text{ ó } \epsilon_i$$

Ejemplo 16.15

Hallar la elasticidad de $z = xye^{x+y}$ con respecto a x (donde x e y son positivos).

Solución: Si no se han estudiado las reglas del Problema 7 de la Sección 5.6 para las elasticidades podemos razonar así: Tomando el logaritmo natural de ambos lados obtenemos $\ln z = \ln x + \ln y + \ln e^{x+y} = \ln x + \ln y + x + y$. Derivando parcialmente esta ecuación con respecto a x obtenemos $z'_x/z = 1/x + 1$. Por tanto,

$$\mathrm{El}_x\, z = \frac{x}{z} z'_x = x \frac{z'_x}{z} = x \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 1 + x$$

Ejemplo 16.16

Sea $D_1 = D_1(p, q)$ la demanda de un producto como función de los precios p y q. Entonces, como en el Ejemplo 16.2,

$$\frac{dD_1}{dt} = \frac{\partial D_1(p,q)}{\partial p} \dot{p}(t) + \frac{\partial D_1(p,q)}{\partial q} \dot{q}(t)$$

Se deduce que

$$\frac{1}{D_1} \frac{dD_1}{dt} = \frac{p}{D_1} \frac{\partial D_1}{\partial p} \frac{\dot{p}}{p} + \frac{q}{D_1} \frac{\partial D_1}{\partial q} \frac{\dot{q}}{q} = \mathrm{El}_p\, D_1 \frac{\dot{p}}{p} + \mathrm{El}_q\, D_1 \frac{\dot{q}}{q}$$

Así la tasa de crecimiento de la demanda es la suma de las tasas proporcionales de crecimiento de los precios multiplicadas por las elasticidades.

Ejemplo 16.17

Sea $D = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ una función de demanda, con $A > 0$, a_1, a_2, ..., a_n constantes y $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_n > 0$. Calcular la elasticidad de D con respecto a x_1 y x_i.

Solución: Tomando el logaritmo natural de ambos lados obtenemos

$$\ln D = \ln A + a_1 \ln x_1 + \cdots + a_n \ln x_n$$

Derivando con respecto a x_1 se tiene

$$\frac{D'_1}{D} = \frac{a_1}{x_1}, \qquad \text{luego} \qquad \mathrm{El}_1 D = \frac{x_1 D'_1}{D} = a_1$$

De manera análoga, $\text{El}_i\, D = a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Como un caso particular del Ejemplo 16.17, sea $D_i = Am^{\alpha} p_i^{-\beta} p_j^{\gamma}$, donde m representa la renta, p_i es el precio propio y p_j es el precio de un bien sustitutivo. Entonces α es la elasticidad de la demanda con respecto a la renta, $-\beta$ es la elasticidad con respecto al precio propio y γ con respecto al precio del bien sustitutivo (precio cruzado). Sin embargo, como las elasticidades de la demanda con respecto al precio propio son usualmente negativas, se dice a menudo que β es esta elasticidad, mejor que $-\beta$. Normalmente no hay lugar a confusión, excepto entre los estudiantes de economía que luchan para entender la noción de elasticidad.

Elasticidades de funciones compuestas

En las Secciones 16.1 y 16.2 estudiamos las derivadas de las funciones compuestas. Ahora vamos a ver cómo hallar sus elasticidades. Consideramos directamente el caso general y enunciamos el resultado siguiente, que es válido bajo hipótesis adecuadas sobre las funciones:

$$z = F(x_1, \ldots, x_n), \quad x_i = f_i(t_1, \ldots, t_m), \quad i = 1, \ldots, n$$
$$\Longrightarrow \text{El}_{t_j}\, z = \sum_{i=1}^{n} \text{El}_i\, F(x_1, \ldots, x_n)\, \text{El}_j\, x_i \tag{16.15}$$

Es decir, designamos por F a la función principal, por $x_1, \ldots, x_n$ a las variables intermedias y por $t_1, \ldots, t_m$ a las variables básicas. La fórmula (16.15) nos dice cómo hallar las elasticidades de la variable dependiente z con respecto a las variables básicas, en términos de las elasticidades de la función principal con respecto a las variables intermedias y de las elasticidades de éstas con respecto a las básicas. Se sugiere al lector que formule el resultado en su propio lenguaje.

La demostración de (16.15) se deduce directamente de las reglas de derivación, esto es, la regla de la cadena (16.6) de la Sección 16.2. En efecto, supongamos que z y $x_1, \ldots, x_n$ no son todas cero. Si multiplicamos cada miembro de la ecuación (16.6) por t_j/z obtenemos

$$\frac{t_j}{z}\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{t_j}{z}\sum_{i=1}^{n} F_i'(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{z} F_i'(x_1, \ldots, x_n)\frac{t_j}{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

Nótese que hemos usado un pequeño artificio para deducir la última igualdad. Vamos a ver inmediatamente que (16.15) debe ser cierta.

Ejemplo 16.18

Aukrust y Bjerke han calculado que el crecimiento del producto nacional neto de Noruega viene dado por la función de producción

$$Y(t) = 2{,}262[K(t)]^{0{,}203}[L(t)]^{0{,}763}e^{0{,}0181t} \tag{1}$$

Como siempre, $Y(t)$, $K(t)$ $L(t)$ designan, respectivamente, el producto nacional neto, el stock real de capital y el trabajo usado en el año t. El factor $e^{0{,}0181t}$ se debe al "progreso tecnológico". Hallar la expresión de la elasticidad de Y con respecto a t.

Solución: Para calcular $\text{El}_t\, Y(t)$, expresamos la función de producción en la forma

$$Y = 2{,}262K^{0{,}203}L^{0{,}763}T \qquad \text{con } K = K(t),\ L = L(t),\ T = e^{0{,}0181t}$$

Por (16.15) y las reglas para calcular elasticidades (véase Problema 7 de la Sección 5.6), tenemos

$$\text{El}_t\, Y(t) = 0{,}203\, \text{El}_t\, K(t) + 0{,}763\, \text{El}_t\, L(t) + 0{,}0181t$$

La elasticidad de sustitución

Consideremos una curva de nivel $F(x, y) = c$ de una función F de dos variables. En la Sección 16.1 hemos hallado la pendiente de la curva de nivel, que es $y' = -F_1'(x, y)/F_2'(x, y)$. Los economistas designan a menudo por R_{yx} a $-y'$ y le dan a esta fracción un nombre especial:

> La **tasa marginal de sustitución** entre y y x es
>
> $$R_{yx} = \frac{F_1'(x, y)}{F_2'(x, y)} \tag{16.16}$$

Nótese que $R_{yx} \approx -\Delta y/\Delta x$ cuando nos movemos sobre la curva de nivel $F(x, y) = c$. Si $\Delta x = -1$ en particular, entonces $R_{yx} \approx \Delta y$. Así R_{yx} es aproximadamente la cantidad de y que hay que añadir por unidad de x que se quita, siempre que permanezcamos en la misma curva de nivel.

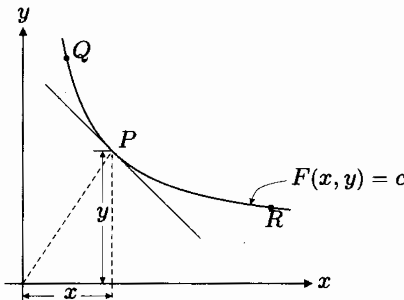


FIGURA 16.7

Consideremos la Figura 16.7. El número R_{yx} varía a lo largo de la curva de nivel $F(x, y) = c$. En el punto Q, la pendiente de la tangente es un número negativo grande y así R_{yx} es un número positivo grande. En P, el número R_{yx} vale aproximadamente 1,5 y en R vale aproximadamente 0,5. Cuando nos movemos sobre la curva de nivel de izquierda a derecha, R_{yx} será estrictamente decreciente con valores en un cierto intervalo positivo I. A cada valor de R_{yx} en I le corresponde cierto punto (x, y) de la curva de nivel $F(x, y) = c$, y así un cierto valor de y/x. La fracción y/x es por tanto función de R_{yx} y definimos:

> Para $F(x, y) = c$, la **elasticidad de sustitución** entre y y x es
>
> $$\sigma_{yx} = \text{El}_{R_{yx}}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{16.17}$$

En otras palabras, σ_{yx} es la elasticidad de la fracción y/x con respecto a la tasa marginal de sustitución. Hablando grosso modo, σ_{yx} es la variación porcentual de la fracción y/x cuando nos movemos lo suficiente sobre la curva de nivel $F(x, y) = c$ para que R_{yx} crezca en un 1%. En el Problema 10, se expresará la elasticidad de sustitución en términos de las parciales de la función F.

Ejemplo 16.19

Hallar σ_{KL} para la función de Cobb–Douglas $F(K, L) = AK^a L^b$.

Solución: La tasa marginal de sustitución entre K y L es

$$R_{KL} = \frac{F'_L}{F'_K} = \frac{bAK^a L^{b-1}}{aAK^{a-1}L^b} = \frac{b}{a}\frac{K}{L}$$

Así, $K/L = (a/b)R_{KL}$. La elasticidad de la última expresión con respecto a R_{KL} es 1. Por tanto, $\sigma_{KL} = 1$ para la función de Cobb–Douglas.

Ejemplo 16.20

Calcular la elasticidad de sustitución para

$$F(K, L) = A\left(aK^{-\varrho} + bL^{-\varrho}\right)^{-m/\varrho} \tag{1}$$

donde A, a y b son constantes positivas y $\varrho \neq 0$, $\varrho > -1$.

Solución: Se tiene

$$F'_K = A(-m/\varrho)\left(aK^{-\varrho} + bL^{-\varrho}\right)^{(-m/\varrho)-1} a(-\varrho)K^{-\varrho-1}$$
$$F'_L = A(-m/\varrho)\left(aK^{-\varrho} + bL^{-\varrho}\right)^{(-m/\varrho)-1} b(-\varrho)L^{-\varrho-1}$$

Por tanto,

$$R_{KL} = \frac{F'_L}{F'_K} = \frac{b}{a}\frac{L^{-\varrho-1}}{K^{-\varrho-1}} = \frac{b}{a}\left(\frac{K}{L}\right)^{\varrho+1}$$

luego

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/(\varrho+1)} (R_{KL})^{1/(\varrho+1)}$$

Recordando que la elasticidad de Ax^b con respecto a x es b, la definición (16.17) implica que

$$\sigma_{KL} = \mathrm{El}_{R_{KL}}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{1}{\varrho + 1} \tag{2}$$

Hemos demostrado así que la función F definida por (1) tiene elasticidad de sustitución constante igual a $1/(\varrho + 1)$. Por esta razón F se llama una **función CES**, donde CES viene de las inciales en inglés de "elasticidad de sustitución constante".

Nótese en (2) que la elasticidad de sustitución de la función CES tiende a 1 cuando $\varrho \to 0$, y ésta es precisamente la elasticidad de sustitución de la función de Cobb–Douglas del ejemplo anterior. Véase Problema 11 para mayor detalle.

Problemas

1 Hallar las elasticidades parciales de z con respecto a x e y en los casos siguientes:

(a) $z = xy$ (b) $z = x^2y^5$ (c) $z = x^n e^x y^n e^y$ (d) $z = x + y$

2 Sea $z = (a_1x_1^d + a_2x_2^d + a_3x_3^d)^g$ donde a_1, a_2, a_3, d y g son constantes. Hallar $\mathrm{El}_1\, z + \mathrm{El}_2\, z + \mathrm{El}_3\, z$.

3 Sea $z = x_1^p \cdots x_n^p \exp(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$, donde $a_1, \ldots, a_n$ y p son constantes. Hallar las elasticidades parciales de z con respecto a $x_1, \ldots, x_n$.

4 Hallar la elasticidad de z con respecto a t en los casos siguientes:

(a) $z = x^{20}y^{30}$, $x = t + 1$ y $y = (t+1)^2$

(b) $z = x^2 + y^2$, $x = \ln t$ y $y = e^{-t}t^2$

5 Si $y/x = \ln(xy)$, hallar la elasticidad de y con respecto a x.

6 El siguiente sistema de ecuaciones define a y y z como funciones derivables de x:

$$z = e^{ax+by}, \qquad x^a y^b z^c = 1$$

En él, a, b y c son constantes positivas. Hallar las elasticidades de y y z con respecto a x.

7 (a) Hallar la tasa marginal de sustitución entre y y x para

$$F(x,y) = x^a + y^a \qquad (a \text{ es una constante} \neq 0 \text{ y } 1)$$

(b) Calcular la elasticidad de sustitución entre y y x.

8 J. W. Kendrick y R. Sato estudiaron la función de producción

$$Y = A_0 e^{0{,}021t} \frac{KL}{(aL^{2/3} + bK^{2/3})^{3/2}}$$

donde A_0, a y b son constantes positivas. Hallar la elasticidad de sustitución σ_{KL} entre K y L.

Problemas avanzados

9 M. Brown y J. S. De Cani, en un artículo sobre progreso tecnológico y distribución de la renta, usan la función de producción

$$F(K,N) = \gamma_1 \left(\frac{N^\alpha K^\alpha}{N^\alpha + \gamma_2 K^\alpha} \right)^{v/\alpha}$$

donde α, v, γ_1 y γ_2 son constantes positivas. Calcular σ_{KN}.

10 La elasticidad de sustitución definida en (16.17) se puede expresar en términos de las derivadas parciales de la función F en la forma

$$\sigma_{yx} = \frac{-F_1'F_2'(xF_1' + yF_2')}{xy[(F_2')^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + (F_1')^2F_{22}'']}$$

Usar esta fórmula para deducir el resultado del Ejemplo 16.19.

11 Sea la función $F(K,L) = A(aK^{-\varrho} + bL^{-\varrho})^{-1/\varrho}$ con $b = 1 - a$. Aplicar la regla de l'Hôpital a $z = \ln[F(K,L)/A]$ probando que, cuando $\varrho \to 0$, la función CES $A[aK^{-\varrho} + (1-a)L^{-\varrho}]^{-1/\varrho}$ tiende a la función de Cobb–Douglas AK^aL^{1-a}.

16.5 FUNCIONES HOMOGÉNEAS DE DOS VARIABLES

Una clase de funciones especialmente importantes en economía es la de las funciones homogéneas. Una función f de dos variables x e y definida en un dominio D se llama **homogénea de grado k** si, para todo $(x,y) \in D$

$$f(tx, ty) = t^k f(x,y) \qquad \text{para todo } t > 0 \tag{16.18}$$

En palabras: el multiplicar las variables por un factor positivo t implicará que el valor de la función se multiplicará por el factor t^k. En esta sección se supondrá siempre que, si $(x, y) \in D$, entonces (tx, ty) pertenece a D para todo $t > 0$.

El grado de homogeneidad de una función puede ser un número arbitrario, positivo, cero, o negativo. Anteriormente hemos estudiado varias funciones homogéneas particulares. En el Ejemplo 15.4 de la Sección 15.1 vimos que la función

$$F(S, E) = 2{,}26S^{0{,}44}E^{0{,}48} \quad \text{es homogénea de grado } 0{,}44 + 0{,}48 = 0{,}92$$

Más generalmente, la función F de Cobb–Douglas definida por

$$F(x, y) = Ax^a y^b \quad \text{es homogénea de grado } a + b$$

Ejemplo 16.21

Probar que la siguiente función, definida para todo x e y, es homogénea de grado 3:

$$f(x, y) = 3x^2y - y^3$$

Solución: Si sustituimos x por tx e y por ty en la fórmula de $f(x, y)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 3(tx)^2(ty) - (ty)^3 = 3t^2x^2ty - t^3y^3 = t^3(3x^2y - y^3) \\ &= t^3 f(x, y) \end{aligned}$$

Esto prueba que f es homogénea de grado 3. Si $t = 2$, entonces $f(2x, 2y) = 2^3 f(x, y) = 8f(x, y)$. En palabras: si se duplican x e y, el valor de la función queda multiplicado por 8.

Nótese que la suma de los exponentes de cada término del polinomio del Ejemplo 16.21 es igual a 3. En general, un polinomio es homogéneo de grado k si y sólo si la suma de los exponentes de cada término es k. Otros tipos de polinomios como $f(x, y) = x^3 + xy$ no son homogéneos (véase Problema 5).

Vamos a dar unas cuantas propiedades importantes de las funciones homogéneas de dos variables que son de interés en aplicaciones económicas. La primera es el **teorema de Euler**, que dice que

$$f(x, y) \text{ es homogénea de grado } k \iff x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = kf(x, y) \tag{16.19}$$

Es fácil probar que, si f es homogénea de grado k, entonces se verifica la ecuación de la derecha de (16.19). En efecto, derivando en (16.18) con respecto a t y usando la regla de la cadena para derivar el miembro de la izquierda, se obtiene

$$xf_1'(tx, ty) + yf_2'(tx, ty) = kt^{k-1}f(x, y)$$

Haciendo $t = 1$ tenemos $xf_1'(x, y) + yf_2'(x, y) = kf(x, y)$ inmediatamente. El Teorema 16.1 de la sección siguiente demuestra el recíproco y da la generalización a n variables.

El teorema de Euler dice que una función $z = f(x, y)$ es homogénea de grado k si y sólo si la expresión $xz_x' + yz_y'$ es igual a kz. Por ejemplo, el Problema 5 de la Sección 15.3 pedía demostrar que, si $z = (ax + by)^2$, entonces $xz_x' + yz_y' = 2z$. En virtud de (16.19) deducimos entonces que z es una función de x e y homogénea de grado 2. La definición (16.18) lo confirma.

Observamos otras tres propiedades interesantes de una función $f(x, y)$ homogénea de grado k:

$$f_1'(x, y) \text{ y } f_2'(x, y) \text{ son homogéneas de grado } k - 1 \tag{16.20}$$

$$f(x, y) = x^k f(1, y/x) = y^k f(x/y, 1) \quad (\text{para } x > 0,\ y > 0) \tag{16.21}$$

$$x^2 f_{11}''(x, y) + 2xy f_{12}''(x, y) + y^2 f_{22}''(x, y) = k(k-1) f(x, y) \tag{16.22}$$

Para probar (16.20) derivamos (16.18) parcialmente con respecto a x manteniendo t e y constantes. Así se obtiene $t f_1'(tx, ty) = t^k f_1'(x, y)$, luego $f_1'(tx, ty) = t^{k-1} f_1'(x, y)$, lo que prueba que $f_1'(x, y)$ es homogénea de grado $k - 1$. El mismo razonamiento demuestra que $f_2'(x, y)$ es homogénea de grado $k - 1$.

Se demuestran las dos igualdades (16.21) sustituyendo t por $1/x$ y por $1/y$, respectivamente, en (16.18).

Finalmente, para probar (16.22) (suponiendo que $f(x, y)$ es una función C^2), notamos primero que, puesto que $f_1'(x, y)$ y $f_2'(x, y)$ son homogéneas de grado $k - 1$, se puede aplicar el teorema de Euler a f_1' y f_2'. Entonces

$$\begin{aligned} x f_{11}''(x, y) + y f_{12}''(x, y) &= (k-1) f_1'(x, y) \\ x f_{21}''(x, y) + y f_{22}''(x, y) &= (k-1) f_2'(x, y) \end{aligned} \tag{$*$}$$

Se multiplica ahora la primera de esas ecuaciones por x, la segunda por y, y se suman los resultados. Como f es una función C^2, $f_{12}'' = f_{21}''$, luego el resultado es

$$x^2 f_{11}''(x, y) + 2xy f_{12}''(x, y) + y^2 f_{22}''(x, y) = (k-1)\left[x f_1'(x, y) + y f_2'(x, y)\right]$$

Por el teorema de Euler es $x f_1'(x, y) + y f_2'(x, y) = k f(x, y)$. Esto prueba (16.22).

Ejemplo 16.22

Comprobar que se verifican (16.19) a (16.22) para $f(x, y) = 3x^2 y - y^3$.

Solución: Tenemos que

$$f_1'(x, y) = 6xy \qquad \text{y} \qquad f_2'(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \tag{1}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} x f_1'(x, y) + y f_2'(x, y) &= 6x^2 y + 3x^2 y - 3y^3 = 3(3x^2 y - y^3) \\ &= 3 f(x, y) \end{aligned}$$

En el Ejemplo 16.21 vimos que f es homogénea de grado 3, luego esto confirma (16.19).

De (1) se deduce que f_1' y f_2' son homogéneas de grado 2, lo que confirma (16.20). En relación a (16.21), en este caso toma la forma

$$3x^2 y - y^3 = x^3\left[3(y/x) - (y/x)^3\right] = y^3\left[3(x/y)^2 - 1\right]$$

Finalmente, para demostrar (16.22) calculamos primero las derivadas parciales segundas:

$$f_{11}''(x, y) = 6y, \qquad f_{12}''(x, y) = 6x, \qquad f_{22}''(x, y) = -6y$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} x^2 f_{11}''(x, y) + 2xy f_{12}''(x, y) + y^2 f_{22}''(x, y) &= 6x^2 y + 12x^2 y - 6y^3 = 6(3x^2 y - y^3) \\ &= 3 \cdot 2 f(x, y) \end{aligned}$$

lo que confirma también (16.22).

Aspectos geométricos de las funciones homogéneas

Las funciones homogéneas de dos variables tienen propiedades geométricas interesantes. Sea $f(x, y)$ una función homogénea de grado k. Consideremos un rayo en el plano xy, que es el conjunto de los puntos de la forma (tx_0, ty_0), $t \geq 0$, donde $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ es un punto dado. Por tanto, un rayo parte del origen de coordenadas y queda unívocamente determinado por el punto (x_0, y_0). Consideremos el rayo del plano xy que pasa por el punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$; la porción de la gráfica de f que está sobre él es la curva $z = t^k c$, donde t mide la distancia al origen a lo largo del rayo y $c = f(x_0, y_0)$. Una función homogénea de grado k está pues unívocamente determinada si se conoce su valor en un punto de cada rayo (véase Figura 16.8). En particular, supongamos que $k = 1$, o sea que $f(x, y)$ es homogénea de grado 1. La curva $z = t^k c$ que yace verticalmente sobre cada rayo relevante es entonces la recta $z = tc$. Por esto, se dice a menudo que *la gráfica de una función homogénea de grado 1 está generada por rectas que pasan por el origen.* La Figura 16.9 describe una de estas gráficas.

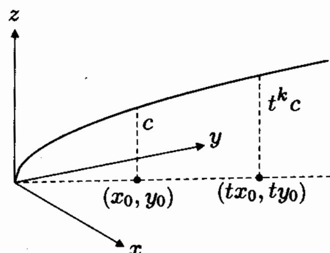


FIGURA 16.8

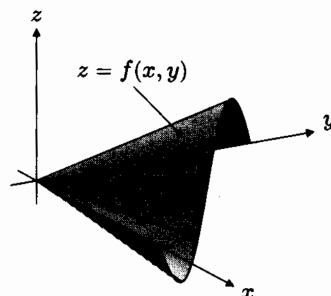


FIGURA 16.9 ***f* es homogénea de grado 1**

Hemos visto que es a menudo conveniente considerar las curvas de nivel de una función $f(x, y)$ de dos variables en lugar de su gráfica. ¿Qué podemos decir de las curvas de nivel de una función homogénea? Lo que ocurre es que *el conocimiento de una curva de nivel particular de una función homogénea determina el de las restantes.*

Para probar esto consideremos una función $f(x, y)$ homogénea de grado k y sea $f(x, y) = c$ una de sus curvas de nivel, como se muestra en la Figura 16.10. Vamos a explicar cómo construir la curva de nivel que pasa por un punto A arbitrario que no pertenezca a $f(x, y) = c$. Primero se traza el rayo que une el origen con el punto A. Este rayo corta a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en un punto (x_1, y_1). Las coordenadas de A serán de la forma (tx_1, ty_1) para un cierto t. En la figura, $t \approx 2$.

Para construir otro punto cualquiera sobre la misma curva de nivel que A, se dibuja otro rayo que una al origen con el punto (x_2, y_2) de $f(x, y) = c$. Ahora se usa el valor de t hallado anteriormente para determinar el punto B de coordenadas (tx_2, ty_2). Este punto B está en la misma curva de nivel que A porque $f(tx_2, ty_2) = t^k f(x_2, y_2) = t^k c = t^k f(x_1, y_1) = f(tx_1, ty_1)$. Repitiendo esta construcción para otros rayos que corten a la curva de nivel $f(x, y) = c$, podemos hallar cuantos puntos deseemos sobre la nueva curva de nivel.

El razonamiento anterior prueba que, si $f(x, y)$ es homogénea, entonces la forma de la función está determinada por cualquiera de sus curvas de nivel y por el grado de homogeneidad de la función. La forma de cada curva de nivel de una función homogénea está a menudo determinada por su elasticidad de sustitución, en el sentido de (16.17).

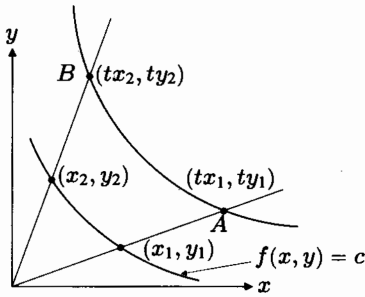


FIGURA 16.10

Problemas

1 Probar que $f(x, y) = x^4 + x^2y^2$ es homogénea de grado 4 usando (16.18).

2 Hallar el grado de homogeneidad de $x(p, r) = Ap^{-1,5}r^{2,08}$.

3 Probar que $f(x, y) = xy^2 + x^3$ es homogénea de grado 3. Comprobar que las cuatro propiedades (16.19) a (16.22) se verifican en este caso.

4 Averiguar si la función $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ es homogénea y comprobar para ella el teorema de Euler en caso afirmativo.

5 Probar que $f(x, y) = x^3 + xy$ no es homogénea. (*Indicación:* Sea $x = y = 1$. Aplicar (16.18) para $t = 2$ y $t = 4$ para obtener un contradicción).

6 Si $g(x, y)$ es homogénea de grado 1, probar que $f(x, y) = a \ln[g(x, y)/x]$ es homogénea de grado 0.

7 Usar (*) en la demostración de (16.22) para probar que, si $f(x, y)$ es homogénea de grado 1 para $x > 0$ e $y > 0$, entonces $f''_{11}(x, y)f''_{22}(x, y) - [f''_{12}(x, y)]^2 \equiv 0$.

8 Si F es una función de una variable que es homogénea de grado $k \neq 0$ y si existe F^{-1}, demostrar que F^{-1} es homogénea de grado $1/k$. Comprobar el resultado aplicándolo a $F(x) = \sqrt{x}$.

16.6 FUNCIONES HOMOGÉNEAS GENERALES Y FUNCIONES HOMOTÉTICAS

Sea f una función de n variables definida en un dominio D. Supongamos que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ y $t > 0$ implican que $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \in D$. Un conjunto D con esta propiedad se llama un **cono**. Decimos que f es **homogénea de grado** k en D si

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{(para todo } t > 0) \qquad (16.23)$$

La constante k puede ser cualquier número: positivo, cero o negativo.

Ejemplo 16.23

Averiguar si es homogénea la función

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

Solución: Vemos que f es homogénea de grado -1 porque

$$f(tx_1, tx_2, tx_3, tx_4) = \frac{tx_1 + 2tx_2 + 3tx_3 + 4tx_4}{(tx_1)^2 + (tx_2)^2 + (tx_3)^2 + (tx_4)^2} = \frac{t(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4)}{t^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)}$$
$$= t^{-1} f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Se puede generalizar el teorema de Euler a funciones de n variables:

Teorema 16.1 (Teorema de Euler)

Sea f una función de n variables con derivadas parciales continuas en un dominio abierto D tal que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ y $t > 0$ implican $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \in D$. Entonces f es homogénea de grado k en D si y sólo si se verifica la siguiente ecuación para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{16.24}$$

Demostración: Supongamos que f es homogénea de grado k; entonces se verifica (16.23). Derivando esta ecuación con respecto a t, dejando fijos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i'(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = kt^{k-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Poniendo $t = 1$ se obtiene (16.24).

Para demostrar la recíproca, supongamos que (16.24) es cierta para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$. Dejemos fijo $\mathbf{x}$ y definamos la función g por

$$g(t) = t^{-k} f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

para todo $t > 0$. Derivando con respecto a t obtenemos

$$g'(t) = -kt^{-k-1} f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) + t^{-k} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i'(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \tag{2}$$

Como $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ está en D, se debe verificar (16.24) cuando se sustituye cada x_i por tx_i. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} (tx_i) f_i'(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = k f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$$

Aplicando esto al último término de (2) se deduce que, para todo $t > 0$,

$$g'(t) = -kt^{-k-1} f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) + t^{-k-1} k f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = 0$$

Se deduce que $g(t)$ debe ser una constante C. Como, evidentemente, $g(1) = 0$, luego $C = 0$, y así $g(t) \equiv 0$. Por la definición (1) de g, es

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Así f es homogénea de grado k.

Los resultados (16.20) a (16.22) se pueden generalizar también a funciones de n variables. Las demostraciones son semejantes a las de la Sección 16.5 y las dejamos al lector.

Así si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado k, entonces, con hipótesis adecuadas para f:

$$f'_i(x_1, \ldots, x_n) \text{ es homogénea de grado } k-1 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{16.25}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1)^k f(1, x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1) = \ldots \\ \ldots &= (x_n)^k f(x_1/x_n, \ldots, x_{n-1}/x_n, 1) \end{aligned} \tag{16.26}$$

siempre que $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$;

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j f''_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k(k-1) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{16.27}$$

Se obtiene una versión interesante de la ecuación de Euler (16.24) dividiendo cada término de ella por $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, siempre y cuando este número no sea 0. Recordando la definición (16.14) de elasticidad parcial tenemos

$$\mathrm{El}_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mathrm{El}_2\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \cdots + \mathrm{El}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k \tag{16.28}$$

Así, la suma de las elasticidades parciales de una función de n variables homogénea de grado k es igual a k.

Aplicaciones económicas

Consideremos algunos ejemplos típicos de funciones homogéneas en economía.

Ejemplo 16.24

Sea $f(v_1, \ldots, v_n)$ el output de cierto proceso de producción en función de las cantidades v_1, $\ldots$, v_n de inputs empleados en él. Normalmente se supone que, si las cantidades $v_1, \ldots, v_n$ se multiplican por un factor t, el output queda también multiplicado por t. En símbolos:

$$f(tv_1, \ldots, tv_n) = tf(v_1, \ldots, v_n) \qquad \text{(para todo } t > 0\text{)}$$

Esto implica que f es homogénea de grado 1. Se dice que las funciones de producción que tienen esta propiedad dan *rendimientos constantes a escala*. Una función de producción homogénea de grado $k < 1$ tiene *rendimientos decrecientes a escala*, mientras que tiene *rendimientos crecientes a escala* si $k > 1$.

La función general de Cobb–Douglas $F(v_1, \ldots, v_n) = Av_1^{a_1} \cdots v_n^{a_n}$ (véase (15.5) en la Sección 15.1) se usa a menudo como ejemplo de función de producción. Se deja como ejercicio al lector el probar que es homogénea, y estudiar cuándo tiene rendimientos constantes/decrecientes/crecientes a escala.

Ejemplo 16.25

En un mercado con tres bienes cuyos precios unitarios son p, q r, supongamos que la demanda de uno de ellos por un consumidor con renta m viene dada por $x(p, q, r, m)$. Supongamos que se multiplican los tres precios y la renta m por $t > 0$. Imaginemos, por ejemplo, que los precios de los bienes aumentan un 10%, lo mismo que la renta del consumidor. Entonces la restricción presupuestaria del consumidor $px + qy + rz \leq m$ se convierte en $tpx + tqy + trz \leq tm$, que coincide con la anterior. Es natural suponer que la demanda del consumidor permanece constante, esto es que

$$x(tp, tq, tr, tm) = x(p, q, r, m) \tag{1}$$

El que se verifique la ecuación (1) para todo $t > 0$ significa que la función de demanda x es homogénea de grado 0. Se dice, en este caso, que la demanda no se ve influenciada por la

"ilusión monetaria". Un ejemplo concreto de función de este tipo que ha sido usado en análisis de demanda es

$$x(p,q,r,m) = \frac{mp^b}{p^{b+1}+q^{b+1}+r^{b+1}} \qquad (b \text{ constante})$$

Se tiene que

$$x(tp,tq,tr,tm) = \frac{(tm)(tp)^b}{(tp)^{b+1}+(tq)^{b+1}+(tr)^{b+1}} = \frac{t^{1+b}}{t^{b+1}}x(p,q,r,m)$$
$$= x(p,q,r,m),$$

luego la función es homogénea de grado 0.

Hay funciones de varias variables que no son homogéneas pero que, sin embargo, lo son cuando se les considera como funciones de unas pocas de esas variables, considerando a las otras como constantes. Así se define: La función $f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ es *homogénea de grado k en las variables* $y_1, \dots, y_m$ (en el punto $(x_1,\dots,x_n)$) si la función "parcial" g definida por $g(y_1,\dots,y_m) = f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ es homogénea de grado k en el sentido usual.

Funciones homotéticas

Sea f una función de las n variables $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$ definida en un cono K. Se dice que f es **homotética** cuando

$$\mathbf{x},\mathbf{y} \in K, \qquad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}), \quad t>0 \quad \Longrightarrow \quad f(t\mathbf{x}) = f(t\mathbf{y}) \tag{16.29}$$

Por ejemplo, si f es la función de utilidad de un consumidor, (16.29) implica que, si al consumidor le es indiferente elegir entre dos cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, le sigue siendo indiferente si los bienes se aumentan o disminuyen en la misma proporción.

Una función homogénea f de cualquier grado k es homotética. Para comprobarlo nótese que, si $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ y $t > 0$, la homogeneidad implica que

$$f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{y}) = f(t\mathbf{y})$$

Se puede probar fácilmente un resultado más general. Se define la función $F(\mathbf{x})$ por

$$F(\mathbf{x}) = H(f(\mathbf{x})), \quad \text{donde} \quad \begin{cases} H \text{ es estrictamente creciente} \\ \text{y } f \text{ es homogénea de grado } k \end{cases} \tag{16.30}$$

Entonces $F(\mathbf{x})$ es homotética. Para demostrarlo supongamos que $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$ o, equivalentemente, que $H(f(\mathbf{x})) = H(f(\mathbf{y}))$. Como H es estrictamente creciente, esto implica que $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$. Como f es homogénea de grado k, si $t > 0$, entonces

$$F(t\mathbf{x}) = H(f(t\mathbf{x})) = H(t^k f(\mathbf{x})) = H(t^k f(\mathbf{y})) = H(f(t\mathbf{y})) = F(t\mathbf{y})$$

lo que prueba que $F(\mathbf{x})$ es homotética. Por tanto, toda función estrictamente creciente de una función homogénea es homotética. De hecho es muy común tomar (16.30) como la definición de función homotética, usualmente con $k = 1$.[5]

El ejemplo siguiente prueba que no todas las funciones homotéticas son homogéneas:

Ejemplo 16.26

Sea $F(x,y) = a\ln x + b\ln y = \ln(x^a y^b)$, para todo $x > 0$ e $y > 0$, donde a y b son parámetros positivos cualesquiera. La función ln *es* estrictamente creciente y $x^a y^b$ es homogé-

[5] Se puede demostrar que, si $f(\mathbf{x})$ es una función homotética continua, según la definición (16.29), tal que $f(t\mathbf{x}_0)$ es una función estrictamente creciente de t para todo $\mathbf{x}_0 \in K$, entonces se puede escribir f en la forma (16.30) con $k = 1$.

nea de grado $a + b$. Por tanto, $F(x, y)$ es una función estrictamente creciente de una función homogénea y, por tanto, es homotética. Sin embargo, F no es homogénea porque

$$F(tx, ty) = \ln\left[(tx)^a(ty)^b\right] = \ln(t^{a+b}x^a y^b) = (a + b)\ln t + \ln(x^a y^b)$$

que no se puede escribir en la forma $t^k \ln(x^a y^b)$ para ningún valor fijo de k (véase también el Problema 6).

Nótese que esta función particular F se puede escribir como una función estrictamente creciente de una función homogénea de cualquier grado k. Simplemente se define la nueva función $f(x, y) = \left(x^{ka}y^{kb}\right)^{1/(a+b)}$, que es evidentemente homogénea de grado k, y se observa que $F(x, y) = [(a + b)/k] \ln f(x, y)$.

Problemas

1 Averiguar cuáles de las funciones siguientes son homogéneas y hallar el grado de las que lo sean:

(a) $f(x, y) = 3x + 4y$ (b) $g(x, y) = 3x + 4y - 2$

(c) $h(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{x + y + z}$ (d) $G(x, y) = \sqrt{xy}\, \ln \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

(e) $H(x, y) = \ln x + \ln y$ (f) $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^n$

2 Averiguar cuáles de las funciones siguientes son homogéneas:

(a) $F(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{(x_1 x_2 x_3)^2}{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4}\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}\right)$

(b) $G(x_1, x_2, x_3) = \left(ax_1^d + bx_2^d + cx_3^d\right)^g$

3 Averiguar si es homogénea la función del Ejemplo 15.5 (**b**) de la Sección 15.1.

4 Sean las funciones $\bar{x}_A$, $\bar{x}_G$ y $\bar{x}_H$ definidas en el Ejemplo 15.6 de la Sección 15.1. ¿Son homogéneas de algún grado?

5 D. W. Katzner estudió una función de utilidad $u(x_1, \ldots, x_n)$ con derivadas parciales continuas que verifica

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = a \qquad (\text{para todo } x_1 > 0, \ldots, x_n > 0)$$

para una constante a. Demostrar que la función $v(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_n) - a\ln(x_1 + \cdots + x_n)$ es homogénea de grado 0. (*Indicación:* Usar el Teorema de Euler 16.1.)

6 Usando el teorema de Euler demostrar que la función F del Ejemplo 16.26 no es homogénea.

7 Demostrar que, si $F(x, y)$ es homogénea de grado 1, se puede expresar la elasticidad de sustitución en la forma $\sigma_{yx} = F_1' F_2' / F F_{12}''$. (*Indicación:* Usar el teorema de Euler (16.19), junto con (*) en la demostración de (16.22) y el resultado del Problema 10 de la Sección 16.4).

8 Supongamos que $f(x_1, \ldots, x_n)$ y $g(x_1, \ldots, x_n)$ son homogéneas de grado r y s, respectivamente. Averiguar cuáles de las funciones $h(x_1, \ldots, x_n)$ siguientes son homogéneas, y su grado.

(a) $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)$

(b) $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [g(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^p$

(c) $h = f + g$ (d) $h = f \cdot g$ (e) $h = f/g$

9 Demostrar que, si se sustituye t^k en (16.23) por una función $g(t)$ arbitraria, esto no generaliza el concepto de función homogénea. (*Indicación:* Derivar (16.23) con respecto a t poner $t = 1$. Usar luego el teorema de Euler).

16.7 MÁS SOBRE DERIVACIÓN IMPLÍCITA

En la Sección 16.3 hemos explicado cómo derivar funciones definidas implícitamente, concentrando la atención en el caso de dos variables. Estudiamos ahora otros casos más generales.

Consideremos la ecuación $F(x, y, z) = c$, donde c es una constante. En general, esta ecuación representa una superficie en el espacio tridimensional, que está formada por todos los puntos (x, y, z) que verifican la ecuación. Este conjunto se llama la **gráfica** de la ecuación. Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función tal que, para todo (x, y) de un dominio A, es $F(x, y, z) = c$. Entonces

$$F(x, y, f(x, y)) = c \qquad \text{para todo } (x, y) \in A$$

Supongamos que F y f tienen derivadas parciales. Como la función $g(x, y) = F(x, y, f(x, y))$ coincide con la constante c para todo $(x, y) \in A$, las derivadas parciales g'_x y g'_y deben ser ambas iguales a 0. Sin embargo, $g(x, y)$ es una función compuesta de x e y cuyas derivadas parciales se pueden hallar usando la regla de la cadena (16.6), Sección 16.2. Por tanto,

$$g'_x = F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot z'_x = 0, \qquad g'_y = F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$$

Esto suministra las siguientes expresiones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$:

$$F(x, y, z) = c \implies z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \qquad (F'_z \neq 0) \tag{16.31}$$

Las expresiones (16.31) permiten calcular z'_x y z'_y aun cuando sea imposible resolver la ecuación $F(x, y, z) = c$ para obtener z como función explícita de x e y.

Ejemplo 16.27

La ecuación

$$x - 2y - 3z + z^2 = -2 \tag{1}$$

define a z como una función de x e y con derivadas primeras y segundas en un entorno del punto $(x, y, z) = (0, 0, 2)$. Calcular z'_x y z'_y y luego z''_{xx}, z''_{xy} y z''_{yy}. Hallar también los valores numéricos de todas las derivadas parciales en $(0, 0)$.

Solución: Sea $F(x, y, z) = x - 2y - 3z + z^2$ y $c = -2$. Entonces

$$F'_x = 1, \qquad F'_y = -2, \qquad F'_z = 2z - 3$$

No se puede aplicar la fórmula (16.31) cuando $F'_z = 0$, luego suponemos que $z \neq 3/2$. Entonces (16.31) da

$$z'_x = -\frac{1}{2z - 3}, \qquad z'_y = -\frac{-2}{2z - 3} = \frac{2}{2z - 3} \tag{2}$$

Para $x = 0$, $y = 0$ y $z = 2$ obtenemos $z'_x = -1$ y $z'_y = 2$.

Calculamos z''_{xx} derivando la expresión de z'_x con respecto a x. Teniendo siempre en cuenta que z es una función de x e y obtenemos

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2z-3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-(2z-3)^{-1}\right] = (2z-3)^{-2}2z'_x$$

Usando la expresión (2) de z'_x tenemos que

$$z''_{xx} = \frac{-2}{(2z-3)^3}$$

De forma análoga se tiene

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}z'_x = \frac{\partial}{\partial y}\left[-(2z-3)^{-1}\right] = (2z-3)^{-2}2z'_y = \frac{4}{(2z-3)^3}$$

y

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[2(2z-3)^{-1}\right] = -2(2z-3)^{-2}2z'_y = \frac{-8}{(2z-3)^3}$$

Para $x = y = 0$ y $z = 2$, obtenemos $z''_{xx} = -2$, $z''_{xy} = 4$ y $z''_{yy} = -8$.

El caso general

Podemos generalizar lo anterior a un número arbitrario de variables. Supongamos que la ecuación

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c \qquad (c \text{ constante}) \tag{16.32}$$

define implícitamente a z como función de las n variables $x_1, \ldots, x_n$ para las cuales las derivadas parciales existen. La demostración del resultado siguiente es una generalización directa del razonamiento que dimos en (16.31), luego lo dejamos al lector como ejercicio:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{16.33}$$

suponiendo que $\partial F/\partial z \neq 0$.

Problemas

1 Hallar $\partial z/\partial x$ en los casos siguientes:

(a) $3x + y - z = 0$ (b) $xyz + xz^3 - xy^2z^5 = 1$ (c) $e^{xyz} = xyz$

2 Calcular z'_x, z'_y y z''_{xy} para $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0$.

3 La ecuación $x^y + y^z + z^x = k$, donde k es una constante positiva, define a z como función de x e y, para $x > 0$ e $y > 0$. Hallar las derivadas parciales de z con respecto a x e y.

4 Sea $D = f(r, P)$ la demanda de un producto agrícola en función de su precio P y del gasto total r que el productor hace en concepto de publicidad. Supongamos que la oferta viene dada por $S = g(w, P)$, donde w es un índice de lo favorable que haya sido la meteorología. Supongamos que $g'_w(w, P) > 0$. El equilibrio requiere, en este caso, que $f(r, P) = g(w, P)$. Supongamos que esta ecuación define implícitamente a P como función de r y w con derivadas parciales. Calcular P'_w e interpretar su signo.

5 Bajo las hipótesis adecuadas para f, demostrar que $z = xf(x/y) \Rightarrow xz'_x + yz'_y = z$.

6 Sea f una función derivable de una variable y sean a y b dos constantes. Supongamos que la ecuación $x - az = f(y - bz)$ define a z como una función x e y con derivadas parciales. Demostrar que z verifica que $az'_x + bz'_y = 1$.

16.8 APROXIMACIONES LINEALES Y DIFERENCIALES

En la Sección 5.4 estudiamos aproximaciones lineales de funciones de una variable. Geométricamente hablando, aproximamos la gráfica de la función por su tangente. De manera análoga podemos construir aproximaciones lineales de funciones de dos variables usando el plano tangente en lugar de la gráfica de la función. En virtud de (15.11), Sección 15.4, la ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ de su gráfica es

$$z = f(a,b) + f'_1(a,b)(x-a) + f'_2(a,b)(y-b)$$

Por tanto:

La **aproximación lineal** a $f(x, y)$ en un entorno de (a, b) es

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f'_1(a,b)(x-a) + f'_2(a,b)(y-b) \tag{16.34}$$

Ejemplo 16.28

Hallar la aproximación lineal de $f(x, y) = e^{x+y}(xy - 1)$ en un entorno de $(0, 0)$.

Solución: En este caso

$$f'_1(x,y) = e^{x+y}(xy-1) + e^{x+y}y, \qquad f'_2(x,y) = e^{x+y}(xy-1) + e^{x+y}x$$

luego $f(0,0) = -1$, $f'_1(0,0) = -1$ y $f'_2(0,0) = -1$. Por (16.34) tenemos

$$e^{x+y}(xy-1) \approx -1 - x - y$$

Para x e y próximos a 0, la función complicada $z = e^{x+y}(xy - 1)$ se aproxima por la función lineal sencilla $z = -1 - x - y$.

La diferencial de una función de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables con derivadas parciales. Si dx y dy son números reales arbitrarios (no necesariamente pequeños), definimos la **diferencial** de $z = f(x, y)$ en (x, y), y se le designa por dz ó df, en la forma siguiente:

$$z = f(x,y) \implies dz = f'_1(x,y)\,dx + f'_2(x,y)\,dy \tag{16.35}$$

Cuando x varía a $x + dx$ e y a $y + dy$, la variación del valor de la función es el **incremento**

$$\Delta z = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$$

Si dx y dy son pequeños en valor absoluto, entonces Δz se puede aproximar por dz:

$$\Delta z \approx dz = f_1'(x,y)\,dx + f_2'(x,y)\,dy \tag{16.36}$$

Nota: Se puede probar mediante el teorema del valor medio que la diferencia entre Δz y la diferencial dz se puede escribir en la forma

$$\Delta z - dz = \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son funciones de dx y dy que tienden a 0 cuando $dx \to 0$ y $dy \to 0$. Así, si dx y dy son muy pequeños, la diferencia $\Delta z - dz$ es "extraordinariamente pequeña".

La aproximación en (16.36) tiene una interpretación geométrica. El error que aparece al sustituir Δz por dz resulta de "seguir el plano tangente en vez de la superficie", como se ve en la Figura 16.11. Aquí hay un razonamiento analítico. Sea

$$Z - f(x,y) = f_1'(x,y)(X-x) + f_2'(x,y)(Y-y)$$

la ecuación del conjunto de puntos (X,Y,Z) que constituyen el plano tangente en el punto $P = (x,y,f(x,y))$. Haciendo $X = x + dx$ e $Y = y + dy$ obtenemos

$$Z = f(x,y) + f_1'(x,y)\,dx + f_2'(x,y)\,dy = f(x,y) + dz$$

La longitud del segmento QS de la figura es, por tanto, $f(x,y) + dz$.

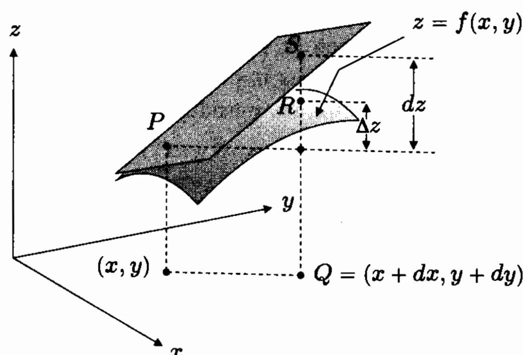


FIGURA 16.11 Interpretación geométrica de Δz y la diferencial dz.

Ejemplo 16.29

Sea $Y = F(K,L)$ una función de producción donde K y L designan capital y trabajo, respectivamente. Entonces F_K' y F_L' son las productividades marginales del capital y el trabajo (véase Ejemplo 15.20 en la Sección 15.6). Si dK y dL son incrementos arbitrarios de K y L, respectivamente, la *diferencial* de $Y = F(K,L)$ es

$$dY = F_K' dK + F_L' dL$$

El incremento $\Delta Y = F(K + dK, L + dL) - F(K,L)$ de Y se puede aproximar por dY siempre que dK y dL sean pequeños en valor absoluto, y así

$$\Delta Y = F(K + dK, L + dL) - F(K,L) \approx F_K' dK + F_L' dL$$

Generalmente se puede usar la aproximación (16.36) para estimar $f(x+dx, y+dy)$ cuando dx y dy son pequeños y se conocen los valores de $f(x,y)$, $f_1'(x,y)$ y $f_2'(x,y)$:

$$f(x+dx, y+dy) \approx f(x,y) + f_1'(x,y)\,dx + f_2'(x,y)\,dy \tag{16.37}$$

Ejemplo 16.30

Sea $f(x,y) = xy^3 - 2x^3$; entonces $f(2,3) = 38$. Usar (16.37) para estimar el valor de $f(2{,}01\,,\,2{,}98)$.

Solución: En este caso $f_1'(x,y) = y^3 - 6x^2$ y $f_2'(x,y) = 3xy^2$. Si $x = 2$, $y = 3$, $dx = 0{,}01$ y $dy = -0{,}02$ tenemos $f_1'(2,3) = 3$ y $f_2'(2,3) = 54$. Así (16.37) da

$$\begin{aligned} f(2{,}01\,,\,2{,}98) &\approx f(2,3) + f_1'(2,3)\cdot 0{,}01 + f_2'(2,3)\cdot(-0{,}02) \\ &= 38 + 3(0{,}01) + 54(-0{,}02) = 36{,}95 \end{aligned}$$

El valor correcto con cuatro decimales es $f(2{,}01\,,\,2{,}98) = 36{,}9506$. La variación de f es $-1{,}0494$ en vez de $-1{,}05$, luego el error en el cambio es $-0{,}0006$.

Si $z = f(x,y)$, podemos calcular siempre la diferencial $dz = df$ hallando primero las derivadas parciales $f_1'(x,y)$ y $f_2'(x,y)$ y usando luego la definición de dz. Recíprocamente, si conocemos la diferencial de una función de dos variables, tenemos las derivadas parciales porque

$$dz = A\,dx + B\,dy \implies \frac{\partial z}{\partial x} = A \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B$$

Nota: En los libros de matemáticas para economistas es usual exigir que dx y dy sean "infinitésimos", o infinitamente pequeños, en la definición de la diferencial $dz = f_1'(x,y)\,dx + f_2'(x,y)\,dy$. Se afirma en este caso que Δz es igual a dz. Ideas imprecisas de este tipo han producido una gran confusión a lo largo de siglos, desde que Leibniz las introdujo y han sido largo tiempo abandonadas en matemáticas.[6]

Reglas de diferenciación

En la Sección 5.4 hemos desarrollado varias reglas para trabajar con diferenciales de funciones de una variable. Las mismas reglas valen para funciones de varias variables. En efecto, supongamos que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son diferenciables, con diferenciales respectivas (por 16.35) $df = f_1'\,dx + f_2'\,dy$ y $dg = g_1'\,dx + g_2'\,dy$. Si $d(\;\;)$ designa a la diferencial de lo que esté entre los paréntesis, las reglas siguientes son las mismas que las de (5.8):

Reglas de diferenciación

$$\begin{aligned} d(af + bg) &= a\,df + b\,dg \qquad (a \text{ y } b \text{ son constantes}) \\ d(f\cdot g) &= g\,df + f\,dg \\ d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\,df - f\,dg}{g^2} \qquad (\text{cuando } g \neq 0) \end{aligned} \tag{16.38}$$

[6] Hay una rama de las matemáticas que se llama análisis no estándar, en la cual se precisan ciertas versiones modificadas de las ideas de Leibniz sobre los infinitésimos. Hay incluso aplicaciones interesantes del análisis no estándar a la economía teórica.

Estas reglas son fáciles de probar. Por ejemplo, consideremos la regla del producto aplicada a la función $f \cdot g$ definida por $(f \cdot g)(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$. Se tiene

$$\begin{aligned} d(f \cdot g) &= \frac{\partial}{\partial x}[f(x,y) \cdot g(x,y)]\,dx + \frac{\partial}{\partial y}[f(x,y) \cdot g(x,y)]\,dy \\ &= (f'_x \cdot g + f \cdot g'_x)\,dx + (f'_y \cdot g + f \cdot g'_y)\,dy \\ &= g(f'_x\,dx + f'_y\,dy) + f(g'_x\,dx + g'_y\,dy) = g \cdot df + f \cdot dg \end{aligned}$$

Hay también una regla de la cadena para diferenciales. Sea $z = F(x,y) = g\big(f(x,y)\big)$, donde g es una función derivable de una variable. Entonces

$$\begin{aligned} dz = F'_x\,dx + F'_y\,dy &= g'\big(f(x,y)\big)f'_x\,dx + g'\big(f(x,y)\big)f'_y\,dy \\ &= g'\big(f(x,y)\big)(f'_x\,dx + f'_y\,dy) = g'\big(f(x,y)\big)\,df \end{aligned}$$

porque $F'_x = g'f'_x$, $F'_y = g'f'_y$ y $df = f'_x\,dx + f'_y\,dy$. Dicho brevemente:

$$z = g\big(f(x,y)\big) \implies dz = g'\big(f(x,y)\big)\,df \tag{16.39}$$

Ejemplo 16.31

Hallar la expresión de dz en términos de dx y dy para las funciones siguientes:

(a) $z = Ax^a + By^b$ **(b)** $z = e^{xu}$ con $u = u(x,y)$ **(c)** $z = \ln(x^2 + y)$

Solución:

(a) $dz = A\,d(x^a) + B\,d(y^b) = Aax^{a-1}\,dx + Bby^{b-1}\,dy.$

(b) $$\begin{aligned} dz &= e^{xu}\,d(xu) = e^{xu}(x\,du + u\,dx) = e^{xu}\{x[u'_1(x,y)\,dx + u'_2(x,y)\,dy] + u\,dx\} \\ &= e^{xu}\{[xu'_1(x,y) + u]\,dx + xu'_2(x,y)\,dy\} \end{aligned}$$

(c) $$dz = d\ln(x^2 + y) = \frac{d(x^2 + y)}{x^2 + y} = \frac{2x\,dx + dy}{x^2 + y}$$

Invariancia de la diferencial

Sean

$$z = F(x,y), \qquad x = f(t,s), \qquad y = g(t,s) \tag{1}$$

donde F, f y g son funciones diferenciables. Por tanto, z es una función compuesta de t and s. Supongamos que t y s varían en dt y ds, respectivamente. La diferencial de z, considerada como función de t y s, es entonces

$$dz = z'_t\,dt + z'_s\,ds \tag{2}$$

En virtud de las expresiones de z'_t y z'_s dadas por la regla de la cadena (16.4) de la Sección 16.2 se tiene

$$\begin{aligned} dz &= [F'_1(x,y)x'_t + F'_2(x,y)y'_t]\,dt + [F'_1(x,y)x'_s + F'_2(x,y)y'_s]\,ds \\ &= F'_1(x,y)(x'_t\,dt + x'_s\,ds) + F'_2(x,y)(y'_t\,dt + y'_s\,ds) \\ &= F'_1(x,y)\,dx + F'_2(x,y)\,dy \end{aligned} \tag{3}$$

donde dx y dy designan las diferenciales de $x = f(t, s)$ e $y = g(t, s)$, respectivamente, como funciones de t y s. Nótese que la expresión de dz en (3) es precisamente la definición de la diferencial de $z = F(x, y)$ cuando x e y varían en dx y dy, respectivamente. *Así, la diferencial de z tiene la misma forma, tanto si x e y son variables libres, como si dependen de otras variables t y s.* A esta propiedad se le llama **invariancia** de la diferencial.

La diferencial de una función de n variables

Se define la diferencial de una función $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables como cabría esperar:

$$dz = df = f_1' \, dx_1 + f_2' \, dx_2 + \cdots + f_n' \, dx_n \tag{16.40}$$

Si los valores absolutos de $dx_1, \ldots, dx_n$ son pequeños, entonces $\Delta z \approx dz$, donde Δz es el incremento de z cuando $(x_1, \ldots, x_n)$ cambia a $(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$.

Las reglas de diferenciación (16.38) son válidas para funciones de n variables, y hay también una regla general de invariancia de la diferencial: *La diferencial de $z = F(x_1, \ldots, x_n)$ tiene la misma forma, tanto si $x_1, \ldots, x_n$ son variables libres como si dependen de otras variables básicas.* Las demostraciones son análogas a las del caso de dos variables.

Ejemplo 16.32

Calcular dz si $z = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$, donde $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_n > 0$, A, a_1, a_2, ..., a_n son constantes con A positiva. (*Indicación:* Tomar el logaritmo natural de cada lado).

Solución: Tomando el logaritmo de cada lado obtenemos

$$\ln z = \ln A + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \cdots + a_n \ln x_n$$

Por tanto,

$$\frac{1}{z} \, dz = a_1 \frac{1}{x_1} \, dx_1 + a_2 \frac{1}{x_2} \, dx_2 + \cdots + a_n \frac{1}{x_n} \, dx_n$$

luego

$$dz = z \left(\frac{a_1}{x_1} \, dx_1 + \frac{a_2}{x_2} \, dx_2 + \cdots + \frac{a_n}{x_n} \, dx_n \right)$$

Problemas

1 Hallar la aproximación lineal en un entorno de $(0, 0)$ de las funciones siguientes:

(a) $f(x, y) = \sqrt{1 + x + y}$ (b) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$ (c) $f(x, y) = A(x + 1)^a (y + 1)^b$

2 Sea

$$g^*(\mu, \varepsilon) = \left[(1 + \mu)(1 + \varepsilon)^\alpha\right]^{1/(1-\beta)} - 1 \qquad (\alpha \text{ y } \beta \text{ son constantes})$$

Probar que, si μ y ε están próximos a 0, entonces

$$g^*(\mu, \varepsilon) \approx \frac{1}{1 - \beta} \mu + \frac{\alpha}{1 - \beta} \varepsilon$$

3 Sea $f(x, y) = 3x^2 + xy - y^2$.

(a) Hallar $f(1{,}02\,,\ 1{,}99)$.

(b) Poniendo $f(1{,}02\,,\ 1{,}99) = f(1 + 0{,}02\,,\ 2 - 0{,}01)$ y usando (16.37) hallar un valor aproximado de $f(1{,}02\,,\ 1{,}99)$. Hallar el error de esta aproximación.

4 Sea $f(x, y) = 3x^2 y + 2y^3$; con $f(1, -1) = -5$. Usar (16.37) para estimar el valor de $f(0{,}98\,,\ -1{,}01)$. Hallar el error de esta aproximación

5 Supongamos que $v(1,0) = -1$, $v_1'(1,0) = -4/3$ y $v_2'(1,0) = 1/3$. Usar (16.37) para hallar un valor aproximado de $v(1{,}01\,,\,0{,}02)$

6 Hallar la diferencial de $z = xy^2 + x^3$:

(a) calculando $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ y usando la definición de dz.

(b) usando las reglas (16.38).

7 Calcular las diferenciales de las funciones siguientes:

(a) $z = x^3 + y^3$ (b) $z = xe^{y^2}$ (c) $z = \ln(x^2 - y^2)$

8 Calcular las diferenciales de las funciones siguientes:

(a) $U = a_1u_1^2 + \cdots + a_nu_n^2$ (b) $U = A\left(\delta_1 u_1^{-\varrho} + \cdots + \delta_n u_n^{-\varrho}\right)^{-1/\varrho}$
donde $a_1, \ldots, a_n$, A, $\delta_1, \ldots, \delta_n$ y ϱ son constantes positivas.

9 Hallar dz en términos de dx y dy para $u = u(x,y)$ y

(a) $z = x^2u$ (b) $z = u^2$ (c) $z = \ln(xy + yu)$

10 Hallar un valor aproximado de $T = [(2{,}01)^2 + (2{,}99)^2 + (6{,}02)^2]^{1/2}$ usando la aproximación $\Delta T \approx dT$.

11 Hallar dU en términos de dx y dy para la función $U = U(x,y)$ definida por la ecuación

$$Ue^U = x\sqrt{y}$$

12 (a) Hallar la diferencial de $X = AN^{\beta}e^{\varrho t}$, donde A, β y ϱ son constantes.

(b) Hallar la diferencial de $X_1 = BX^EN^{1-E}$, donde B y E son constantes.

Problemas avanzados

13 La diferencial dz definida en (16.40) se llama la *diferencial de primer orden* o *diferencial primera*. Si f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, definimos la *diferencial de segundo orden* como la diferencial de dz, o sea,

$$d^2z = d(dz) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i'\,dx_i\Big)\,dx_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f_{ij}''\,dx_i\,dx_j$$

(a) Calcular d^2z para $z = xy + y^2$.

(b) Sea $x = t$ e $y = t^2$. Calcular dz en términos de dt para la función del apartado anterior. Calcular también d^2z. (Este ejemplo prueba que no hay regla de invariancia para la diferencial segunda.)

14 Definimos $g(t) = f(x_1^0 + t\,dx_1, \ldots, x_n^0 + t\,dx_n)$. Usar la aproximación $g(1) \approx g(0) + g'(0)$ para hallar una generalización de (16.37).

16.9 SISTEMAS DE ECUACIONES

Como hemos dicho antes, los modelos económicos requieren a veces el estudio de sistemas de ecuaciones. En esta Sección, veremos cómo las diferenciales pueden proporcionar un método eficiente para calcular las derivadas parciales de funciones definidas implícitamente por tales sistemas.

Grados de libertad

Sean x_1, x_2, ..., x_n variables. Si no les ponemos restricciones, decimos por definición que hay n *grados de libertad*, porque se pueden elegir libremente las n variables. Si exigimos que las variables verifiquen *una* ecuación de la forma $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, el número de grados de libertad disminuye, en general, en una unidad. Cada restricción "independiente" que añadamos hace que el número de grados de libertad se reduzca en una unidad. En general, el introducir $m < n$ restricciones independientes en x_1, x_2, ..., x_n significa que las variables verifican un sistema de ecuaciones independientes de la forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{16.41}$$

En este caso, y siempre que $m < n$, el número de grados de libertad restantes es $n - m$. La regla que parece deducirse de estas consideraciones es poco precisa, especialmente porque es difícil de explicar qué se entiende por ecuaciones "independientes." Sin embargo, la siguiente regla se usa bastante en economía y estadística:

La regla del recuento

Para hallar el número de grados de libertad de un sistema de ecuaciones, cuéntese el número n de variables y el número m de ecuaciones "independientes". Si $n > m$, hay $n - m$ grados de libertad en el sistema. Si $n < m$, no hay solución para el sistema. (16.42)

Esta regla del recuento de variables y ecuaciones se usa para demostrar la siguiente proposición económica: "El número de objetivos independientes que se puede tratar de conseguir no puede ser mayor que el número de instrumentos de política disponibles". Por ejemplo, un gobierno que persiga a la vez baja inflación, baja tasa de paro y estabilidad de su moneda, debe tener al menos tres instrumentos de política con los que actuar.

Hay que notar que la regla del recuento no es válida siempre. Por ejemplo, si se restringen 100 variables $x_1, \ldots, x_{100}$ con una única ecuación, la regla dice que el número de grados de libertad es 99. Sin embargo, si la ecuación es

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2 = 0$$

hay sólo una solución, que es $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} = 0$, y así no hay ningún grado de libertad.

Está claro que no se puede suprimir la palabra "independiente" en el enunciado de la regla del recuento. Por ejemplo, si escribimos una misma ecuación dos veces, está claro que eso no reduce el número de grados de libertad.

El concepto de grados de libertad que hemos introducido necesita una generalización. *Se dice que un sistema de ecuaciones en n variables tiene k* **grados de libertad** *si hay un conjunto de k variables cuyos valores pueden ser libremente asignados, mientras que los valores de las restantes $n - k$ variables están unívocamente determinados una vez que se han fijado los valores de las primeras k variables.* En esta situación el sistema define a $n - k$ variables como funciones de las restantes k. Si las n variables varían en un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, decimos que el sistema tiene k *grados de libertad en A*.

Para afirmar que un sistema tiene k grados de libertad basta ver que *existen* k variables que verifican la definición. No se exige que *todo* conjunto de k variables la verifique.

Supongamos que tenemos un sistema *lineal* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de m ecuaciones con n incógnitas. Según el Teorema 14.3 de la Sección 14.3, el sistema tiene solución si y sólo si el rango de la matriz $\mathbf{A}$ de los coeficientes es igual al rango de la ampliada. En este caso, la regla del recuento da el resultado correcto si y sólo si los m vectores fila de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes, porque el rango de $\mathbf{A}$ es entonces igual a m (véase Teorema 14.5). Así, lo que se necesita para que la regla del recuento se pueda aplicar a un sistema compatible de ecuaciones lineales es que los vectores fila de la matriz de los coeficientes sean linealmente independientes. La definición de "independientes" en el caso de ecuaciones no lineales es más complicada y no la estudiamos.

Hemos visto los casos $m < n$ y $m > n$. ¿Qué ocurre cuando $m = n$, es decir cuando el número de ecuaciones es igual al de incógnitas? Aun en el caso más simple de una ecuación $f(x) = 0$ en una variable esta ecuación puede tener cualquier número de soluciones. Consideremos, por ejemplo, las cuatro ecuaciones siguientes en una variable:

$$x^2 + 1 = 0, \qquad x - 1 = 0, \qquad (x-1)(x-2)\cdots(x-p) = 0, \qquad \operatorname{sen} x = 0$$

Tienen un número de soluciones respectivamente igual a 0, 1, p, e infinito.

En general, un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas es compatible pero tiene varias soluciones. Estas soluciones están normalmente "separadas" o "aisladas" entre sí consideradas como puntos de $\mathbb{R}^n$.

Nos interesan a menudo modelos con sistemas de ecuaciones que tengan una solución única con sentido económico, porque el modelo trata de predecir los valores de unas variables económicas particulares. Basándonos en la discusión anterior podemos, al menos, formular la siguiente regla informal: *Un sistema de ecuaciones "independientes" no tiene una única solución, en general, a menos que tenga tantas ecuaciones como incógnitas.*

Normalmente es muy difícil demostrar que un sistema de ecuaciones no lineales tiene una solución única. Se pueden usar a veces, para establecer la unicidad, los llamados "teoremas de punto fijo" u otros resultados de análisis global.

Cálculo de las derivadas parciales a partir de las diferenciales

Comenzamos con un ejemplo.

Ejemplo 16.33

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u^2 + v &= xy \\ uv &= -x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{1}$$

(**a**) ¿Qué dice la regla del recuento sobre este sistema? Hallar las diferenciales de u y v en términos de dx y dy.

(**b**) Hallar las derivadas parciales de u y v con respecto a x e y.

(**c**) $(x, y, u, v) = (1, 0, 1, -1)$ verifica el sistema (1). Si $x_0 = 1$ se aumenta en 0,01 e $y_0 = 0$ se aumenta en 0,02, ¿cuál es, aproximadamente, el nuevo valor de u?

Solución: (**a**) Hay 4 variables y dos ecuaciones, luego debe haber 2 grados de libertad. Supongamos que se eligen valores fijos para x e y. Hay dos ecuaciones para determinar los valores de las otras dos variables, u y v. Por ejemplo, si $x = 1$ e $y = 0$, entonces (1) se reduce a $u^2 = -v$ y $uv = -1$, de donde deducimos que $u = 1$ y $v = -1$. Para otros valores de x

e y es más difícil hallar soluciones para u y v. Sin embargo parece razonable suponer que el sistema (1) define a $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ como funciones diferenciables de x e y, al menos cuando los dominios de las variables se restringen adecuadamente.[7]

Como u y v son funciones de x e y, lo mismo es $u^2 + v$, y es igual a xy para todo x e y. Tomando diferenciales en ambos lados de las ecuaciones se tiene $d(u^2 + v) = d(xy)$ y $d(uv) = d(-x^2 + y^2)$. Usando las reglas de diferenciación obtenemos

$$\begin{aligned} 2u\,du + \quad dv &= \quad y\,dx + \quad x\,dy \\ v\,du + u\,dv &= -2x\,dx + 2y\,dy \end{aligned} \tag{2}$$

Nótese que, por la regla de invariancia de la diferencial, el sistema (2) es válido para cualquier par de variables que sean independientes.

Vamos a resolver el sistema (2) en du y dv. Hay dos ecuaciones en las dos incógnitas du y dv que son de la forma

$$\begin{aligned} A\,du + B\,dv &= C \\ D\,du + E\,dv &= F \end{aligned}$$

donde $A = 2u$, $C = y\,dx + x\,dy$, y así sucesivamente. Por la regla de Cramer (o de otra forma) hallamos que

$$du = \frac{yu + 2x}{2u^2 - v}\,dx + \frac{xu - 2y}{2u^2 - v}\,dy \tag{3}$$

$$dv = \frac{-4xu - yv}{2u^2 - v}\,dx + \frac{4uy - xv}{2u^2 - v}\,dy \tag{4}$$

(**b**) Se obtiene inmediatamente a partir de (3) que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu + 2x}{2u^2 - v}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xu - 2y}{2u^2 - v}$$

También las derivadas parciales de v con respecto a x e y son los coeficientes de dx y dy en (4), respectivamente. Así hemos hallado todas las derivadas parciales primeras.

(**c**) Usamos la aproximación

$$u(x + dx, y + dy) \approx u(x, y) + du$$

Poniendo $x = 1$, $y = 0$, $dx = 0{,}01$ y $dy = 0{,}02$ obtenemos

$$\begin{aligned} u\,(1 + 0{,}01\,,\, 0 + 0{,}02) &\approx u(1, 0) + u_1'(1, 0) \cdot 0{,}01 + u_2'(1, 0) \cdot 0{,}02 \\ &= 1 + \tfrac{2}{3} \cdot 0{,}01 + \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}02 \approx 1 + 0{,}0133 = 1{,}0133 \end{aligned}$$

Nótese que, en este caso, no es fácil hallar el valor exacto de $u(1{,}01\,,\, 0{,}02)$.

Ejemplo 16.34

Consideremos el modelo macroeconómico siguiente:

$$Y = C + I + G \tag{1}$$

$$C = f(Y - T) \tag{2}$$

$$I = h(r) \tag{3}$$

$$r = m(M) \tag{4}$$

[7] El teorema de existencia de funciones implícitas de la Sección siguiente nos precisa este enunciado.

donde Y es renta nacional, C consumo, I inversión, G gasto público, T ingresos por impuestos, r tasa de interés y M oferta monetaria. Hallar el número de grados de libertad. Si suponemos que f, h y m son funciones diferenciables con $0 < f' < 1$, $h' < 0$ y $m' < 0$, esas ecuaciones determinan Y, C, I y r como funciones diferenciables de M, T y G. Diferenciar el sistema y expresar las diferenciales de Y, C, I y r en términos de las diferenciales de M, T y G. Hallar $\partial Y/\partial T$ y $\partial C/\partial T$ e interpretar sus signos.

Supongamos que $P_0 = (M_0, T_0, G_0, Y_0, C_0, I_0, r_0)$ es un punto inicial de equilibrio del sistema. Si varían ligeramente la oferta monetaria M, los ingresos por impuestos T, y el gasto público G, hallar los cambios aproximados de la renta nacional Y y el consumo C.

Solución: Hay 7 variables, Y, C, I, r, M, T, G, y 4 ecuaciones. Debería haber 3 grados de libertad. Diferenciando el sistema se obtiene

$$\begin{aligned} dY &= dC + dI + dG \\ dC &= f'(Y-T)(dY - dT) \\ dI &= h'(r)\,dr \\ dr &= m'(M)\,dM \end{aligned} \tag{5}$$

Queremos resolver este sistema lineal en los cambios diferenciales dY, dC, dI, dr de las variables endógenas Y, C, I, r, expresándolos en términos de los cambios diferenciales dM, dT, dG de las variables exógenas M, T, G de instrumento político. Se pueden hallar dI y dr inmediatamente a partir de las dos ecuaciones de (5).[8] Así se tiene

$$dr = m'(M)\,dM, \qquad dI = h'(r)m'(M)\,dM \tag{6}$$

Llevando la expresión de dI de (6) a las dos primeras ecuaciones de (5) obtenemos

$$\begin{aligned} dY - dC &= h'(r)m'(M)\,dM \qquad\qquad + dG \\ f'(Y-T)dY - dC &= \qquad\qquad f'(Y-T)\,dT \end{aligned} \tag{7}$$

Tenemos esas dos ecuaciones para calcular las dos incógnitas dY y dC. Usando la regla de Cramer y simplificando la notación, tenemos

$$\begin{aligned} dY &= \frac{h'm'}{1-f'}\,dM - \frac{f'}{1-f'}\,dT + \frac{1}{1-f'}\,dG \\ dC &= \frac{f'h'm'}{1-f'}\,dM - \frac{f'}{1-f'}\,dT + \frac{f'}{1-f'}\,dG \end{aligned} \tag{8}$$

Hemos hallado las diferenciales dY, dC, dI y dr expresadas linealmente en términos de las diferenciales dM, dT y dG. Podemos calcular inmediatamente a partir de (8) y (6) las derivadas parciales de Y, C, I y r con respecto a M, T y G. Por ejemplo, $\partial Y/\partial T = -f'/(1-f')$ y $\partial r/\partial T = 0$. Nótese que, como $0 < f' < 1$, tenemos $\partial Y/\partial T = -f'/(1-f') < 0$. Así, un incremento pequeño de los impuestos, manteniendo constantes M y G, hace disminuir la renta nacional en este modelo, a menos que el impuesto extra sea gastado completamente por el gobierno. En efecto, si $dT = dG = dx$ y $dM = 0$, entonces $dY = dx$ y $dC = dI = dr = 0$.

Si dM, dT y dG son pequeños en valor absoluto, entonces

$$\Delta Y = Y(M_0 + dM, T_0 + dT, G_0 + dG) - Y(M_0, T_0, G_0) \approx dY$$

Nótese que, cuando calculamos dY en este caso, hay que evaluar las derivadas parciales en el punto inicial de equilibrio P_0.

[8] *No es* una buena idea usar la regla de Cramer para resolver el sistema (5), que tiene 4 incógnitas.

Problemas

1 Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xu^3 + v &= y^2 \\ 3uv - x &= 4 \end{aligned} \qquad (*)$$

(a) Diferenciar el sistema. Resolverlo en du y dv, en términos de dx y dy.

(b) Calcular u'_x y v'_x usando los resultados del punto anterior.

(c) $(x, y, u, v) = (0, 1, 4/3, 1)$ verifica $(*)$. Calcular u'_x y v'_x en ese punto.

2 Sean y_1 e y_2 las funciones diferenciables de x_1 y x_2 definidas implícitamente por

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) &= 3x_1 + x_2^2 - y_1 - 3y_2^3 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) &= x_1^3 - 2x_2 + 2y_1^3 - y_2 = 0 \end{aligned}$$

Calcular $\partial y_1/\partial x_1$ y $\partial y_2/\partial x_1$.

3 Supongamos que el sistema $F(x, y, u, v) = 0$ y $G(x, y, u, v) = 0$ define a u y v como funciones diferenciables de x e y. Explicar cómo se halla u'_x y hallar una expresión de esta derivada parcial.

4 Calcular $\partial^2 u/\partial x^2$ cuando u y v están definidas como funciones de x e y mediante las ecuaciones $xy + uv = 1$ y $xu + yv = 0$.

5 Una versión del modelo macroeconómico "IS–LM" diseñado originariamente por J. R. Hicks conduce al sistema de ecuaciones

$$(1)\ I(r) = S(Y) \qquad (2)\ aY + L(r) = M$$

donde a es un parámetro y I, S, L son funciones diferenciables dadas.[9] Supongamos que el sistema define a Y y r como funciones implícitas diferenciables de a y M. Hallar las expresiones de $\partial Y/\partial M$ y $\partial r/\partial M$.

Problemas avanzados

6 Sean $F(x, y, z) = 0$ y $w = G(x, y, z)$. Bajo hipótesis adecuadas para las funciones F y G, probar que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$$

(Los subíndices indican las variables que se mantienen constantes.)

7 En teoría de la demanda, nos encontramos con sistemas de la forma

$$\begin{aligned} U'_1(x_1, x_2) &= \lambda p_1 & (1) \\ U'_2(x_1, x_2) &= \lambda p_2 & (2) \\ p_1x_1 + p_2x_2 &= m & (3) \end{aligned}$$

donde $U(x_1, x_2)$ es una función de utilidad dada. Supongamos que el sistema define a x_1, x_2 y λ como funciones diferenciables de p_1, p_2 y m. Hallar $\partial x_1/\partial p_1$.

---

[9] La ecuación (1) es la ecuación IS en la función de inversión I y la función de ahorro S. La ecuación (2) es la ecuación LM que iguala la demanda monetaria L a la oferta M. La variable Y representa la renta nacional y r la tasa de interés.

16.10 EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA (OPCIONAL)

El sistema (16.41) de la Sección anterior es un sistema general de ecuaciones en el que todas las variables aparecen simétricamente. Cuando los economistas manipulan sistemas de ecuaciones, especialmente en análisis de estática comparativa, se clasifican a priori las variables en dos tipos: variables **endógenas**, que son las que el modelo tiene que calcular, y variables **exógenas**, que vienen determinadas por "fuerzas" exteriores al modelo. Esta clasificación depende del modelo en cuestión. Una variable como el gasto público puede ser exógena en un modelo y endógena en otro.

Estos modelos dan lugar a menudo a un sistema general de **ecuaciones estructurales** que tiene la forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned} \tag{16.43}$$

donde $x_1, \dots, x_n$ son las variables exógenas, mientras que $y_1, \dots, y_m$ son las variables endógenas. Se conoce frecuentemente una solución $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ de "equilibrio", o se supone que existe. Este equilibrio podría representar, por ejemplo, un estado de igualdad entre oferta y demanda de cada bien de consumo.

Nótese que, si se puede aplicar la regla del recuento, el sistema (16.43) con m ecuaciones en $n + m$ incógnitas tiene $n + m - m = n$ grados de libertad. Supongamos que define a $y_1, \dots, y_m$ como funciones C^1 de $x_1, \dots, x_n$ en un entorno de $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$. Así, "en principio" el sistema se puede resolver en $y_1, \dots, y_m$, en términos de $x_1, \dots, x_n$ obteniéndose

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \tag{16.44}$$

En ese caso se dice que (16.44) es la **forma reducida** del sistema de ecuaciones estructurales (16.43). Las variables endógenas se han expresado como funciones de las exógenas.

Ahora bien, tenemos normalmente alguna información sobre el sistema (16.43) en el punto de equilibrio inicial $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$. Por ejemplo, podríamos saber los signos de algunas derivadas parciales de las funciones f_i. La cuestiones que surgen naturalmente son las siguientes: (1) ¿Bajo qué condiciones es posible llevar (16.43) a su forma reducida? (2) ¿Qué propiedades tienen las funciones φ_j?

El teorema de la función implícita (o teorema de existencia de funciones implícitas) da las respuestas a ambas cuestiones. Aun cuando su enunciado preciso y su demostración son complicados, es fácil captar el contenido. Nótese que, aun cuando las funciones $f_1, \dots, f_m$ estén escritas explícitamente, rara vez es posible expresar $y_1, \dots, y_m$ como funciones elementales de $x_1, \dots, x_n$, excepto en el caso lineal y, aun en éste, habrá que invertir grandes matrices.

Supongamos que $f_1, \dots, f_m$ son funciones C^1, y *supongamos* por un momento que las funciones φ_j de (16.44) son también C^1. Si sustituimos éstas en (16.43) y tomamos la diferencial de cada ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}dy_m &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f_m}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}dy_m &= 0 \end{aligned} \tag{16.45}$$

Pasando a la derecha los n primeros términos de cada ecuación tenemos

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}dy_m = -\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 - \cdots - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}dy_m = -\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1 - \cdots - \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n \end{array} \tag{16.46}$$

Resolviendo este sistema lineal de m ecuaciones en las m incógnitas $dy_1, \ldots, dy_m$ en términos de $dx_1, \ldots, dx_n$ nos va a dar las parciales de $y_1, \ldots, y_m$ con respecto a $x_1, \ldots, x_n$. De hecho, el sistema (16.46) tiene solución única si el **determinante jacobiano** del sistema (16.43):

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \tag{16.47}$$

es distinto de 0. Hemos supuesto que (16.43) define a $y_1, \ldots, y_m$ como funciones C^1 de $x_1, \ldots, x_n$. Así, *si $f_1, \ldots, f_m$ son funciones C^1 y si el determinante Jacobiano (16.47) es distinto de cero en $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$, entonces (16.43) define a $y_1, \ldots, y_m$ como funciones C^1 de $x_1, \ldots, x_n$ en un entorno de* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$. En esencia éste es el teorema de la función implícita.

Ejemplo 16.35

Consideremos el sistema (1) del Ejemplo 16.33 en la Sección 16.9, con u y v representando a las variables endógenas. Aquí $(1, 0, 1, -1)$ es un punto de equilibrio y el determinante jacobiano de $2u^2 - v$. En $(1, 0, 1, -1)$ el determinante jacobiano vale 2, luego el sistema (1) define a u y v como funciones C^1 de x e y en un entorno $(1, 0, 1, -1)$.

Problemas

1 Consideremos el modelo macroeconómico

$$Y = C + I + G$$
$$C = f(Y, T, r)$$
$$I = h(Y, r)$$

donde f y h son continuamente diferenciables, con $f'_Y > 0$, $f'_T < 0$, $f'_r < 0$, $h'_Y > 0$, $h'_r < 0$ y $f'_Y + h'_Y < 1$ (véase también Ejemplo 16.34) en Sección 16.9.

(a) Diferenciar el sistema y expresar dY en términos de dT, dG, y dr.

(b) ¿Qué ocurre con Y si T crece? ¿Y si T y G crecen lo mismo?

2 Consideremos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} y^2 - z + u - v - w^3 &= -1 \\ -2x + y - z^2 + u + v^3 - w &= -3 \\ x^2 + z - u - v + w^3 &= 3 \end{aligned}$$

El punto $P = (x, y, z, u, v, w) = (1, 1, 0, -1, 0, 1)$ es una solución. Aplíquese el teorema de existencia de funciones implícitas para demostrar que el sistema define u, v y w como funciones continuamente diferenciables de x, y y z en un entorno de P. Hallar u'_x, v'_x y w'_x en P.

17

Optimización en varias variables

La lógica meramente sanciona las conquistas de la intuición.
—*J. Hadamard* (1945)

En el Capítulo 9 estudiamos los problemas de optimización de funciones de una variable. Sin embargo, los problemas más interesantes de optimización económica requieren varias variables. Por ejemplo, una empresa que quiere maximizar beneficios elige cantidades variables de outputs o inputs. Un consumidor decide comprar cantidades variables de varios bienes de consumo diferentes.

Los problemas de optimización se pueden describir usualmente de la siguiente forma matemática. Hay una **función objetivo** $f(x_1, \dots, x_n)$, que es una función real de n variables de la que hay que hallar los valores máximos o mínimos. Por ejemplo, los beneficios de una empresa son función de las cantidades de output y de input. También hay un **conjunto de restricciones** o un **conjunto de oportunidades** S que es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, un consumidor no puede comprar cantidades mayores de las que le permite la restricción presupuestaria, dados los precios a pagar y la cantidad de dinero disponible. El problema es hallar los máximos o mínimos de f en S, siempre y cuando existan.

Se pueden abarcar varios tipos distintos de problemas de optimización dando el conjunto S adecuadamente. Si f tiene un punto óptimo en el interior de S se habla del *caso clásico*, que se estudia en este capítulo. Si S es el conjunto de todos los puntos $(x_1, \dots, x_n)$ que verifican un cierto número de ecuaciones tenemos un *problema lagrangiano*, que es maximizar o minimizar una función sujeta a restricciones de igualdad. El *problema general de programación* es aquél en que S consta de los puntos $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ que verifican m restricciones en forma de desigualdades (incluyendo, posiblemente, condiciones de no negatividad de $x_1, \dots, x_n$). Un ejemplo económico típico de este problema es el de repartir m recursos escasos entre departamentos de una empresa para maximizar beneficios y cumplir también otros requisitos. En el Capítulo 18 se consideran problemas de optimización con restricciones. Si la función objetivo y todas las restricciones son lineales en $(x_1, \dots, x_n)$, entonces tenemos un *problema de programación lineal*, que es el tema del Capítulo 19.

La sección siguiente presenta algunos hechos básicos de problemas de optimización de dos variables. El resto del capítulo da una introducción sistemática a la optimización en varias variables.

17.1 OPTIMIZACIÓN EN DOS VARIABLES

Consideremos una función $z = f(x, y)$ definida en un dominio S del plano xy, esto es, de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que f alcanza su mayor valor (su máximo) en un punto interior (x_0, y_0) de S, como en la Figura 17.1. Si mantenemos y fijo igual a y_0, la función $g(x) = f(x, y_0)$ depende solamente de x y tiene su máximo en $x = x_0$. Geométricamente, si P es el punto más alto de la superficie de la Figura 17.1, entonces P es el punto más alto de la curva que pasa por P en la que $y = y_0$. Por el Capítulo 9 sabemos que $g'(x_0) = 0$. Para todo x, la derivada $g'(x)$ es la misma que la derivada parcial $f_1'(x, y_0)$, luego $f_1'(x_0, y_0) = 0$. De la misma forma vemos que el punto (x_0, y_0) debe verificar que $f_2'(x_0, y_0) = 0$ porque la función $h(y) = f(x_0, y)$ tiene su máximo en $y = y_0$. Hemos probado así que el punto (x_0, y_0) debe verificar las dos ecuaciones

$$f_1'(x, y) = 0, \qquad f_2'(x, y) = 0 \tag{17.1}$$

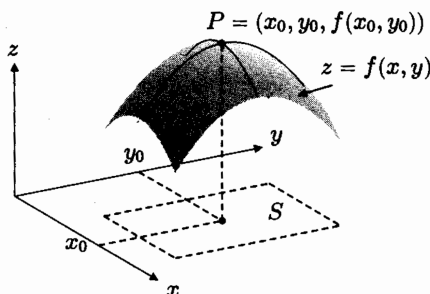


FIGURA 17.1 La función $f(x, y)$ tiene un máximo en (x_0, y_0) porque P es el punto más alto de la superficie. $f_1'(x_0, y_0) = f_2'(x_0, y_0) = 0$.

En general, los puntos que satisfacen las dos ecuaciones (17.1) se llaman **puntos estacionarios** de f. Un punto interior de S que un máximo para f debe ser un punto estacionario. Un razonamiento semejante prueba que un mínimo interior debe verificar (17.1). Por tanto:

Teorema 17.1 (Condiciones de primer orden; dos variables)

Una condición necesaria para que una función $f(x, y)$ diferenciable tenga un máximo o un mínimo en un punto interior (x_0, y_0) de su dominio es que (x_0, y_0) sea un punto estacionario de f, esto es,

$$f_1'(x_0, y_0) = 0, \quad f_2'(x_0, y_0) = 0$$

En la Figura 17.2, los tres puntos P, Q y R son estacionarios, pero sólo P es un máximo. Más adelante veremos que Q es un *máximo local*, mientras que R es un *punto de silla*.

Ejemplo 17.1

Una empresa produce dos tipos distintos A y B de un bien. El coste diario de producir x unidades de A e y unidades de B es

$$C(x, y) = 0{,}04x^2 + 0{,}01xy + 0{,}01y^2 + 4x + 2y + 500$$

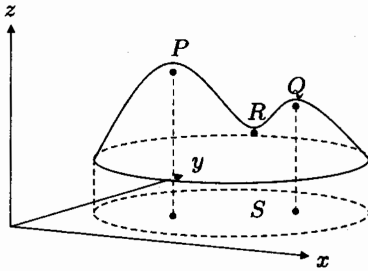


FIGURA 17.2 El punto *P* es un máximo, *Q* es un máximo local y *R* es un punto de silla.

Supongamos que la empresa vende toda su producción a un precio unitario de 15 dólares para el tipo A y 9$ para B. Hallar los niveles de producción x e y que maximizan el beneficio.

Solución: El beneficio es $\pi(x, y) = 15x + 9y - C(x, y)$, luego

$$\pi(x, y) = 15x + 9y - 0{,}04x^2 - 0{,}01xy - 0{,}01y^2 - 4x - 2y - 500$$

Si $x > 0$ e $y > 0$ maximizan los beneficios, entonces (x, y) debe ser un punto estacionario de la función $\pi(x, y)$, o sea

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 15 - 0{,}08x - 0{,}01y - 4 = 0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial y} = 9 - 0{,}01x - 0{,}02y - 2 = 0$$

Estas dos ecuaciones lineales en x e y tienen como solución $x = 100$, $y = 300$ con $\pi(100, 300) = 1.100$. Sin embargo, todavía no hemos probado que eso es, de hecho, un máximo. (Véase Problema 7 en la Sección 17.8).

Ejemplo 17.2

Supongamos que $Y = F(K, L)$ es una función de producción donde K es el capital y L es el trabajo. Designemos por p al precio por unidad de output, por r al coste por unidad de capital, y por w al precio (o tasa de salario) por unidad de trabajo. Las tres cantidades p, r and w son positivas. El beneficio de producir y vender $F(K, L)$ unidades es entonces

$$\pi(K, L) = pF(K, L) - rK - wL \tag{17.2}$$

Si F es diferenciable y π tiene un máximo con $K > 0$ y $L > 0$, entonces, por el Teorema 17.1, las parciales de π deben anularse. Por tanto, las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \pi'_K(K, L) &= pF'_K(K, L) - r = 0 \\ \pi'_L(K, L) &= pF'_L(K, L) - w = 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

Así, una condición necesaria para que el beneficio tenga un máximo para $K = K^*$ y $L = L^*$ es que

$$pF'_K(K^*, L^*) = r, \qquad pF'_L(K^*, L^*) = w \tag{17.3}$$

Supongamos que incrementamos el capital en una unidad desde el nivel K^*. ¿Cuánto ganaremos? La producción crece en, aproximadamente, $F'_K(K^*, L^*)$ unidades. Como cada una de esas unidades tiene un precio p, el aumento de ingresos es de $pF'_K(K^*, L^*)$ aproximadamente. ¿Cuánto se pierde en este aumento unitario de capital? Se pierde r, que es el coste de una unidad de capital. Estas dos cantidades deben ser iguales por la primera ecuación (17.3). La segunda ecuación (17.3) tiene una interpretación análoga: incrementando el trabajo en una unidad desde el nivel L^* se tendrá un aumento aproximado de los ingresos de $pF'_L(K^*, L^*)$, mientras que el coste de trabajo extra es w, y esas dos cantidades son iguales. El punto (K^*, L^*)

que maximiza el beneficio tiene la propiedad de que el ingreso extra generado por un aumento unitario de capital o trabajo se compensa con el aumento de coste.

Nótese que las condiciones (17.3) son necesarias, pero no suficientes en general, para que haya un máximo interior. Las condiciones suficientes para que haya un punto óptimo se estudian en las Secciones 17.4 y 17.7 a 17.9.

Ejemplo 17.3

Consideremos el modelo anterior con

$$F(K,L) = 6K^{1/2}L^{1/3}$$

y $p = 0{,}5$, $r = 0{,}1$, $w = 1$. Hallar el beneficio máximo en este caso.

Solución: La función de beneficios es

$$\pi(K,L) = 0{,}5 \cdot 6K^{1/2}L^{1/3} - 0{,}1K - 1 \cdot L = 3K^{1/2}L^{1/3} - 0{,}1K - L$$

Las condiciones de primer orden son

$$\pi'_K(K,L) = 1{,}5 \cdot K^{-1/2}L^{1/3} - 0{,}1 = 0, \qquad \pi'_L(K,L) = K^{1/2}L^{-2/3} - 1 = 0$$

La primera ecuación da $K^{1/2} = 15L^{1/3}$. Llevando este valor de $K^{1/2}$ a la segunda ecuación obtenemos $15L^{1/3}L^{-2/3} = 1$. Así $15L^{-1/3} = 1$, ó $L = 15^3$. Se deduce que, para maximizar los beneficios, hay que tomar

$$L = 15^3 = 3.375 \qquad \text{y} \qquad K = 15^2L^{2/3} = 15^4 = 50.625$$

El valor de la función de beneficios es $\pi = 3(15^4)^{1/2}(15^3)^{1/3} - 0{,}1 \cdot 15^4 - 15^3 = 0{,}5 \cdot 15^3 = 1687{,}5$ (véase el Ejemplo 17.20 de la Sección 17.8 para una demostración de que este punto es verdaderamente un máximo).

Concluimos esta sección con un ejemplo que prueba que se puede usar una transformación para convertir el problema en la forma que hemos estudiado.

Ejemplo 17.4

Una empresa tiene tres factorías que producen el mismo artículo. Sean x, y, z, respectivamente, los números de unidades que producen cada una de las tres factorías para cubrir un pedido total de 2.000 unidades. Así $x + y + z = 2.000$. Las funciones de costes de las tres factorías son

$$C_1(x) = 200 + \frac{1}{100}x^2, \qquad C_2(y) = 200 + y + \frac{1}{300}y^3, \qquad C_3(z) = 200 + 10z$$

El coste total de producir el pedido es

$$C = C_1(x) + C_2(y) + C_3(z)$$

Hallar los valores de x, y y z que minimizan C. (*Indicación:* Reducir el problema a uno en sólo dos variables despejando z de $x + y + z = 2.000$).

Solución: Resolviendo la ecuación $x + y + z = 2.000$ en z se obtiene $z = 2.000 - x - y$. Sustituyendo el valor de z dado por esta expresión en C, tenemos

$$C = \frac{1}{100}x^2 - 10x + \frac{1}{300}y^3 - 9y + 20.600$$

Los puntos estacionarios de C deben verificar las ecuaciones

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{50}x - 10 = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{100}y^2 - 9 = 0$$

La única solución es $x = 500$ e $y = 30$, lo que implica que $z = 1.470$. El valor correspondiente de C es 17.920. En el Ejemplo 17.19 de la Sección 17.8 probaremos que *es* un mínimo.

Problemas

1 La función f definida por $f(x,y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$ para todo (x,y) tiene un máximo. Hallar los valores de x e y correspondientes.

2 La función f definida por $f(x,y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$ para todo (x,y) tiene un máximo. Hallarlo

3 (a) La función f definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 35$ para todo (x,y) tiene un mínimo. Hallarlo

(b) Probar que se puede escribir $f(x,y)$ en la forma $f(x,y) = (x-3)^2 + (y+4)^2 + 10$. Explicar por qué esto significa que se ha hallado realmente el mínimo de la primera parte.

4 Los beneficios anuales (en millones de dólares) de una empresa están dados por

$$P(x,y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102$$

donde x es la cantidad invertida en investigación (en millones de dólares) e y es el gasto publicitario (también en millones de dólares).

(a) Hallar los beneficios cuando $x = 10$, $y = 8$ y cuando $x = 12$, $y = 10$.

(b) Hallar los valores de x e y que maximizan los beneficios, junto con el beneficio correspondiente.

5 El monopolista discriminador del Ejemplo 15.25, Sección 15.7, tenía la función de beneficios

$$\pi(Q_1, Q_2) = (a_1 - \alpha)Q_1 + (a_2 - \alpha)Q_2 - b_1 Q_1^2 - b_2 Q_2^2$$

Hallar los únicos valores positivos de Q_1 y Q_2 que pudieran maximizar los beneficios. Comparar los resultados con los del Ejemplo 15.25.

6 Hallar el valor mínimo de $x^2 + y^2 + z^2$ cuando se exige que $4x + 2y - z = 5$. La interpretación geométrica es: hallar el punto del plano $4x + 2y - z = 5$ más cercano al origen.

7 El monopsonista discriminador del Ejemplo 15.26, Sección 15.7, tenía la función de beneficios

$$\pi(L_1, L_2) = (P - \alpha_1)L_1 - \beta_1 L_1^2 + (P - \alpha_2)L_2 - \beta_2 L_2^2$$

Hallar los únicos valores positivos de L_1 y L_2 que pudieran maximizar los beneficios. Comparar los resultados con los del Ejemplo 15.26.

8 En la función de beneficios del Ejemplo 17.2, sea $p = 1$, $r = 0{,}65$, $w = 1{,}2$ y

$$F(K,L) = 80 - (K-3)^2 - 2(L-6)^2 - (K-3)(L-6)$$

Hallar los valores de K y L que verifican (17.3) en este caso.

9 Si x, y, z son números positivos tales que $x + 3y + 4z = 108$, hallar el valor máximo del producto $P = xyz$. (*Indicación:* Convertir P en una función de y, z eliminando la variable x.) Interpretación económica: xyz es la "utilidad" que obtiene una persona al consumir x, y, z unidades de tres bienes. Los precios unitarios de los bienes son 1, 3 y 4 y la disponibilidad presupuestaria es de 108.

Problemas avanzados

10 Hallar los valores de x, y y z que maximizan $Ax^a y^b z^c$ sujetos a la restricción $px + qy + rz = m$. Las constantes A, a, b, c, p, q y r son todas positivas y $a + b + c \leq 1$.

11 Hallar los valores de x, y, z que maximizan $x^a + y^a + z^a$ sujetos a $px + qy + rz = m$. Las constantes a, p, q, y r son positivas y $a < 1$.

17.2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS CON NOCIONES DE TOPOLOGÍA

En la sección anterior hemos presentado algunos problemas sencillos de optimización para funciones de dos variables. El resto de este capítulo extiende la teoría en muchas direcciones. Como los problemas más interesantes de optimización económica requieren funciones de varias variables, no solamente de una o dos, damos la mayoría de los resultados básicos para esas funciones.

Definición de máximo y de mínimo

Sea f una función de n variables $x_1, \ldots, x_n$ definida en un dominio $S \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in S$ y supongamos que f toma un valor en $\mathbf{c}$ que es mayor o igual que todos los valores de f en los otros puntos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de S. En símbolos,

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{c}) \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in S \tag{17.4}$$

Entonces se llama a $\mathbf{c}$ un **máximo global** de f en S y a $f(\mathbf{c})$ el **valor máximo**. De forma análoga definimos un **mínimo global** y el **valor mínimo** invirtiendo el signo de desigualdad en (17.4). Normalmente se sobrentenderá el calificativo de *global*. Conjuntamente se usarán los nombres de **óptimos** y **valores óptimos** para significar máximos o mínimos. En el caso de las funciones de dos variables hemos dado en la sección anterior unas interpretaciones geométricas de estos conceptos.

Sea f una función de n variables definida en $S \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{c} \in S$ tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{c})$ para todo $\mathbf{x} \in S$, o sea que $\mathbf{c}$ maximiza f en S. Entonces $-f(\mathbf{x}) \geq -f(\mathbf{c})$ para todo $\mathbf{x} \in S$. Así $\mathbf{c}$ maximiza a f en S si y sólo si $\mathbf{c}$ minimiza a $-f$ en S. Esta simple observación nos permite convertir problemas de maximización en problemas de minimización y viceversa. Recuérdese el caso de una variable en la Figura 9.1.

Un resultado útil

Un resultado sencillo, que tiene sin embargo considerable interés en economía teórica, se expresa a menudo así: *Maximizar una función equivale a maximizar una transformación (estrictamente) creciente de esa función.* Por ejemplo, supongamos que queremos hallar todos los pares (x, y) que maximizan $f(x, y)$ en un conjunto S del plano xy. Entonces también podemos tratar de hallar aquéllos (x, y) que maximizan, sobre S, cualquiera de las siguientes funciones objetivo alternativas:

$$(1)\ af(x,y) + b \quad (a > 0) \qquad (2)\ e^{f(x,y)} \qquad (3)\ \ln f(x,y)$$

En el caso (3) hay que exigir que $f(x, y) > 0$ en S. Los máximos son los mismos, pero los valores máximos son distintos. En un caso concreto, el problema

$$\text{maximizar } e^{x^2+2xy^2-y^3} \text{ para } (x,y) \in S$$

tiene las mismas soluciones en x, y que el problema

$$\text{maximizar } x^2 + 2xy^2 - y^3 \text{ para } (x,y) \in S$$

porque la función $u \to e^u$ es estrictamente creciente. En general es fácil probar el resultado siguiente:

Teorema 17.2

Sea $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ una función definida en un dominio S de $\mathbb{R}^n$ y F una función de una variable definida en un dominio que contenga al rango de f. Sea g la función definida en S por la expresión

$$g(x_1, \ldots, x_n) = F(f(x_1, \ldots, x_n)) \tag{17.5}$$

Entonces:

(a) Si F es creciente y $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ maximiza (o minimiza) a f sobre S, entonces $\mathbf{c}$ maximiza (o minimiza) también a g sobre S.

(b) Si F es estrictamente creciente, entonces $\mathbf{c}$ maximiza (o minimiza) a f sobre S si y sólo si $\mathbf{c}$ maximiza (o minimiza) a g sobre S.

Demostración: Se hará solamente en el caso del máximo, porque en el del mínimo el razonamiento es análogo.

(a) Como $\mathbf{c}$ maximiza a f en S, tenemos $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{c})$ para todo $\mathbf{x}$ de S. Pero entonces $g(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x})) \leq F(f(\mathbf{c})) = g(\mathbf{c})$ para todo $\mathbf{x} \in S$, porque F es creciente. Se deduce que $\mathbf{c}$ maximiza a g en S.

(b) Si F es, además, estrictamente creciente y $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{c})$, se debe verificar que $g(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x})) > F(f(\mathbf{c})) = g(\mathbf{c})$. Así $g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{c})$ para todo $\mathbf{x}$ de S implica que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{c})$ para todo $\mathbf{x}$ de S.

Nota: La demostración del Teorema 17.2 es extraordinariamente sencilla. Se basa en los conceptos de máximo y mínimo, y en el de funciones crecientes y estrictamente crecientes. Algunas personas desconfían de estos razonamientos tan sencillos y directos, y los sustituyen por otros ineficaces o incluso insuficientes basados en la regla de "diferenciar todo lo que está a la vista" para poder usar las condiciones de primer o segundo orden. Esta desconfianza hace las cosas innecesariamente difíciles y se corre el riesgo de introducir errores. Nótese que no hemos supuesto nada sobre continuidad o derivabilidad en el Teorema 17.2, porque no hace falta.

Topología del plano

Para muchos de los resultados sobre funciones de una variable que estudiamos en el Capítulo 9 era importante distinguir entre distintos tipos de dominios sobre los que estaban definidas. No es menos importante esta distinción entre distintos tipos de dominios para el caso de las funciones de varias variables. En el caso de una variable, la mayoría de las funciones estaban definidas sobre intervalos, y no hay muchos tipos distintos de intervalos. En el caso de las funciones de varias variables, hay muchos tipos distintos de dominio. Afortunadamente se pueden poner de relieve las distinciones más relevantes usando unos pocos conceptos de topología elemental.

Trabajamos con conjuntos del plano. Un punto (a, b) se llama un **punto interior** de un conjunto S del plano si existe un círculo con centro (a, b) totalmente contenido en S. Un conjunto se llama **abierto** si todos sus puntos son interiores. El punto (a, b) se llama un **punto frontera** de un conjunto S si *todo* círculo con centro (a, b) contiene puntos de S y puntos no pertenecientes a S. Un punto frontera de S no pertenece necesariamente a S. Si S contiene a todos sus puntos frontera se dice que S es **cerrado**. Estos conceptos se representan en las Figuras 17.3 y 17.4. Nótese que un conjunto que contiene algunos de sus puntos frontera pero no a todos, como el último de los de la Figura 17.4, no es ni abierto ni cerrado. Un conjunto es cerrado si y sólo si su complementario es abierto.

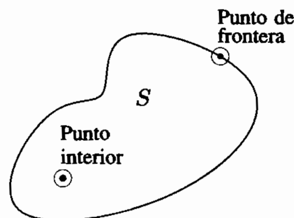


FIGURA 17.3

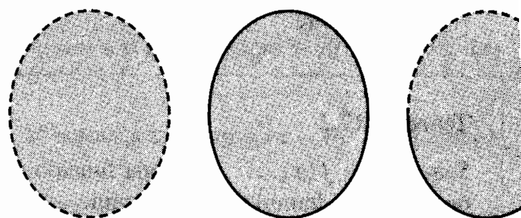


FIGURA 17.4

Las Figuras 17.3 y 17.4 dan sólo unas ligeras indicaciones de lo que significa que un conjunto sea abierto o cerrado. Desde luego, si ni siquiera está definido con precisión un conjunto, es imposible decidir si es abierto o cerrado.

En muchos de los problemas de optimización que tratemos, los dominios estarán definidos por una o más desigualdades. Los puntos frontera pertenecen al conjunto allí donde aparezcan signos de menor o igual. Por ejemplo, si p, q y m son parámetros positivos, el conjunto (presupuestario) de los puntos (x, y) que verifican las desigualdades

$$px + qy \leq m, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \tag{1}$$

es cerrado. Este conjunto es un triángulo, como se muestra en la Figura 2.41 de la Sección 2.5. Su frontera es los tres lados del triángulo. Cada uno de los tres lados corresponde a que una de las desigualdades de (1) sea una igualdad. Por otra parte, el conjunto que se obtiene sustituyendo $\leq$ por $<$ y $\geq$ por $>$ es abierto.

En general, si $g(x, y)$ es una función continua y c es un número real, los tres conjuntos

$$\{(x,y) : g(x,y) \geq c\}, \qquad \{(x,y) : g(x,y) \leq c\}, \qquad \{(x,y) : g(x,y) = c\}$$

son cerrados. Si sustituimos $\geq$ por $>$, ó $\leq$ por $<$, los conjuntos correspondientes son abiertos.

Un conjunto se llama **acotado** si se puede encontrar un círculo que lo contenga. Los conjuntos de las Figuras 17.4 y 2.41 son acotados. El conjunto de todos los (x, y) que verifican

$$x \geq 1 \quad \text{e} \quad y \geq 0 \tag{2}$$

es cerrado no acotado (véase Figura 15.1). El conjunto es cerrado porque contiene a todos sus puntos frontera. ¿Cómo es el conjunto de la Figura 15.2? No es ni abierto ni cerrado, pero es acotado. Un conjunto cerrado y acotado se llama **compacto**.

Los economistas tienen a menudo que considerar conjuntos definidos de formas complicadas. Es difícil imaginarse cómo la presencia o ausencia de un punto frontera particular pueda tener relevancia práctica. Sin embargo, hay que hacer la distinción con vistas a demostrar resultados matemáticos.

Topología en $\mathbb{R}^n$

Los conceptos topológicos que acabamos de introducir se generalizan muy fácilmente a $\mathbb{R}^n$. Recordemos que en la Sección 12.4 se definía la distancia entre dos n-vectores $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ como $||\mathbf{a} - \mathbf{b}|| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$.

Una n-**bola** con centro $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y radio r es el conjunto de todos los puntos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ tales que $||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < r$. Si sustituimos la palabra "círculo" que usamos en las definiciones de topología plana por "n-bola", siguen valiendo en $\mathbb{R}^n$ las definiciones de punto inte-

rior, conjunto abierto, punto frontera, conjunto cerrado, conjunto acotado y conjunto compacto. Un **entorno** N de un punto **a** es un conjunto que contiene una n-bola con centro **a**.

Si $g(\mathbf{x}) = g(x_1, \dots, x_n)$ es una función continua de n variables y c es un número real, los tres conjuntos

$$\{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \geq c\}, \qquad \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq c\}, \qquad \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = c\}$$

son cerrados. Si $\geq$ se sustituye por $>$, ó $\leq$ por $<$, los conjuntos correspondientes son abiertos.

Si A es conjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$, se define el **interior** de A como el conjunto de los puntos interiores de A. Si A es abierto, coincide con su interior.

Problemas

1 Hallar los valores máximo o mínimo de las dos funciones siguientes (o probar que no existen) por un razonamiento directo:

(a) $f(x, y) = (x+1)^2 + (y-3)^2 - 10$ (b) $f(x, y) = 3 - \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$

2 Probar que, siempre que $A > 0$ y $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$, el problema

$$\text{maximizar } Ax_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \qquad \text{sujeta a } x_1 + \cdots + x_n = 1$$

tiene la misma solución que el problema

$$\text{maximizar } \ln A + a_1 \ln x_1 + \cdots + a_n \ln x_n \qquad \text{sujeta a } x_1 + \cdots + x_n = 1$$

3 Simplificar el problema siguiente:

$$\text{maximizar } \tfrac{1}{2}\left[e^{x^2+y^2-2x} - e^{-(x^2+y^2-2x)}\right] \qquad \text{para } (x, y) \in S$$

4 Sea $g(x, y) = F(f(x, y))$, donde f y F son continuamente diferenciables con $F' > 0$. Probar que (x_0, y_0) es un punto estacionario de f si y sólo si es un punto estacionario de g.

5 Dar un ejemplo de una función discontinua g de una variable tal que el conjunto $\{x : g(x) \leq 1\}$ no sea cerrado.

Problemas avanzados

6 (a) Probar que el conjunto S de los (x, y) tales que $x^2 + xy + y^2 = 3$ es cerrado.

(b) Probar que S es acotado. (*Indicación:* La ecuación es equivalente a $(x + y/2)^2 + 3y^2/4 = 3$. Por tanto, $3y^2/4 \leq 3$, luego $-2 \leq y \leq 2$. Probar de forma análoga que $-2 \leq x \leq 2$).

(c) Probar que el conjunto de los (x, y) tales que $x^2 + xy - y^2 = 3$ es cerrado pero no acotado. (*Indicación:* Todo par (x, y) con $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5t^2 + 12} - t)$ e $y = t$ satisface la ecuación. Sin embargo, $x \to \infty$ e $y \to \infty$ cuando $t \to \infty$).

7 Decidir en cada uno de los casos de la Figura 17.5 si hay una función F estrictamente creciente tal que $g(x) = F(f(x))$

17.3 EL TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS Y CÓMO USARLO

Como en el caso de una variable, es fácil hallar ejemplos de funciones de varias variables que no tengan ningún máximo o mínimo. El teorema de los valores extremos para una variable (Teorema 7.3,

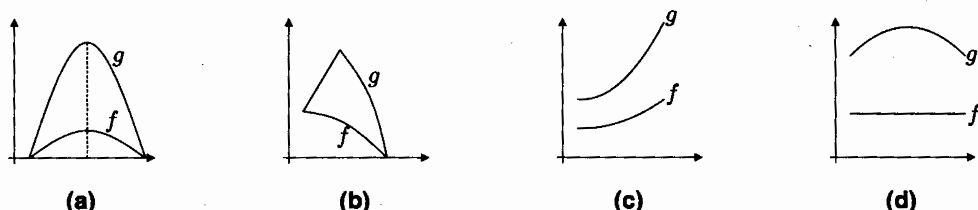


FIGURA 17.5

Sección 7.2) fue muy útil a la hora de dar condiciones suficientes que asegurasen la existencia de puntos óptimos. Se le puede generalizar directamente a funciones de varias variables.

Teorema 17.3 (Teorema de los valores extremos)

Si f es una función continua en un conjunto cerrado y acotado S de $\mathbb{R}^n$, entonces existen un máximo $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ y un mínimo $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ en S; esto es, existen $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ en S tales que

$$f(\mathbf{d}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{c}) \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \text{ de } S$$

El Teorema 17.3 es un *teorema de existencia puro*. No nos dice *cómo hallar* los puntos óptimos. Se puede encontrar la demostración en los libros de cálculo más avanzados. También, aun cuando las condiciones del teorema son *suficientes* para asegurar la existencia de puntos óptimos, no son ni mucho menos necesarias. Véase nuestra advertencia para el caso de funciones de una variable en la Sección 7.2.

Cálculo de máximos y mínimos

En la Sección 17.1 estudiamos algunos casos sencillos en los que podemos hallar los máximos y mínimos de una función de dos variables hallando sus puntos estacionarios. En el caso de n variables, el vector $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ se llama un **punto estacionario** de $f(x_1, \ldots, x_n)$ si $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es una solución de las n ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 0, \; \ldots, \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0 \tag{17.6}$$

Se puede generalizar fácilmente el Teorema 17.1 a funciones de n variables.

Teorema 17.4 (Condiciones necesarias de primer orden)

Sea f una función definida en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ un punto interior de S en el que f es diferenciable. Una condición necesaria para que $\mathbf{c}$ sea un máximo o mínimo para f es que $\mathbf{c}$ sea un punto estacionario para f, esto es,

$$f'_i(\mathbf{c}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Demostración: Sea i $(1 \leq i \leq n)$ un índice fijo y definamos $g(x_i) = f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ en el dominio formado por los x_i tales que $(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ pertenece a S. Si $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ es un máximo (o mínimo) para f, la función g de una variable debe alcanzar un máximo (o mínimo) en $x_i = c_i$. Como $\mathbf{c}$ es un punto interior a S, se deduce que c_i es también un punto interior del dominio de g. Por tanto, en virtud del Teorema 7.4 de la Sección 7.2, debe ser $g'(c_i) = 0$. Pero $g'(c_i) = f'_i(c_1, \ldots, c_n)$, y de ahí la conclusión.

Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ está definida en un dominio S de $\mathbb{R}^n$, los máximos y mínimos (si los hay) deben estar en el interior de S o en la frontera. Por el Teorema 17.4, si f es diferenciable, todo máximo o mínimo que sea interior debe verificar las condiciones de primer orden (17.6). La mayoría de las funciones que estudiamos son diferenciables en todo el espacio. El procedimiento que describimos en el recuadro siguiente cubre la mayoría de los problemas de optimización con los que nos encontraremos.

Problema

Hallar los valores máximo y mínimo de una función diferenciable $f(\mathbf{x})$ definida en un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ cerrado y acotado.

Solución

1. Hallar todos los puntos estacionarios de f en el interior de S.

2. Hallar los valores mayor y menor de $f(\mathbf{x})$ en la frontera de S. (Si conviene subdividir la frontera en varias partes, hallar los valores mayor y menor en cada una de ellas.)

3. Calcular los valores de la función en todos los puntos hallados en **1** y **2**.

4. El mayor valor de la función en **3** es el valor máximo de f en S.

5. El menor valor de la función en **3** es el valor mínimo de f en S.

(17.7)

Apliquemos este procedimiento a la función cuya gráfica es la de la Figura 17.6. Como no se da una expresión analítica de la función, sólo podemos dar un argumento geométrico intuitivo.

Sólo hay un punto estacionario de f en el interior del dominio rectangular S, a saber (x_0, y_0), que corresponde al punto P de la gráfica. La frontera de S consta de cuatro segmentos. El punto R sobre la vertical de un vértice de S representa el valor máximo de f en la frontera; análogamente, Q representa el valor mínimo de f en la frontera. Los únicos candidatos para máximo o mínimo son los tres puntos P, Q y R. Comparando los valores de f en esos puntos vemos que P representa el valor mínimo, mientras R representa el valor máximo de f en S.

Al lector le gustará saber que en la mayoría de los problemas de optimización en economía, especialmente en los de libros de texto, no aparecen las dificultades que se solventan con la receta. Normalmente hay un punto óptimo interior que se puede hallar igualando a cero las derivadas parciales primeras. Más adelante veremos condiciones suficientes para que este sencillo método funcione. No obstante estudiamos varios ejemplos de aplicación de la receta (17.7).

Ejemplo 17.5

Hallar los puntos y los valores óptimos de la función $f(x, y)$ definida sobre S por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1, \qquad S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Solución: El conjunto S es el círculo de centro el origen y radio 1, que se ha representado en la Figura 17.7. La función continua f alcanzará un máximo y un mínimo sobre S, por el teorema de los valores extremos.

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1-2-4}{4} = -5/4$

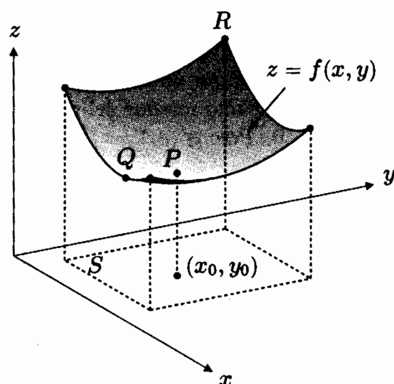


FIGURA 17.6

Aplicando la receta anterior, comenzamos hallando todos los puntos estacionarios del interior de S. Estos puntos estacionarios verifican las dos ecuaciones siguientes:

$$f'_x(x, y) = 2x = 0, \qquad f'_y(x, y) = 2y + 1 = 0$$

Por tanto $(x, y) = (0, -1/2)$ es el único punto estacionario de f, y está en el interior de S. Además $f(0, -1/2) = -5/4$.

La frontera de S es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Nótese que, si (x, y) está en esta circunferencia, entonces en particular x e y estarán en el intervalo $[-1, 1]$. Sustituyendo $x^2 + y^2 = 1$ en la expresión de $f(x, y)$ se ve que, *a lo largo de la frontera de* S, el valor de f está dado por la siguiente función de una variable:

$$g(y) = 1 + y - 1 = y \qquad (y \in [-1, 1])$$

El valor máximo de g es 1, para $y = 1$ y entonces $x = 0$. El valor mínimo es -1, para $y = -1$ y $x = 0$. Así hemos hallado los únicos tres posibles candidatos para puntos óptimos, a saber, $(0, -1/2)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Se tiene que $f(0, -1/2) = -5/4$, $f(0, 1) = 1$, y $f(0, -1) = -1$. De aquí deducimos que el *valor máximo* de f en S es 1 y se alcanza en $(0, 1)$, mientras que el *valor mínimo* es $-5/4$, que se alcanza en $(0, -1/2)$.

Ejemplo 17.6

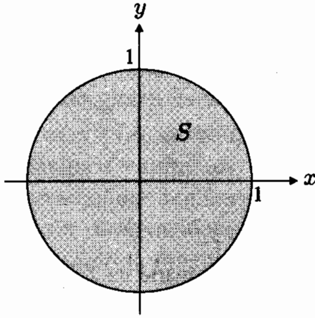
En un estudio de las cantidades x e y de gas natural que Europa debe importar de Noruega y Siberia, respectivamente, se supuso que los beneficios se regían por la función $f(x, y) = 9x + 8y - 6(x + y)^2$. El término $-6(x + y)^2$ aparece porque el precio mundial del gas natural aumenta conforme sube el total de las importaciones. Por restricciones de capacidad, x e y deben verificar $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 3$. Finalmente, por razones políticas, las importaciones de Noruega no deberían ser una fracción demasiado pequeña del total de importaciones, lo que se traduce en que deben ser $x \geq 2(y - 1)$, o $-x + 2y \leq 2$. Así se plantea el problema de optimización de cómo maximizar la función

$$f(x, y) = 9x + 8y - 6(x + y)^2$$

sujeta a las restricciones

$$0 \leq x \leq 5, \; 0 \leq y \leq 3, \; -x + 2y \leq 2$$

Dibujar en el plano xy el conjunto S de los puntos que verifican esas tres restricciones y luego resolver el problema.



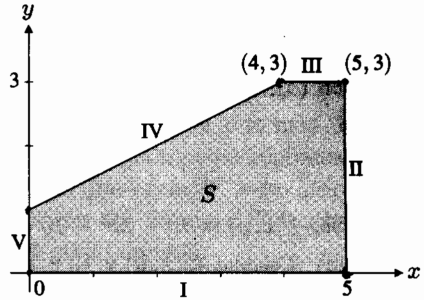


FIGURA 17.7 Dominio del Ejemplo 17.5.

FIGURA 17.8 Dominio del Ejemplo 17.6.

Solución: En la Figura 17.8 se representa el conjunto S. Claramente es cerrado y acotado, luego la función continua f tiene un máximo en S.

Buscamos primero los puntos estacionarios del interior de S. Cualquiera de ellos debe satisfacer las igualdades

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9 - 12(x + y) = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 8 - 12(x + y) = 0$$

Así debe ser $12(x + y) = 9$ y también $12(x + y) = 8$, lo que es imposible. Por tanto, no hay puntos estacionarios. El valor máximo de f debe estar en la frontera, que consta de cinco partes. O bien el valor máximo se alcanza en uno de los cinco vértices o "puntos extremos" de la frontera, o bien en un punto interior de uno de los cinco segmentos o "bordes". Los valores de la función en los cinco vértices son

$$f(0,0) = 0, \quad f(5,0) = -105, \quad f(5,3) = -315, \quad f(4,3) = -234, \quad f(0,1) = 2$$

Vamos a estudiar el comportamiento de f en los puntos interiores de cada uno de los cinco bordes que están indicados con números romanos en la Figura 17.8:

(I) En el segmento (I) es $y = 0$ y $x \in (0, 5)$. Así el comportamiento de f en este segmento es el de la función $g_1(x) = f(x, 0) = 9x - 6x^2$ para $x \in (0, 5)$. Si esta función tiene un máximo en $(0, 5)$, debe alcanzarlo en un punto en que $g_1'(x) = 9 - 12x = 0$. Por tanto, el máximo es $x = 3/4$ y $g_1(3/4) = f(3/4, 0) = 27/8$.

(II) En el segmento (II) es $x = 5$ e $y \in (0, 3)$. Sea $g_2(y) = f(5, y) = 45 + 8y - 6(5 + y)^2$ para $y \in (0, 3)$. Aquí $g_2'(y) = 8 - 12(5 + y) = -52 - 12y$, que es negativa en todo el intervalo $(0, 3)$, luego no hay puntos estacionarios en este segmento.

(III) En el segmento (III) es $y = 3$ y $x \in (4, 5)$. Sea $g_3(x) = f(x, 3) = 9x + 24 - 6(x + 3)^2$ para $x \in (4, 5)$. Aquí $g_3'(x) = 9 - 12(x + 3) = -27 - 12x$, que es negativa en todo el intervalo $(4, 5)$, luego no hay puntos estacionarios en este segmento.

(IV) En el segmento (IV) es $-x + 2y = 2$ ó $y = x/2 + 1$, con $x \in (0, 4)$. Sea

$$g_4(x) = f(x, x/2 + 1) = 9x + 8(x/2 + 1) - 6(x + x/2 + 1)^2 = -27x^2/2 - 5x + 2$$

para $x \in (0, 4)$. Aquí $g_4'(x) = -27x - 5$, que es negativa en $(0, 4)$, luego no hay puntos estacionarios en este segmento.

(V) En el segmento (V) es $x = 0$ e $y \in (0, 1)$. Sea $g_5(y) = f(0, y) = 8y - 6y^2$. Aquí $g_5'(y) = 8 - 12y = 0$ en $y = 2/3$, con $g_5(2/3) = f(0, 2/3) = 8/3$.

Comparando los valores de f en los cinco vértices de la frontera con los puntos óptimos hallados en los segmentos (I) y (V), vemos que el valor máximo de f es 27/8, que se alcanza en $(3/4, 0)$.

Problemas

1 Sea $f(x,y) = 4x - 2x^2 - 2y^2$, $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$.

(a) Calcular $f_1'(x,y)$ y $f_2'(x,y)$, hallando el único punto estacionario de f.

(b) Hallar los puntos óptimos de f sobre S.

2 Hallar los máximos y de mínimos de la función $f(x,y)$ definida sobre S en cada uno de los casos siguientes:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ sujeta a $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$.

(b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 1$.

(c) $f(x,y) = 3 + x^3 - x^2 - y^2$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$.

(d) $f(x,y) = (x-2)e^{x^2-x}(2y-1)e^{(y-2)^2}$ sujeta a $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1/2$.

3 Sea $h(x,y) = x^2y(x-y-1)$ definida sobre el dominio determinado por las desigualdades $1 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq x-1$. Probar que h tiene puntos óptimos globales y hallarlos.

4 Sea

$$f(x,y) = (x+y)e^{-(x+y^2)/4}$$

sobre el dominio D definido por las desigualdades $x + y \geq 1$, $y \geq 0$.

(a) Dibujar en el plano xy el dominio D y hallar las parciales primeras de f.

(b) Se sabe que f alcanza un máximo en D. Hallar el máximo y el valor máximo.

Problemas avanzados

5 Resolver el problema

$$\text{maximizar } (x^3 + y^2)^{1/4} \text{ sujeta a } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq k$$

donde k es un número positivo.

6 Consideremos la función f definida por by

$$f(x,y) = 3(x^2+y^2)^{3/2} - 4(x^2+y^2)^{1/2} + y$$

para todo (x,y)

(a) Hallar los puntos estacionarios de f. (Recordar que $(y^2)^{1/2} = |y|$).

(b) Sea $S = \{(x,y) : x \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1\}$. Explicar por qué f debe alcanzar un máximo y un mínimo sobre S, y hallar los puntos correspondientes.

17.4 PUNTOS ÓPTIMOS LOCALES

A veces nos interesa estudiar los puntos óptimos *locales* de una función. Se dice que el punto $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ es un **máximo local** de f en S si $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{c})$ para todo $\mathbf{x}$ de S suficientemente próximo a $\mathbf{c}$. Más precisamente, la condición es que exista un número positivo r para el cual

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{c}) \text{ para todo } \mathbf{x} \text{ de } S \text{ con } \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < r \tag{17.8}$$

Se define un **mínimo local** de la manera obvia, así como los conceptos de *valores máximo y mínimo local*, *puntos óptimos locales* y *valores óptimos locales*. Nótese que estas definiciones implican que un punto óptimo global es un punto óptimo local, pero la recíproca no es cierta.

El Teorema 17.4, sobre condiciones necesarias de primer orden, ha sido muy útil para la búsqueda de máximos y mínimos. El mismo resultado vale también para puntos óptimos locales: *En un punto óptimo local que sea interior al dominio de una función diferenciable, todas las parciales primeras son 0.* Esta observación es cierta porque la demostración del Teorema 17.4 consideraba sólo el comportamiento de la función en un entorno pequeño del punto óptimo.

Estas condiciones de primer orden son necesarias para que una función diferenciable tenga un punto óptimo local. Sin embargo no son suficientes porque un punto estacionario no tiene por qué ser un punto óptimo local. Un punto estacionario $\mathbf{c}$ de f que no sea ni un máximo ni un mínimo local se llama un **punto de silla** de f.

Ejemplo 17.7

Probar que $(0,0)$ es un punto de silla de

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

Solución: Es fácil ver que $(0,0)$ es un punto estacionario en el cual $f(0,0) = 0$. Además, $f(x,0) = x^2$, luego $f(x,y)$ toma valores positivos en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Como $f(0,y) = -y^2$, también $f(x,y)$ toma valores negativos en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Por tanto $(0,0)$ es un punto de silla. La gráfica de la función es la de la Figura 17.9.

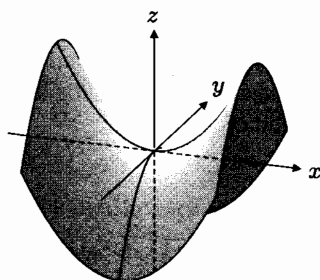


FIGURA 17.9 La gráfica de $f(x,y) = x^2 - y^2$. El punto (0, 0) es un punto de silla.

Se pueden ilustrar estos conceptos imaginándose la cordillera del Himalaya. Toda cima es un máximo local, pero sólo la más elevada, el Everest, es el máximo global. Los puntos de máxima profundidad de los lagos son mínimos locales, y los desfiladeros de montaña son puntos de silla. Los puntos estacionarios de un función se pueden entonces clasificar en tres categorías:

1. máximos locales
2. mínimos locales
3. puntos de silla

(17.9)

Para decidir cuándo un punto estacionario dado es de tipo **1**, **2** ó **3**, se puede usar el *test de la derivada segunda*. Consideremos ahora el caso de funciones de dos variables solamente y pospongamos el caso general hasta la Sección 17.9.

Condiciones de segundo orden para funciones de dos variables

Consideremos una función $z = f(x, y)$ definida en un dominio S. Sea (x_0, y_0) un punto interior de S que sea también un punto estacionario de f, o sea que

$$f_1'(x_0, y_0) = 0$$

y

$$f_2'(x_0, y_0) = 0$$

Entonces (x_0, y_0) es un máximo local, un mínimo local, o un punto de silla. ¿Cómo podemos diferenciar estos tres casos?

Consideremos primero el caso en que $z = f(x, y)$ tenga un máximo local en (x_0, y_0). Las funciones $g(x) = f(x, y_0)$ y $h(y) = f(x_0, y)$ describen el comportamiento de f sobre las rectas $y = y_0$ y $x = x_0$, respectivamente (véase Figura 17.1).

Esas funciones deben tener máximos locales en x_0 e y_0 respectivamente. Por tanto $g''(x_0) = f_{11}''(x_0, y_0) \leq 0$ y $h''(y_0) = f_{22}''(x_0, y_0) \leq 0$. Por otra parte, si $g''(x_0) < 0$ y $h''(y_0) < 0$, sabemos que g y h alcanzan máximos locales en x_0 e y_0, respectivamente.

Dicho de otro modo, las condiciones $f_{11}''(x_0, y_0) < 0$ y $f_{22}''(x_0, y_0) < 0$ nos aseguran que $f(x, y)$ tiene un máximo local sobre las rectas que pasan por (x_0, y_0) y son paralelas a los ejes x e y.

Se debe notar, sin embargo, que los signos de $f_{11}''(x_0, y_0)$ y $f_{22}''(x_0, y_0)$ no suministran muchos datos sobre el comportamiento de la gráfica de $z = f(x, y)$ cuando nos movemos alejándonos de (x_0, y_0) en otras direcciones que las dos mencionadas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 17.8

Estudiar el comportamiento de

$$f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$$

a lo largo de las rectas $y = 0$, $x = 0$ $y = x$ en un entorno del origen.

Solución: Vemos que $f(x, 0) = -x^2$ tiene un máximo en $x = 0$ y $f(0, y) = -y^2$ tiene un máximo en $y = 0$. Sin embargo, si hacemos $y = x$, entonces $f(x, x) = x^2$, que tiene un mínimo en $x = 0$. Entonces la función f tiene un máximo en el origen en las direcciones de x e y, y un mínimo en el origen en la dirección $y = x$.

El origen es un punto estacionario de f que es un punto de silla y, sin embargo, $f_{11}''(0, 0) = -2$ y $f_{22}''(0, 0) = -2$.

El problema es que, si queremos tener un test correcto de derivada segunda para funciones $f(x, y)$ de dos variables, hay que considerar también la parcial segunda cruzada $f_{12}''(x_0, y_0)$. Se tiene el resultado siguiente:[1]

[1] El Teorema 17.5 trata solamente de condiciones de segundo orden para puntos óptimos locales de una función de dos variables. En la Sección 17.8 se dan resultados sobre puntos óptimos globales de estas funciones. En la Sección 17.9 se dan resultados para funciones de n variables, junto con sus demostraciones.

Teorema 17.5 (El test de la derivada segunda para funciones de dos variables)

Sea $f(x, y)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden en un dominio S, y sea (x_0, y_0) un punto interior de S que sea un punto estacionario de f. Pongamos

$$A = f''_{11}(x_0, y_0), \quad B = f''_{12}(x_0, y_0), \quad C = f''_{22}(x_0, y_0) \tag{17.10}$$

Se tiene:

(a) Si $A < 0$ y $AC - B^2 > 0$, entonces (x_0, y_0) es un máximo local.

(b) Si $A > 0$ y $AC - B^2 > 0$, entonces (x_0, y_0) es un punto de mínimo local.

(c) Si $AC - B^2 < 0$, entonces (x_0, y_0) es un punto de silla.

(d) Si $AC - B^2 = 0$, entonces (x_0, y_0) puede ser un máximo local, un mínimo local, o un punto de silla.

Nótese que las condiciones $A < 0$ y $AC - B^2 > 0$ de (**a**) implican que $AC > B^2 \geq 0$, luego $AC > 0$. Dividiendo esta última desigualdad por el número negativo A se deduce que $C < 0$. La condición $f''_{22}(x_0, y_0) < 0$ está así indirectamente incluida en las hipótesis de (**a**). Se puede hacer una observación análoga para el caso de mínimo.

La condiciones **(a)**, **(b)** y **(c)** se llaman normalmente *condiciones de segundo orden*. Nótese que son condiciones suficientes para que un punto estacionario sea respectivamente un máximo *local*, un mínimo *local*, o un punto de silla. Ninguna de esas condiciones es necesaria. El resultado del Problema 6 confirmará (**d**), porque muestra cómo un punto estacionario para el que $AC - B^2 = 0$ puede ser de cualquiera de los tres tipos.

Ejemplo 17.9

Hallar los puntos estacionarios de

$$f(x, y) = -x^3 + xy + y^2 + x$$

y clasificarlos.

Solución: Los puntos estacionarios deben verificar las dos ecuaciones siguientes:

$$f'_1(x, y) = -3x^2 + y + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad f'_2(x, y) = x + 2y = 0$$

La segunda ecuación implica que $y = -x/2$. Llevando este valor a la primera ecuación se tiene que $-3x^2 - x/2 + 1 = 0$, ó $6x^2 + x - 2 = 0$. Ésta es una ecuación de segundo grado, con soluciones $x = 1/2$ y $x = -2/3$. Se pueden calcular los valores de y correspondientes mediante la igualdad $y = -x/2$. Así se concluye que $(1/2, -1/4)$ y $(-2/3, 1/3)$ son los únicos puntos estacionarios. Además, $f''_{11}(x, y) = -6x$, $f''_{12}(x, y) = 1$ y $f''_{22}(x, y) = 2$. Una forma conveniente de clasificar los puntos estacionarios es hacer una tabla como la Tabla 17.1.

TABLA 17.1

Punto	*A*	*B*	*C*	*AC − B²*	*Clasificación*
(1/2, −1/4)	*-3*	*1*	*2*	*-7*	*Punto de silla*
(−2/3, 1/3)	*4*	*1*	*2*	*7*	*Mínimo local*

Damos ahora un ejemplo más complicado.

Ejemplo 17.10

Clasificar los puntos estacionarios de $f(x,y) = (x-2)e^{x^2-x}e^{(y-2)^2}$.

Solución: Tenemos que

$$f_1'(x,y) = \left[e^{x^2-x} + (x-2)(2x-1)e^{x^2-x}\right]e^{(y-2)^2} = (2x^2-5x+3)e^{x^2-x}e^{(y-2)^2}$$
$$f_2'(x,y) = (x-2)e^{x^2-x}2(y-2)e^{(y-2)^2} = 2(x-2)(y-2)e^{x^2-x}e^{(y-2)^2}$$

Nótese que $f_1'(x,y) = 0$ si y sólo si $2x^2 - 5x + 3 = 0$. Resolviendo esta ecuación obtenemos las dos raíces $x = 1$ y $x = 3/2$. Para cualquiera de esos dos valores de x, $f_2'(x,y) = 0$ solamente si $y = 2$. Se deduce que $(1,2)$ y $(3/2,2)$ son los únicos puntos estacionarios.

La parciales de segundo orden son (no es útil simplificar estas expresiones)

$$f_{11}''(x,y) = \left[(4x-5)e^{x^2-x} + (2x^2-5x+3)(2x-1)e^{x^2-x}\right]e^{(y-2)^2}$$
$$f_{12}''(x,y) = (2x^2-5x+3)e^{x^2-x}2(y-2)e^{(y-2)^2}$$
$$f_{22}''(x,y) = 2(x-2)e^{x^2-x}\left[e^{(y-2)^2} + (y-2)2(y-2)e^{(y-2)^2}\right]$$

La Tabla 17.2 muestra la clasificación de los puntos estacionarios.

TABLA 17.2

Punto	*A*	*B*	*C*	*AC − B²*	*Clasificación*
(1, 2)	*-1*	*0*	*-2*	*2*	*Máximo local*
(3/2, 2)	$e^{3/4}$	*0*	$-e^{3/4}$	$-e^{3/2}$	*Punto de silla*

Problemas

1 Sea la función $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + 2y^2$ definida para todo (x,y).

(a) Calcular las parciales primeras y segundas de f.

(b) Probar que los puntos estacionarios son $(0,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, y clasificarlos.

2 Hallar todos los puntos estacionarios de las funciones siguientes y estudiar qué dice el test de la derivada segunda sobre ellos:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(b) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

(c) $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$

(d) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + x^2 - 2y^2$

(e) $f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 2xy$

(f) $f(x,y) = \ln(1 + x^2y)$

3 (a) Hallar los valores de las constantes a, b y c de tal forma que

$$f(x,y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$$

tenga un mínimo local en el punto $(2/3, 1/3)$ con valor mínimo local $-1/9$.

(b) Con los valores de a, b y c que acabamos de encontrar en (a), hallar los valores máximo y mínimo de f en el dominio del plano xy definido por las desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $2x + y \leq 4$.

4 Sea $g(x,y) = (x-1)^2ye^{x+3y}$.

(a) Hallar las curva de nivel $g(x,y) = 0$. ¿Dónde es $g(x,y) > 0$?

(b) Calcular g_1' y g_2'. Hallar los puntos estacionarios y clasificarlos.

(c) Averiguar si g tiene puntos óptimos globales.

5 Sea $f(x,y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$ definida para todo x, y.

(a) Hallar todos los puntos estacionarios de f y clasificarlos usando el test de la derivada segunda.

(b) Probar que f no tiene ni máximo global ni mínimo global.

(c) Sea $S = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 4\}$. Probar que f tiene un máximo y un mínimo global en S y hallarlos.

(d) Hallar la pendiente de la tangente a la curva de nivel $xe^{-x}(y^2 - 4y) = e - 4$ en el punto $x = 1$, $y = 4 - e$.

6 Consideremos las tres funciones:

$$\text{(a) } z = -x^4 - y^4 \qquad \text{(b) } z = x^4 + y^4 \qquad \text{(c) } z = x^3 + y^3$$

Probar que el origen es un punto estacionario para cada una de ellas y que $AC - B^2 = 0$ en el origen, en cada caso. Estudiando las funciones directamente, probar que el origen es, respectivamente, un máximo, un mínimo y un punto de silla.

Problemas avanzados

7 La función de producción de una empresa depende del capital K y del número L de trabajadores. Su expresión es

$$f(K,L) = \sqrt{\sqrt{K} + \sqrt{L}}$$

El precio unitario del producto es p, el coste del capital es r, la tasa de salarios es w, de tal forma que el beneficio es

$$\pi(K,L) = p\sqrt{\sqrt{K} + \sqrt{L}} - rK - wL, \qquad (K \geq 0,\ L \geq 0)$$

(a) Supongamos que $\pi(K,L)$ tiene un máximo en su dominio; hallarlo. ¿Cuál es el máximo cuando $p = 32\sqrt{2}$ y $w = r = 1$?

(b) Supongamos ahora que el control de la empresa pasa a los trabajadores y que se busca maximizar el valor añadido por trabajador, esto es $[\pi(K,L) + wL]/L$. Si escribimos $k = K/L$, explicar por qué el valor añadido por trabajador es

$$h(L,k) = p\sqrt{1 + \sqrt{k}} \cdot L^{-3/4} - rk$$

(c) Sea $p = 32\sqrt{2}$, $r = 1$, y supongamos que la función correspondiente $h(L,k)$ tiene un máximo en el dominio A que consta de todos los (L,k) con $L \geq 16$ y $k > 0$. Sea $(\bar{L}, \bar{k})$ el máximo. Hallar $\bar{L}$ y probar que $\bar{k} = 1$. Hallar el valor máximo de h.

8 Consideremos la función f definida por $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ para todo (x,y).

(a) La gráfica de $z = f(x,y)$ divide al plano xy, $z = 0$, en dos parábolas. Dibujar el dominio del plano xy en el que f es negativa.

(b) Probar que $(0,0)$ es el único punto estacionario. Usar la primera parte para probar que es un punto de silla.

(c) Sea $(h,k) \neq (0,0)$ un vector dirección arbitrario. Sea $g(t) = f(th, tk)$; probar que g tiene un mínimo local en $t = 0$, cualquiera que sea la dirección (h,k). Así, aunque $(0,0)$ es un punto de silla, la función tiene un mínimo local en el origen, en cada dirección a través del origen.

9 Sea

$$h(x,y) = x^4y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2$$

Hallar los puntos estacionarios de h y clasificarlos como máximos locales, mínimos locales, máximos globales, o mínimos globales.

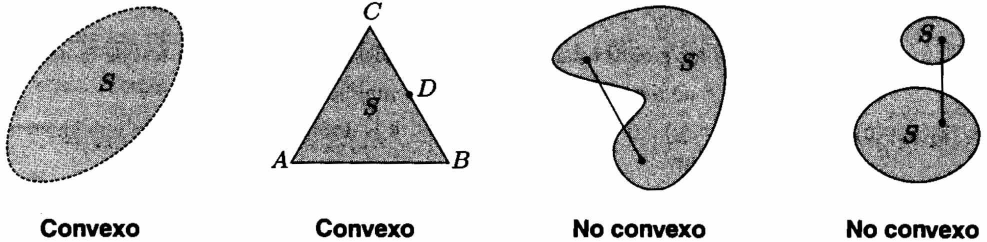


FIGURA 17.10

17.5 CONJUNTOS CONVEXOS

Un conjunto S de puntos del plano se llama **convexo** si se puede unir cada par de puntos de S por un segmento que esté totalmente contenido en S. Se dan ejemplos en la Figura 17.10.

Se puede extender esta definición de conjunto convexo a conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^n$. Se define el **segmento** de extremos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como el conjunto

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z} : \text{existe } \lambda \in [0, 1] \text{ tal que } \mathbf{z} = (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}\} \tag{17.11}$$

cuyos elementos son las *combinaciones convexas* $\mathbf{z} = (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$, con $0 \leq \lambda \leq 1$, de los dos extremos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Si $\mathbf{z} = (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ y $\lambda = 0$, entonces $\mathbf{z} = \mathbf{x}$. En el otro extremo, $\lambda = 1$ da $\mathbf{z} = \mathbf{y}$, y $\lambda = 1/2$ da $\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}$, el punto medio entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Nótese que, si λ recorre *todos* los valores reales, entonces $\mathbf{z}$ describe la recta entera L que pasa por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (véase Figura 17.11 y (12.20) en la Sección 12.5).

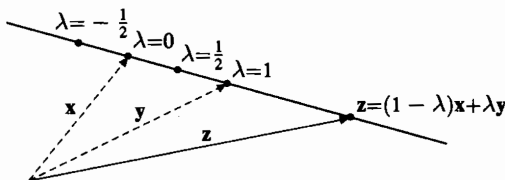


FIGURA 17.11

Se puede ahora dar fácilmente la definición de conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$.

> Un conjunto S en $\mathbb{R}^n$ se llama **convexo** si
>
> $$\mathbf{x} \in S, \mathbf{y} \in S \text{ y } \lambda \in [0, 1] \implies (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in S \tag{17.12}$$

Nótese, en particular, que el conjunto vacío es convexo, así como lo es el conjunto con un único punto. Hablando intuitivamente, un conjunto convexo debe ser "conexo" y sin "agujeros"; su frontera no se debe "curvar hacia adentro" en ningún punto.

Los conjuntos convexos son importantes en economía. Consideremos el siguiente ejemplo típico.

Ejemplo 17.11

Sea $U(\mathbf{x}) = U(x_1, \dots, x_n)$ la función de utilidad de un individuo. Si $U(\mathbf{x}^0) = a$, el **conjunto sobrenivel** $\Gamma_a = \{\mathbf{x} : U(\mathbf{x}) \geq a\}$ consta de todos los vectores de bienes que el individuo valora al menos como $\mathbf{x}^0$. En teoría del consumidor se supone frecuentemente que Γ_a es un conjunto convexo. La Figura 17.12 muestra un conjunto sobrenivel típico en el caso de dos bienes de consumo.

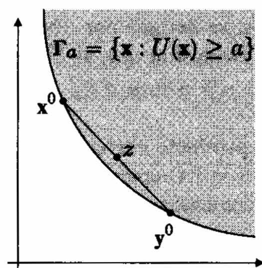


FIGURA 17.12 Γ_a **es convexo.**

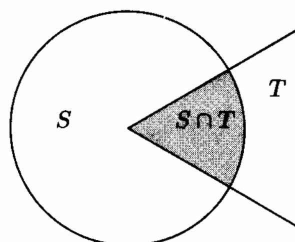


FIGURA 17.13 $S \cap T$ **es convexo.**

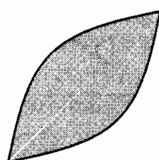
Si S y T son dos conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, su intersección $S \cap T$ es también convexa (véase Figura 17.13). Más generalmente:

$$S_1, \dots, S_m \text{ convexos en } \mathbb{R}^n \implies S_1 \cap \cdots \cap S_m \text{ convexo} \tag{17.13}$$

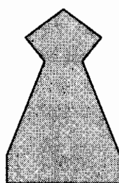
Demostración: (¡Una de las más sencillas del mundo!) Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertenecientes al conjunto $S = S_1 \cap \cdots \cap S_m$. Entonces $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertenecen a S_i para todo $i = 1, \dots, m$. Como S_i es convexo, el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ debe estar contenido en S_i para todo $i = 1, \dots, m$ y, por tanto, en la intersección $S_1 \cap \cdots \cap S_m = S$. Esto implica que S es convexo.

Problemas

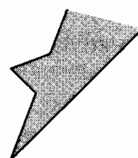
1 Averiguar cuáles de los cuatro conjuntos de la Figura 17.14 son convexos:



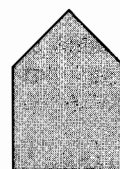
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 17.14

2 Averiguar cuáles de los conjuntos siguientes son convexos, dibujando cada uno en el plano xy.

(a) $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\}$

(b) $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$

(c) $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 8\}$

(d) $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy \geq 1\}$

(e) $\{(x, y) : xy \leq 1\}$

(f) $\{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2\}$

3 Supongamos que S es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ con un número finito de elementos. ¿Cuántos elementos puede tener S?

4 Si S y T son dos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ y a y b son números, se designa por $aS + bT$ al conjunto de todos los puntos de la forma $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$, donde $\mathbf{x} \in S$ e $\mathbf{y} \in T$. Demostrar que, si S y T son convexos, también lo es $aS + bT$.

5 Si S y T son dos conjuntos cualesquiera, se define el **producto cartesiano** de S y T por la relación $S \times T = \{(s, t) : s \in S, t \in T\}$. En la Figura 17.15 se ha representado el caso en que S y T son intervalos de la recta real. Probar que, si S y T son conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces $S \times T$ es también convexo.

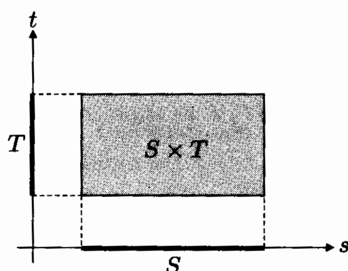


FIGURA 17.15

17.6 FUNCIONES CÓNCAVAS Y CONVEXAS

En las Secciones 9.5 y 9.6 hemos estudiado las funciones cóncavas y convexas de una variable. Generalizamos estos conceptos para funciones de varias variables cuyos dominios son conjuntos convexos. Primeramente consideramos la función de dos variables $z = f(x, y)$ de la Figura 17.16. Esta función es cóncava según la siguiente adaptación obvia de la Definición (9.14), Sección 9.6:

> La función $f(x, y)$ es **cóncava** (**convexa**) si su dominio es convexo y el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica no está nunca por encima (por debajo) de la gráfica. (17.14)

Esta definición es a menudo difícil de comprobar. En efecto, para una función definida por una fórmula complicada, no es evidente ni mucho menos si la condición geométrica (17.14) se verifica o no. Nos vamos al álgebra en busca de un test de concavidad (convexidad) que generalice (9.15) y (9.16), Sección 9.6. En efecto, es fácil ver que la definición (17.15) que vamos a dar es equivalente a (17.14).

Definición de funciones cóncavas y convexas

La definición general de función cóncava es semejante a la del caso de una variable (véase la Figura 17.17):

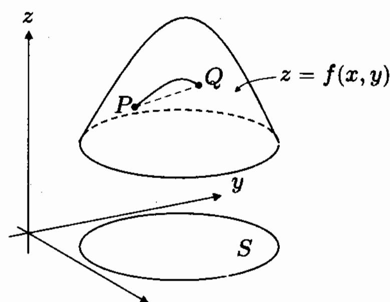


FIGURA 17.16 La función *f*(*x*, *y*) es cóncava; el segmento *PQ* yace completamente bajo la gráfica de *f*.

Definición de función cóncava

Una función $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ definida en un conjunto convexo S es **cóncava** en S si

$$f((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) \geq (1-\lambda)f(\mathbf{x}^0) + \lambda f(\mathbf{x}) \tag{17.15}$$

para todo $\mathbf{x}^0, \mathbf{x} \in S$ y todo $\lambda \in (0, 1)$.

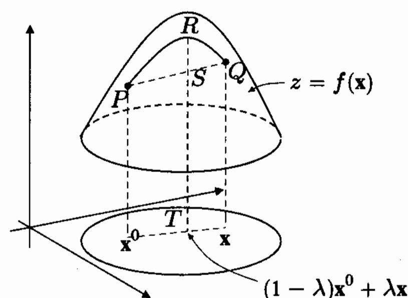


FIGURA 17.17 ***TR*** **= $f((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) \geq$ *TS* = $(1-\lambda)f(\mathbf{x}^0) + \lambda f(\mathbf{x})$. La función $f(\mathbf{x})$ definida sobre *S* es cóncava.**

Si se tiene una desigualdad *estricta* cuando $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ en (17.15), se dice que f es **estrictamente cóncava**. En el caso de una función de dos variables estrictamente cóncava, el segmento que une dos puntos arbitrarios de la gráfica yacerá estrictamente debajo de la gráfica, excepto en los extremos. La función cuya gráfica es la de la Figura 17.17 es estrictamente cóncava.

La función f es **convexa** en S si $-f$ es cóncava o, equivalentemente, cuando se verifica (17.15) con $\geq$ sustituido por $\leq$. Además, f es **estrictamente convexa** si $-f$ es estrictamente cóncava.

Damos unos ejemplos en los cuales se pueden usar fácilmente las definiciones.

Ejemplo 17.12

Consideremos la función lineal

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ es un vector constante y b es una constante. Probar que f es, a la vez, cóncava y convexa.

Solución: Para todo $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}$ y todo $\lambda \in [0,1]$, la definición de f y las reglas para el producto escalar (véase (12.14), Sección 12.4) implican que

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) &= \mathbf{a}\cdot[(1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}] + b = (1-\lambda)\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} + (1-\lambda)b + \lambda b \\ &= (1-\lambda)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^0 + b) + \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} + b) = (1-\lambda)f(\mathbf{x}^0) + \lambda f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Nótese cómo hemos usado también el hecho de que $b = (1-\lambda)b + \lambda b$. Por tanto, se satisface (17.15) con igualdad, luego f es, a la vez, cóncava y convexa pero no estrictamente cóncava o estrictamente convexa.

Ejemplo 17.13

Supongamos que $g(x)$ es una función cóncava (convexa) de una variable definida en el intervalo I. Sea $f(x,y) = g(x)$ para todo $x \in I$ y todo y perteneciente a un cierto intervalo J. Demostrar que $f(x,y)$ es cóncava (convexa) para $x \in I$ e $y \in J$.

Supongamos ahora que $g(x)$ es estrictamente cóncava (estrictamente convexa). ¿Será también $f(x,y)$ estrictamente cóncava (estrictamente convexa)?

Solución: Nótese primero que el dominio de f es el producto cartesiano $I \times J$, que es convexo porque I y J son convexos en tanto que intervalos (véase Problema 5 de la Sección 17.5). Supongamos que g es cóncava, digamos, y sean $x_1, x_2 \in I$, $y_1, y_2 \in J$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) &= g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2) \\ &= (1-\lambda)f(x_1,y_1) + \lambda f(x_2,y_2) \end{aligned}$$

lo que demuestra que $f(x,y)$ es cóncava. Sin embargo, cuando $x_1 = x_2 = x$, la desigualdad se convierte en igualdad y así

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) = (1-\lambda)f(x_1,y_1) + \lambda f(x_2,y_2)$$

aun cuando $g(x)$ sea estrictamente cóncava (estrictamente convexa) e $y_1 \neq y_2$, con $0 < \lambda < 1$. Véase la Figura 17.18. Así $f(x,y)$ *no* es estrictamente cóncava (estrictamente convexa) (excepto en el caso trivial en que J sea un único punto).

Nota: Se puede generalizar el resultado del Ejemplo 17.13: Si $f(x_1,\dots,x_p)$ es cóncava (convexa) en las variables $(x_1,\dots,x_p)$, entonces $F(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_p)$ es cóncava (convexa) en las variables $(x_1,\dots,x_n)$, donde $n \geq p$. Sin embargo, F no va a ser estrictamente cóncava (estrictamente convexa) cuando $n > p$, excepto en casos triviales.

Hay una caracterización de la concavidad/convexidad que es útil a veces, y fácil de demostrar (véase el Problema 4). Sea f una función cóncava y designemos por M_f al conjunto de todos los puntos que están en la gráfica o debajo de ella, como se ve en la Figura 17.19. Entonces la función f es cóncava si y sólo si M_f es un conjunto convexo. Se tiene un enunciado semejante para funciones convexas y así

$$\begin{aligned} f \text{ es cóncava} &\iff M_f = \{(\mathbf{x},y) : \mathbf{x} \in S \text{ y } y \leq f(\mathbf{x})\} \text{ es convexo} \\ f \text{ es convexa} &\iff N_f = \{(\mathbf{x},y) : \mathbf{x} \in S \text{ y } y \geq f(\mathbf{x})\} \text{ es convexo} \end{aligned} \qquad (17.16)$$

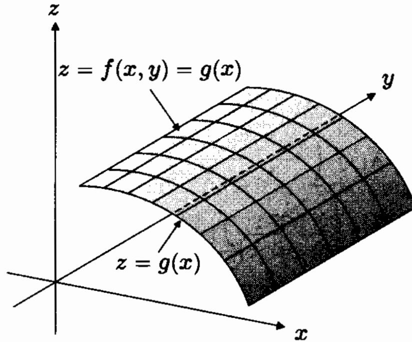


FIGURA 17.18 **La función $g(x)$ es estrictamente cóncava, pero $f(x, y)$ no lo es.**

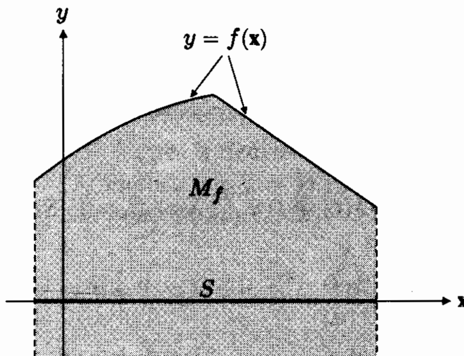


FIGURA 17.19 **La función $f(x)$ es cóncava si y sólo si M_f es convexo.**

Desigualdad de Jensen

La desigualdad de Jensen para funciones cóncavas de una variable ((9.18), Sección 9.6) se puede generalizar a funciones de varias variables:

Desigualdad de Jensen (versión discreta)

Una función f de n variables es cóncava sobre un conjunto convexo S de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si la desigualdad siguiente se verifica para todo $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ de S y todo $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$:

$$f(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m) \geq \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \lambda_m f(\mathbf{x}_m) \tag{17.17}$$

Se llaman **ponderaciones convexas** a unos números reales no negativos que suman uno. Poniendo $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$, $1 - \lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$, la Definición (17.15) de función cóncava se convierte en (17.17) para $m = 2$. En particular, si se verifica (17.17) entonces f *es* cóncava. Queda por probar que, si f es cóncava, entonces se verifica (17.17) para todo $m \geq 3$.

Para demostrar (17.17) en el caso $m = 3$ tomamos ponderaciones convexas λ_1, λ_2, λ_3 y vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^n$. Suponemos, además, que $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$ pues si fuese $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, entonces sería $\lambda_1 = 1$ y (17.17) se verificaría trivialmente. Ahora bien, $\lambda_2 + \lambda_3 = 1 - \lambda_1$ y así, como $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$ y como (17.17) se debe verificar para $m = 2$ con las ponderaciones convexas

$\lambda_2/(\lambda_2+\lambda_3)$ y $\lambda_3/(\lambda_2+\lambda_3)$, tenemos

$$\begin{aligned} f(\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\lambda_3\mathbf{x}_3) &= f\left(\lambda_1\mathbf{x}_1+(1-\lambda_1)\frac{\lambda_2\mathbf{x}_2+\lambda_3\mathbf{x}_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right) \\ &\geq \lambda_1 f(\mathbf{x}_1)+(1-\lambda_1)f\left(\frac{\lambda_2\mathbf{x}_2+\lambda_3\mathbf{x}_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right) \\ &\geq \lambda_1 f(\mathbf{x}_1)+(1-\lambda_1)\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}f(\mathbf{x}_2)+\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}f(\mathbf{x}_3)\right] \\ &= \lambda_1 f(\mathbf{x}_1)+\lambda_2 f(\mathbf{x}_2)+\lambda_3 f(\mathbf{x}_3) \end{aligned}$$

Se puede probar (17.17) en el caso general, usando inducción matemática sobre m, el número de vectores.

Hay también una versión continua de la desigualdad de Jensen que requiere integrales. Nos limitamos al caso de funciones de una variable real. En el Problema 3 de la Sección 17.7 se indica una demostración del teorema siguiente[2]:

Desigualdad de Jensen (versión continua)

Sean $x(t)$ y $\lambda(t)$ funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, con $\lambda(t) \geq 0$ y $\int_a^b \lambda(t)\,dt = 1$. Si f es una función cóncava definida en el rango de $x(t)$, entonces

$$f\left(\int_a^b \lambda(t)x(t)\,dt\right) \geq \int_a^b \lambda(t)f(x(t))\,dt \tag{17.18}$$

Nota: La desigualdad de Jensen es importante en Estadística. Una aplicación es ésta: si f es cóncava en un intervalo I y si X es una variable aleatoria con esperanza finita $E(X)$, entonces $f(E(X)) \geq E(f(X))$.

Ejemplo 17.14 (Suavización del consumo en tiempo continuo)

Supongamos que un consumidor espera vivir desde ahora, que es el tiempo $t = 0$, hasta el tiempo T. Designemos por $c(t)$ al gasto de consumo en el tiempo t y por $y(t)$ al flujo de renta. Supongamos que W_0 es riqueza en tiempo 0. Supongamos que el consumidor desea elegir $c(t)$ para maximizar la **función de utilidad intertemporal de ciclo vital**

$$\int_0^T e^{-\alpha t}u(c(t))\,dt \tag{1}$$

donde $\alpha > 0$ es la **tasa de impaciencia o de descuento de utilidad** y $u(c)$ es una función de utilidad cóncava estrictamente creciente (como $\ln c$ ó $-c^{-2}$). Supongamos que r es la tasa instantánea del interés de ahorro, y que no se permite al consumidor sobrepasar el tiempo T endeudado.

La riqueza inicial, junto con el valor actual descontado (VAD) de la renta futura, es

$$W_T = W_0 + \int_0^T e^{-rt}y(t)\,dt$$

[2] Si f es convexa, las desigualdades de (17.17) y (17.18) se deben invertir.

La **restricción presupuestaria intertemporal** se expresa exigiendo que el VAD del consumo no exceda a W_T:

$$\int_0^T e^{-rt}c(t)\,dt \leq W_T \qquad \text{(para todo } c(t) \text{ admisible)} \tag{2}$$

El hallar un patrón temporal óptimo de consumo en un problema como éste requiere generalmente técnicas de teoría de control óptimo —un tema avanzado que no tratamos en este libro. Sin embargo, en el caso particular en que $r = \alpha$, se puede hallar fácilmente un patrón temporal óptimo mediante la desigualdad de Jensen. Sea $\overline{c}$ el nivel de consumo (constante) que verifica la ecuación

$$\int_0^T e^{-rt}\overline{c}\,dt = W_T = W_0 + \int_0^T e^{-rt}y(t)\,dt \tag{3}$$

Nótese cómo $\overline{c} = \overline{y}$ en el caso particular en que $W_0 = 0$ e $y(t) = \overline{y}$ para todo t. Nuestra afirmación es que se obtiene un patrón óptimo eligiendo $c(t) = \overline{c}$ para todo t, que es lo que llamamos "suavización del consumo" porque las fluctuaciones en los ingresos se suavizan mediante ahorros y préstamos, para que el consumo se conserve constante a lo largo del tiempo.

Vamos a demostrar esta afirmación. Definamos la constante $\overline{\alpha} = \int_0^T e^{-rt}\,dt$. Entonces (3) implica que $\overline{c} = W_T/\overline{\alpha}$. Ahora se aplica la desigualdad de Jensen a la función cóncava u con ponderaciones $\lambda(t) = (1/\overline{\alpha})e^{-rt}$. Esto da

$$u\left(\int_0^T (1/\overline{\alpha})e^{-rt}c(t)\,dt\right) \geq \int_0^T (1/\overline{\alpha})e^{-rt}u(c(t))\,dt = (1/\overline{\alpha})\int_0^T e^{-rt}u(c(t))\,dt \tag{4}$$

Las desigualdades (4) y (2), junto con el hecho de que $\overline{c} = W_T/\overline{\alpha}$ y la definición de $\overline{\alpha}$, respectivamente, implican que

$$\int_0^T e^{-rt}u(c(t))\,dt \leq \overline{\alpha}\,u\Big(\frac{1}{\overline{\alpha}}\int_0^T e^{-rt}c(t)\,dt\Big) \leq \overline{\alpha}\,u\Big(\frac{W_T}{\overline{\alpha}}\Big) = \overline{\alpha}u(\overline{c}) = \int_0^T e^{-rt}u(\overline{c})\,dt \tag{5}$$

Así hemos demostrado que ningún otro plan de consumo que satisfaga la restricción presupuestaria (2) puede dar lugar a un valor mayor de la utilidad intertemporal de ciclo vital, dada por (1), que el que suministra el patrón de "consumo suavizado" con $c(t) = \overline{c}$ para todo t.[3]

Problemas

1 Averiguar qué funciones de entre aquéllas cuyas gráficas son las de la Figura 17.20 son cóncavas, convexas, estrictamente cóncavas o estrictamente convexas

2 Demostrar que una función f definida en un conjunto convexo S de $\mathbb{R}^n$ es cóncava y convexa a la vez si y sólo si es lineal.

3 Se define la función f por $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que f es convexa. (*Indicación:* Usar la desigualdad triangular del Problema 8 de la Sección 12.4.)

4 Demostrar las propiedades (17.16).

[3] Éste es, en efecto, un tema muy importante en economía. El nivel de consumo que se puede sostener sin cambios es lo que J. R. Hicks definió como "renta". M. Friedman llamó "renta permanente" a un parámetro similar y enunció la "hipótesis de renta permanente" según la cual una medida del "consumo permanente" iguala a la renta permanente.

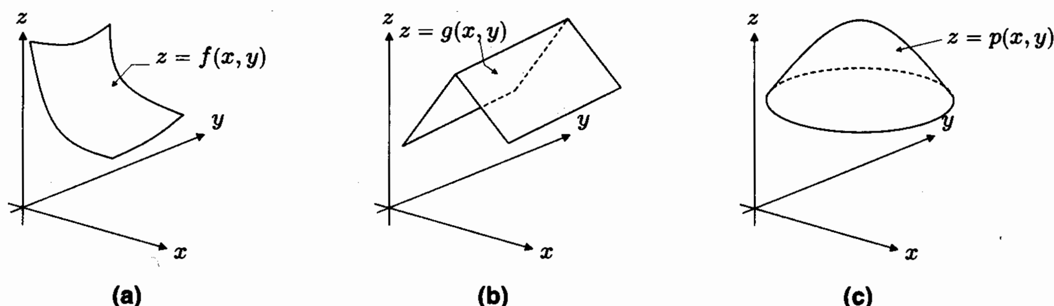


FIGURA 17.20

17.7 CONDICIONES ÚTILES DE CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

Los resultados siguientes se pueden usar a veces para comprobar si una función dada es cóncava o convexa.

Teorema 17.6

Sean f y g funciones definidas sobre un conjunto convexo S de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

(**a**) f y g cóncavas y $a \geq 0$, $b \geq 0 \implies af + bg$ cóncava.
(**b**) f y g convexas y $a \geq 0$, $b \geq 0 \implies af + bg$ convexas.
(**c**) $f(\mathbf{x})$ cóncava y $F(u)$ cóncava y creciente $\implies U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ cóncava.
(**d**) $f(\mathbf{x})$ convexa y $F(u)$ convexa y creciente $\implies U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ convexa.
(**e**) f y g cóncavas $\implies h(\mathbf{x}) = \min\{ f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \}$ es cóncava.
(**f**) f y g convexas $\implies H(\mathbf{x}) = \max\{ f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \}$ es convexa.

Demostración: Vamos a demostrar las partes (**a**), (**c**) y (**e**). Las demostraciones de (**b**), (**d**) y (**f**) son análogas, con el cambio obvio del sentido de cada desigualdad.

(**a**) Sea $G(\mathbf{x}) = af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})$. Si $\lambda \in (0, 1)$ y $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x} \in S$, entonces

$$\begin{aligned} G((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) &= af((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) + bg((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) \\ &\geq a[(1-\lambda)f(\mathbf{x}^0) + \lambda f(\mathbf{x})] + b[(1-\lambda)g(\mathbf{x}^0) + \lambda g(\mathbf{x})] \\ &= (1-\lambda)[af(\mathbf{x}^0) + bg(\mathbf{x}^0)] + \lambda[af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})] \\ &= (1-\lambda)G(\mathbf{x}^0) + \lambda G(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Hemos usado primero la definición de G y luego la de concavidad de f y g junto con $a \geq 0$, $b \geq 0$. La desigualdad

$$G((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) \geq (1-\lambda)G(\mathbf{x}^0) + \lambda G(\mathbf{x})$$

que se deduce de ahí indica que G es cóncava.

(**c**) Sean $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x} \in S$, y $\lambda \in (0, 1)$. Entonces

$$\begin{aligned} U((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) &= F(f((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x})) \\ &\geq F((1-\lambda)f(\mathbf{x}^0) + \lambda f(\mathbf{x})) \\ &\geq (1-\lambda)F(f(\mathbf{x}^0)) + \lambda F(f(\mathbf{x})) \\ &= (1-\lambda)U(\mathbf{x}^0) + \lambda U(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

La primera desigualdad usa la concavidad de f y el hecho de que F es creciente. La segunda desigualdad es debida a la concavidad de F.

(**e**) La función h asigna a $\mathbf{x}$ el menor de los números $f(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x})$. Con la notación de (17.16), se deduce que $M_h = M_f \cap M_g$. Dibujar las gráficas para convencerse de que esto es cierto. La intersección de conjuntos convexos es convexo, de donde se deduce que M_h es convexo y así h es cóncava.

Nota: Si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$, o sea, si f es una función lineal de $\mathbf{x}$, entonces se puede suprimir en (**c**) y (**d**) la hipótesis de que F es creciente. En efecto, en la demostración de (**c**), la primera desigualdad usaba la concavidad de f y el hecho de que F era creciente. Cuando f es lineal, esta desigualdad se convierte en igualdad y el resto del razonamiento funciona como antes. Así:

Una función cóncava (convexa) de una función lineal es cóncava (convexa) (17.19)

Ejemplo 17.15

Estudiar la concavidad o convexidad de las funciones siguientes:

(**a**) $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ (a, b y c son no negativas)

(**b**) $g(x, y, z) = e^{ax^2+by^2+cz^2}$ (a, b y c son no negativas)

(**c**) $h(x_1, \dots, x_n) = \ln(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$ ($a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ es positiva)

Solución: La función f es convexa por ser suma de funciones convexas. La función g es también convexa. En efecto, $g(x, y, z) = e^u$, con $u = ax^2 + by^2 + cz^2$. La función $u \to e^u$ es convexa y creciente, y u es convexa, luego, por el Teorema 17.6(**d**), g es convexa. Finalmente, h es cóncava por ser una función cóncava creciente ($u \to \ln u$) de una función lineal, luego cóncava.

El siguiente resultado que damos en esta sección tiene una interpretación geométrica obvia. Consideremos la Figura 17.16 en la Sección 17.6 y tomemos cualquier punto P de la gráfica. El plano tangente a la gráfica en P está todo él por encima de la gráfica. De hecho, es razonable esperar que esta propiedad geométrica caracterice a las funciones cóncavas diferenciables. El siguiente teorema es un enunciado algebraico de esta importante propiedad:[4]

Teorema 17.7

Supongamos que $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ tiene derivadas parciales continuas en un conjunto abierto y convexo S de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

(**a**) f es cóncava en S si y sólo si, para todo $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x} \in S$,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0) \tag{17.20}$$

(**b**) f es estrictamente cóncava si y sólo si la desigualdad en (**a**) es estricta para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$.

(**c**) Se obtiene el resultado correspondiente para funciones convexas (o estrictamente convexas) sustituyendo $\leq$ (ó $<$) por $\geq$ (o $>$) en la desigualdad de (**a**) (ó (**b**)).

[4] La desigualdad en (17.20) es válida cuando f es cóncava y tiene derivadas parciales en $\mathbf{x}^0$.

Demostración: (**a**) Supongamos primero que f es cóncava, y sean $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x} \in S$. Una reordenación de términos en la desigualdad (17.15) de la Sección 17.6 implica que, para todo $\lambda \in (0,1)$, tenemos

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \frac{f((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)}{\lambda} \tag{1}$$

Se define la función g por $g(\lambda) = f((1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))$. Entonces $g(0) = f(\mathbf{x}^0)$, luego el miembro de la derecha de (1) es $[g(\lambda) - g(0)]/\lambda$. Por el Problema 11 de la Sección 16.2, esto tiende a $g'(0) = \sum_{i=1}^n [\partial f(\mathbf{x}^0)/\partial x_i](x_i - x_i^0)$ cuando $\lambda \to 0^+$. Así, pasando al límite en (1) cuando $\lambda \to 0^+$ se tiene la desigualdad (17.20). Para demostrar la implicación contraria, supongamos que $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x} \in S$ y $\lambda \in (0,1)$. Introducimos la notación vectorial y definimos los vectores fila:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (f_1'(\mathbf{x}), \ldots, f_n'(\mathbf{x})) \quad \text{y} \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 = (x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0) \tag{2}$$

donde $\nabla f(\mathbf{x})$ es el **gradiente** de f en $\mathbf{x}$ (véase Sección 16.3 para el caso $n = 2$). Sea $\mathbf{z} = (1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}$. Entonces $\mathbf{z} \in S$ y, según la desigualdad de la parte (**a**) de (17.20), con $\mathbf{z}$ sustituyendo a $\mathbf{x}^0$, se tiene

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z}) \leq \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \tag{3}$$

Como se supone que la parte (**a**) de (17.20) se verifica en todo el conjunto S, la desigualdad (3) es también cierta cuando $\mathbf{x}$ se sustituye por $\mathbf{x}^0$, y así

$$f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{z}) \leq \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x}^0 - \mathbf{z}) \tag{4}$$

Multipliquemos ahora (4) por $1 - \lambda > 0$ y (3) por $\lambda > 0$, y sumemos después. El resultado es

$$(1-\lambda)[f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{z})] + \lambda[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})] \leq \nabla f(\mathbf{z})[(1-\lambda)(\mathbf{x}^0 - \mathbf{z}) + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z})] \tag{5}$$

El miembro de la izquierda de (5) es $(1-\lambda)f(\mathbf{x}^0) + \lambda f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})$, y la expresión entre corchetes en el miembro de la derecha es $(1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Así (5) prueba que f es cóncava.
(**b**) Supongamos que f es estrictamente cóncava en S. Entonces (1) se verifica con desigualdad estricta para $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}$. Para $\mathbf{z} = (1-\lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}$ tenemos

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) < \frac{f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}^0)}{\lambda} \leq \frac{\nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}^0)}{\lambda} = \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

usando la parte (**a**) del Teorema 17.7 ya demostrada, así como el hecho de que $\mathbf{z} - \mathbf{x}^0 = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$. Así, la parte (**a**) de (17.20) es válida con desigualdad estricta. Si, Por otra parte, se verifica (17.20) con desigualdad estricta para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$, entonces (3), (4) y (5) se verifican con $\leq$ sustituido por $<$, y se deduce que f es estrictamente cóncava.
(**c**) Esto se prueba cambiando f por $-f$.

El Teorema 17.7 tiene una aplicación muy importante en teoría de la optimización. Supongamos que $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ es diferenciable y cóncava en un conjunto convexo S y que $\mathbf{x}^0$ es un punto interior de S en el cual todas las parciales de primer orden de f se anulan. Entonces, pensando geométricamente en el caso de dos variables, el plano tangente a la gráfica de f en $\mathbf{x}^0$ es horizontal. Como la gráfica está debajo del plano tangente, esta gráfica no puede estar más alta que $\mathbf{x}^0$. Así $\mathbf{x}^0$ es un máximo global. Se verifica un resultado semejante para funciones convexas. El enunciado formal y la demostración son como sigue:

Teorema 17.8

Supongamos que $f(\mathbf{x})$ tiene derivadas parciales continuas en un conjunto convexo S de $\mathbb{R}^n$, y sea $\mathbf{x}^0$ un punto interior de S. Entonces:

(**a**) Si f es cóncava, $\mathbf{x}^0$ es un máximo global de f en S si y sólo si $\mathbf{x}^0$ es un punto estacionario de f.

(**b**) Si f es convexa, $\mathbf{x}^0$ es un punto de mínimo global de f en S si y sólo si $\mathbf{x}^0$ es un punto estacionario de f.

Demostración: Si f tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{x}^0$, entonces $\mathbf{x}^0$ debe ser un punto estacionario —esto es, todas las derivadas parciales de primer orden deben anularse.

Por otra parte, supongamos que $\mathbf{x}^0$ es un punto estacionario y que f es cóncava. Aplicamos el Teorema 17.7. Como $f_i'(\mathbf{x}^0) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, se deduce de la desigualdad en la parte (a) de (17.20) que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$ para todo $\mathbf{x} \in S$. Esto demuestra que $\mathbf{x}^0$ es un máximo. El caso en que f sea convexa se demuestra de la misma manera.

A veces es difícil usar los resultados de esta sección para averiguar si una función dada es cóncava, convexa o ninguna de las dos. Para un método más práctico daremos los tests de la derivada segunda en la sección siguiente.

Problemas

1 Demostrar que $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2$ es convexa. (*Indicación:* Usar (17.19)).

2 ¿Hasta qué punto las partes (a), (c), y (e) del Teorema 17.6 siguen siendo válidas si se consideran funciones estrictamente cóncavas en lugar de cóncavas?

3 Demostrar la desigualdad de Jensen (17.18) de la Sección 17.6 en el caso en que f sea diferenciable, usando la idea siguiente: Por (17.20), la concavidad de f implica que $f(x(t)) - f(z) \leq f'(z)[x(t) - z]$. Multiplicar ambos lados de esta desigualdad por $\lambda(t)$ e integrar con respecto a t. Hacer, entonces, $z = \int_a^b \lambda(t)x(t)\,dt$.

17.8 TESTS DE LA DERIVADA SEGUNDA PARA CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD: EL CASO DE DOS VARIABLES

En el caso de funciones de una variable dos veces diferenciables, que se estudió en la Sección 9.5, se demostró que el signo de la derivada segunda sirve para determinar la concavidad o convexidad de la función. Hay una caracterización correspondiente para funciones de dos variables. Véase la siguiente sección para la demostración.

Teorema 17.9

Sea $z = f(x, y)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden, definida sobre un conjunto abierto y convexo S del plano. Entonces

(a) f es cóncava $\iff$ $f_{11}'' \leq 0,\ f_{22}'' \leq 0$, y $\begin{vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{vmatrix} \geq 0$

(b) f es convexa $\iff$ $f_{11}'' \geq 0,\ f_{22}'' \geq 0$, y $\begin{vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{vmatrix} \geq 0$

donde todas las desigualdades se deben verificar en todo S.

Ejemplo 17.16

Sea $f(x, y) = 2x - y - x^2 + 2xy - y^2$ para todo (x, y). ¿Es f cóncava o convexa?

Solución: En este caso, $f_1' = 2 - 2x + 2y$ y $f_2' = -1 + 2x - 2y$, luego

$$f_{11}'' = -2, \qquad f_{12}'' = f_{21}'' = 2, \qquad \text{y} \qquad f_{22}'' = -2$$

Por tanto,

$$f''_{11} \leq 0, \qquad f''_{22} \leq 0, \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \geq 0$$

Deducimos de aquí que $f(x, y)$ es cóncava.

Ejemplo 17.17

Probar que la función CES f definida por

$$f(K, L) = A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-1/\rho} \qquad (A > 0, \;\; \rho \neq 0, \;\; 0 \leq \delta \leq 1)$$

para $K > 0$, $L > 0$ es cóncava para $\rho \geq -1$ y convexa para $\rho \leq -1$.

Solución: Después de una buena cantidad de trabajo, hallamos que

$$f''_{KK} = -(\rho+1)\delta(1-\delta)AK^{-\rho-2}L^{-\rho}\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-(1/\rho)-2}$$
$$f''_{LL} = -(\rho+1)\delta(1-\delta)AK^{-\rho}L^{-\rho-2}\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-(1/\rho)-2}$$
$$f''_{KL} = (\rho+1)\delta(1-\delta)AK^{-\rho-1}L^{-\rho-1}\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-(1/\rho)-2}$$

Se deduce que, para $\rho \geq -1$, tenemos $f''_{KK} \leq 0$ y $f''_{LL} \leq 0$, mientras que, para $\rho \leq -1$, tenemos que $f''_{KK} \geq 0$ y $f''_{LL} \geq 0$. Además, $f''_{KK}f''_{LL} - (f''_{KL})^2 \equiv 0$. Esto es también una consecuencia de ser f homogénea de grado 1 (véase Problema 7 de la Sección 16.5). Se sigue la conclusión de las partes (**a**) y (**b**) del Teorema 17.9.

Una variante de este teorema da condiciones *suficientes* de concavidad o convexidad *estricta*. En la sección siguiente se da una demostración.

Teorema 17.10

Sea $z = f(x, y)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y orden, definidas sobre un conjunto abierto convexo S del plano. Entonces:

(**a**) $f''_{11} < 0$ y $\begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} > 0 \Longrightarrow f$ es estrictamente cóncava

(**b**) $f''_{11} > 0$ y $\begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} > 0 \Longrightarrow f$ es estrictamente convexa

donde todas las desigualdades se deben verificar en todo S.

Nota 1: No se pueden invertir las implicaciones de las partes (**a**) y (**b**). Por ejemplo, es fácil ver que $f(x, y) = -x^4 - y^4$ es estrictamente cóncava en todo el plano, aun cuando $f''_{11}(0, 0) = 0$.

Nota 2: De las dos condiciones suficientes de la parte (**a**) se deduce que $f''_{22}(x, y) < 0$. Lo mismo se deduce en la parte (**b**) que $f''_{22}(x, y) > 0$.

Ejemplo 17.18

Demostrar que la función de Cobb–Douglas $Y = AK^aL^b$, definida para todo $K > 0$ y $L > 0$, es cóncava si $A > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $a + b \leq 1$, y es estrictamente cóncava si a y b son positivos y $a + b < 1$.

Solución: Se tiene que $Y''_{KK} = a(a-1)AK^{a-2}L^b$, $Y''_{KL} = Y''_{LK} = abAK^{a-1}L^{b-1}$ y $Y''_{LL} = b(b-1)AK^aL^{b-2}$. Además,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} Y''_{KK} & Y''_{KL} \\ Y''_{LK} & Y''_{LL} \end{vmatrix} &= a(a-1)AK^{a-2}L^b b(b-1)AK^aL^{b-2} - (abAK^{a-1}L^{b-1})^2 \\ &= abA^2K^{2a-2}L^{2b-2}\big[(a-1)(b-1) - ab\big] \\ &= abA^2K^{2a-2}L^{2b-2}\big[1-(a+b)\big]\end{aligned}$$

Las conclusiones se deducen inmediatamente del Teorema 17.9 (**a**) y del Teorema 17.10 (**a**).

Los resultados anteriores tienen implicaciones interesantes en la teoría de la optimización. Si se combinan los Teoremas 17.8 y 17.9 se obtiene el siguiente resultado útil.

Teorema 17.11 (Condiciones suficientes de óptimos globales)

Sea $f(x,y)$ una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un dominio convexo S, y sea (x_0, y_0) un punto estacionario de f interior a S.

(a) Si, para todo $(x,y) \in S$, es $f''_{11}(x,y) \leq 0$, $f''_{22}(x,y) \leq 0$, y $f''_{11}(x,y)f''_{22}(x,y) - \left[f''_{12}(x,y)\right]^2 \geq 0$, entonces (x_0, y_0) es un *máximo* de $f(x,y)$ en S.

(b) Si, para todo $(x,y) \in S$, es $f''_{11}(x,y) \geq 0$, $f''_{22}(x,y) \geq 0$, y $f''_{11}(x,y)f''_{22}(x,y) - \left[f''_{12}(x,y)\right]^2 \geq 0$, entonces (x_0, y_0) es un *mínimo* de $f(x,y)$ en S.

Ejemplo 17.19

Consideremos la función

$$C(x,y) = \frac{1}{100}x^2 - 10x + \frac{1}{300}y^3 - 9y + 20.600$$

definida para $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Hemos visto en el Ejemplo 17.4 que el único punto estacionario es $(x,y) = (500, 30)$. Demostrar que es un *mínimo*.

Solución: Se tiene que

$$C''_{11}(x,y) = \frac{1}{50}, \qquad C''_{12}(x,y) = 0, \qquad \text{y} \qquad C''_{22}(x,y) = \frac{1}{50}y$$

Así $C''_{11}(x,y) \geq 0$, $C''_{22}(x,y) \geq 0$ y $C''_{11}(x,y)C''_{22}(x,y) - \left[C''_{12}(x,y)\right]^2 = y/2500 \geq 0$ para todo $x \geq 0$, $y \geq 0$. Por tanto, por el Teorema 17.11 (**b**), $(500, 30)$ es un mínimo.

Ejemplo 17.20

Demostrar que en el Ejemplo 17.3 hemos hallado el máximo.

Solución: Tenemos $\pi(K,L) = 3K^{1/2}L^{1/3} - 0{,}1K - L$ con $K > 0$ y $L > 0$, luego

$$\pi''_{KK} = -\tfrac{3}{4}K^{-3/2}L^{1/3}, \qquad \pi''_{KL} = \tfrac{1}{2}K^{-1/2}L^{-2/3}, \qquad \text{y} \qquad \pi''_{LL} = -\tfrac{2}{3}K^{1/2}L^{-5/3}$$

Por tanto, $\pi''_{KK} < 0$ y $\pi''_{LL} < 0$ para todo $K > 0$ y $L > 0$. Además,

$$\pi''_{KK}\pi''_{LL} - (\pi''_{KL})^2 = \tfrac{1}{2}K^{-1}L^{-4/3} - \tfrac{1}{4}K^{-1}L^{-4/3} = \tfrac{1}{4}K^{-1}L^{-4/3} > 0$$

En virtud de la parte (a) del Teorema 17.11 tenemos que el punto estacionario $(K, L) = (50.625,\ 3.375)$ maximiza los beneficios.

Problemas

1 Sea $f(x, y) = x - y - x^2$ para todo x, y.

(a) Probar que f es cóncava: (i) usando el Teorema 17.9; (ii) usando el Teorema 17.6 de la Sección 17.7.

(b) Probar que $-e^{-f(x,y)}$ es cóncava.

2 (a) Demostrar que la función cuadrática general

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$$

es estrictamente cóncava si $ac - b^2 > 0$ y $a < 0$, mientras que es estrictamente convexa si $ac - b^2 > 0$ y $a > 0$. Usando la terminología de la Sección 15.8, esto significa, en particular, que si la forma cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ es definida negativa (positiva), entonces es una función estrictamente cóncava (convexa).

(b) Hallar condiciones necesarias y suficientes para que $f(x, y)$ sea cóncava o convexa.

3 Averiguar para qué valores de la constante a la siguiente función es cóncava, convexa, o ninguna de las dos:

$$f(x, y) = -6x^2 + (2a + 4)xy - y^2 + 4ay$$

4 Estudiar la convexidad o concavidad de las funciones siguientes:

(a) $f(x, y) = x + y - e^x - e^{x+y}$ (b) $g(x, y) = e^{x+y} + e^{x-y} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y$

5 Se define la función f en el intervalo $[-1, 1]$ por las relaciones $f(-1) = f(1) = 2$ y $f(x) = |x|$ para $|x| < 1$. Dibujar la gráfica de f y explicar por qué f es convexa. Nótese que f es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$, y no es diferenciable en $x = 0$.

6 Hallar el mayor dominio convexo S del plano xy en el cual la función $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$ sea cóncava.

7 Usar el Teorema 17.11 para comprobar que la solución del Ejemplo 17.1 maximiza verdaderamente los beneficios.

8 Usar el Teorema 17.11 para demostrar que la función f definida por $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$ para todo (x, y), tiene un máximo en $(x, y) = (1, 2)$.

9 Probar que los puntos estacionarios que se hallaron en los Problemas 4, 7 y 8 de la Sección 17.1 son máximos

10 Dos empresas A y B producen cada una su propia versión, X e Y, de un bien de consumo, en cantidades x e y, que se venden a los precios unitarios p y q, respectivamente. Cada empresa fija su precio y produce exactamente la cantidad demandada. Las demandas de los dos bienes están dadas por $x = 29 - 5p + 4q$, $y = 16 + 4p - 6q$. La empresa A tiene costes totales $5 + x$, y B tiene $3 + 2y$. Supongamos también que las funciones que hay que maximizar tienen máximos en precios positivos.

(a) Inicialmente las dos empresas cooperan como si fueran un monopolista para maximizar sus beneficios conjuntos. Hallar los precios (p, q), los niveles de producción (x, y), y los beneficios de las empresas A y B.

(b) Más tarde deciden dejar de cooperar y cada una busca maximizar su propio beneficio. Si q es fijo, ¿qué precio p pondrá A? (Hallar p como función $p = p_A(q)$ de q.) Si p es fijo, ¿qué precio q pondrá B? (Hallar q como función $q = q_B(p)$ de p.)

(c) Bajo las hipótesis de la parte (b), ¿qué precios constantes de equilibrio son posibles? ¿Cuáles son los niveles de producción y los ingresos netos en este caso?

(d) Dibujar un diagrama con p sobre el eje horizontal y q sobre el vertical, y representar en él las curvas de "reacción" $p_A(q)$ y $q_B(p)$. Mostrar en el diagrama cómo cambian los precios con el tiempo si A rompe la cooperación en primer lugar haciendo máximo su beneficio mientras B mantiene fijo su precio inicial, luego B responde maximizando su beneficio con el precio de A fijo, luego A responde, y así sucesivamente.

Problemas avanzados

11 Consideremos la función $f(x, y) = (\ln x)^a (\ln y)^b$ definida para $x > 1$ e $y > 1$, donde $a > 0$, $b > 0$ y $a + b < 1$. Probar que f es estrictamente cóncava.

17.9 TESTS DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD: EL CASO DE n VARIABLES

Se pueden generalizar los resultados de los Teoremas 17.9 y 17.10 sobre concavidad y convexidad de funciones de dos variables a funciones de n variables. Sea $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ una función C^2 en un dominio S de $\mathbb{R}^n$. Recuérdese de la Sección 15.5 que la matriz

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = [f''_{ij}(\mathbf{x})]_{n\times n} \tag{17.21}$$

se llama la *hessiana*, o la *matriz hessiana*, de f en $\mathbf{x}$. En la Sección 15.9 hemos llamado *menores principales dominantes* de $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ a los n determinantes

$$D_k(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) & \ldots & f''_{1k}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) & \ldots & f''_{2k}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{k1}(\mathbf{x}) & f''_{k2}(\mathbf{x}) & \ldots & f''_{kk}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{17.22}$$

Se puede generalizar el Teorema 17.10 en la forma siguiente:

$(-1)^k D_k(\mathbf{x}) > 0$ para $k = 1, \ldots, n$ y para todo $\mathbf{x} \in S$ $\Longrightarrow$ f es estrictamente cóncava en S (17.23)

$D_k(\mathbf{x}) > 0$ para $k = 1, \ldots, n$ y para todo $\mathbf{x} \in S$ $\Longrightarrow$ f es estrictamente convexa en S (17.24)

Si $n = 2$, las condiciones de (17.23) se convierten en $D_1(\mathbf{x}) < 0$ y $D_2(\mathbf{x}) > 0$. Como

$$D_1(\mathbf{x}) = f''_{11}(\mathbf{x}) \qquad \text{y} \qquad D_2(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) \end{vmatrix}$$

las condiciones de (17.23) se convierten en las de la parte (**a**) del Teorema 17.10 en la Sección 17.8, y las condiciones de (17.24) se reducen a las de la parte (**b**), con $\mathbf{x} = (x, y)$ en cada caso. Se puede generalizar también el Teorema 17.9. Para ello hay que considerar los signos de *todos* los menores principales de $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ y no sólo de los dominantes. Un menor principal arbitrario de orden r de $\mathbf{H}(\mathbf{x})$

se obtiene suprimiendo $n - r$ filas y las $n - r$ columnas con los mismos índices, y se designa por $\Delta_r(\mathbf{x})$.

Ejemplo 17.21

Si $n = 2$, la matriz hessiana es

$$\mathbf{H}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x_1, x_2) & f''_{12}(x_1, x_2) \\ f''_{21}(x_1, x_2) & f''_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Los menores principales de orden 1 son los elementos diagonales $f''_{11}(x_1, x_2)$ y $f''_{22}(x_1, x_2)$. Nótese que no se puede obtener el elemento $f''_{12}(x_1, x_2)$ suprimiendo una fila y la columna con el mismo índice. El único menor principal de orden 2 es el dado por $|\mathbf{H}(x_1, x_2)| = f''_{11}(x_1, x_2)f''_{22}(x_1, x_2) - [f''_{12}(x_1, x_2)]^2$.

Dicho brevemente, si $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ es una función C^2 definida en un conjunto abierto y convexo S de $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$f \text{ es cóncava en } S \iff \text{para todo } \Delta_r(\mathbf{x}) \text{ y todo } \mathbf{x} \in S,\ (-1)^r\,\Delta_r(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ para } r = 1, \ldots, n. \tag{17.25}$$

$$f \text{ es convexa en } S \iff \text{para todo } \Delta_r(\mathbf{x}) \text{ y todo } \mathbf{x} \in S,\ \Delta_r(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ para } r = 1, \ldots, n. \tag{17.26}$$

Si $n = 2$, se deduce del Ejemplo 17.21 que las condiciones de (17.25) y (17.26) son las mismas que las del Teorema 17.9.

Condiciones de segundo orden para óptimos locales

Enunciamos brevemente las condiciones de segundo orden para puntos óptimos local de una función de n variables:

Teorema 17.12 (Condiciones necesarias y suficientes para puntos óptimos locales)

Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ una función C^2 definida en un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x}^0$ un punto estacionario de f interior a S, o sea

$$f'_i(\mathbf{x}^0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Sea $D_k(\mathbf{x}^0)$ definido en (17.22), y designemos por $\Delta_r(\mathbf{x}^0)$ a un menor principal arbitrario de orden r de la matriz hessiana. Entonces:

(a) $\mathbf{x}^0$ es un máximo local $\Rightarrow (-1)^r\Delta_r(\mathbf{x}^0) \geq 0$ para todos los menores principales $\Delta_r(\mathbf{x}^0)$ de orden $r = 1, \ldots, n$.

(b) $(-1)^k D_k(\mathbf{x}^0) > 0$, $k = 1, \ldots, n \Rightarrow \mathbf{x}^0$ es un máximo local.

(c) $\mathbf{x}^0$ es un mínimo local $\Rightarrow \Delta_r(\mathbf{x}^0) \geq 0$ para todos los menores principales $\Delta_r(\mathbf{x}^0)$ de orden $r = 1, \ldots, n$.

(d) $D_k(\mathbf{x}^0) > 0$, $k = 1, \ldots, n \Rightarrow \mathbf{x}^0$ es un mínimo local.

Las partes (**b**) y (**d**) de lo anterior constituyen los resultados más útiles. Nótese que todos los determinantes se evalúan en $\mathbf{x}^0$. De la continuidad de las parciales de segundo orden y de la definición de determinante se deduce que si las desigualdades determinantales de la parte (**b**), por ejemplo, se verifican en $\mathbf{x}^0$, también se verifican en un entorno pequeño N de este punto.

En este caso, (17.23) implica que f es (estrictamente) cóncava en N y la conclusión de la parte (**b**) se deduce del Teorema 17.8 (**a**) en la Sección 17.7.

Recordemos que un punto estacionario $\mathbf{x}^0$ de f que no es ni un máximo local ni un mínimo local se llama un **punto de silla**. El resultado siguiente da condiciones suficientes de punto de silla (véase el Problema 3 para la demostración):

Test de punto de silla

Si $D_n(\mathbf{x}^0) \neq 0$ y no se satisfacen ni las condiciones determinantales en (**b**) ni las de (**d**) del Teorema 17.12, entonces el punto estacionario $\mathbf{x}^0$ de f es un punto de silla. (17.27)

Ejemplo 17.22

La función

$$f(x, y, z) = x^3 + 3xy + 3xz + y^3 + 3yz + z^3$$

tiene puntos estacionarios $(-2, -2, -2)$ y $(0, 0, 0)$: Clasificarlos usando el Teorema 17.12 y (17.27).

Solución: La matriz hessiana es

$$\begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} \\ f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} \\ f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 3 & 3 \\ 3 & 6y & 3 \\ 3 & 3 & 6z \end{pmatrix}$$

Los menores principales dominantes evaluados en $(-2, -2 - 2)$ valen

$$6(-2) = -12, \qquad \begin{vmatrix} 6(-2) & 3 \\ 3 & 6(-2) \end{vmatrix} = 135, \qquad \begin{vmatrix} 6(-2) & 3 & 3 \\ 3 & 6(-2) & 3 \\ 3 & 3 & 6(-2) \end{vmatrix} = -1.350$$

Por tanto, $(-2, -2, -2)$ es un máximo local.

Los menores principales dominantes evaluados en $(0, 0, 0)$ valen

$$6 \cdot 0 = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54$$

No se satisfacen las condiciones (**b**) ni (**d**). Además, $D_3(0, 0, 0) = 54 \neq 0$. Por (17.27), $(0, 0, 0)$ es un punto de silla.

Hasta ahora hemos enunciado los resultados principales de esta sección en términos de determinantes, porque los criterios determinantales son los que se usan más frecuentemente en economía. Sin embargo, podemos expresar esos resultados en términos de la condición de definida positiva o negativa de la forma cuadrática cuya matriz es la hessiana. En efecto, la forma natural de demostrar esos resultados es estudiar las propiedades de esas formas cuadráticas.

Teorema 17.13

Sea $z = f(\mathbf{x})$ una función C^2 definida en un conjunto abierto convexo S de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es la matriz hessiana de f, entonces:

(**a**) f es cóncava $\iff$ $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa para todo $\mathbf{x} \in S$.

(**b**) f es convexa $\iff$ $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva para todo $\mathbf{x} \in S$.

Demostración: (**a**) Supongamos que f es cóncava. Fijado $\mathbf{x} \in S$ arbitrario y $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, designemos por $\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{x} + t\mathbf{h}$, para cada número real t. Como S es un conjunto abierto, existe un número positivo δ tal que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{h} \in S$ para todo $|t| < \delta$. Sea I el intervalo abierto $(-\delta, \delta)$ y pongamos

$$g(t) = f(\mathbf{x}(t)) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$$

para $t \in I$. Como f es una función C^2, el Problema 11 de la Sección 16.2 implica que g es dos veces diferenciable y $g''(t) = \mathbf{h}'\mathbf{H}(\mathbf{x}(t))\mathbf{h}$. Como g es una función cóncava f de la función lineal $\mathbf{x}(t)$ de t, el resultado de (17.19) dice que g es cóncava. Por tanto, $g''(t) \leq 0$ en I. Para $t = 0$ se tiene $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$, lo que da $\mathbf{h}'\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{h} \leq 0$. Esto es cierto para todo $\mathbf{x} \in S$ y todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, luego $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa para todo $\mathbf{x} \in S$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa en todo S. Tomemos dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}^0$ y $\mathbf{x}^1$ de S. Para todo $t \in [0, 1]$ se escribe $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) = (1-t)\mathbf{x}^0 + t\mathbf{x}^1$. Como S es convexo se deduce que $\mathbf{x}(t) \in S$, y así se puede definir

$$g(t) = f(\mathbf{x}(t)) = f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)) \tag{1}$$

Entonces el Problema 11 de la Sección 16.2, para $\mathbf{h} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0$, implica que

$$g''(t) = (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)'\mathbf{H}(\mathbf{x}(t))(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) \tag{2}$$

Para todo $t \in [0, 1]$ eso es ≤ 0 por la hipótesis de que $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa en todo S. Por tanto g es cóncava en $[0, 1]$. En particular,

$$\begin{aligned} f((1-t)\mathbf{x}^0 + t\mathbf{x}^1) &= g(t) = g((1-t)\cdot 0 + t \cdot 1) \geq (1-t)g(0) + tg(1) \\ &= (1-t)f(\mathbf{x}^0) + tf(\mathbf{x}^1) \end{aligned} \tag{3}$$

Así, $f((1-t)\mathbf{x}^0 + t\mathbf{x}^1) \geq (1-t)f(\mathbf{x}^0) + tf(\mathbf{x}^1)$ para todo $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in S$ y todo $t \in [0, 1]$, luego f es cóncava.

Para demostrar la parte (**b**), sustituir f por $-f$ en la parte (**a**).

Teorema 17.14

Sea $z = f(\mathbf{x})$ una función C^2 definida en un conjunto abierto convexo S de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ designa a la matriz hessiana de f, entonces:

(**a**) f es estrictamente cóncava si $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es definida negativa para todo $\mathbf{x} \in S$.

(**b**) f es estrictamente convexa si $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es definida positiva para todo $\mathbf{x} \in S$.

Demostración: (a) Tomemos dos puntos arbitrarios $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_0$ de S con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ y definamos g como en (1) para $t \in [0, 1]$. Si $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es definida negativa en S, por (2) es $g''(t) < 0$ para todo $t \in (0, 1)$, y así g es estrictamente cóncava. Pero entonces hay desigualdad estricta en (3) cuando $t \in (0, 1)$ y deducimos que f es estrictamente cóncava.

Los resultados anteriores sobre concavidad o convexidad, estricta o no, en términos de los signos de ciertos menores se deducen ahora inmediatamente de los Teoremas 17.13 y 17.14 usando los tests de definida, o semidefinida, negativa o positiva que vimos en las Secciones 15.8 y 15.9.

Recordemos también que el hecho de que la matriz hessiana sea definida, o semidefinida, negativa o positiva se puede averiguar por los signos de los autovalores, como ya se estudió en el Teorema 15.2 de la Sección 15.9. Así, la parte (**a**) del Teorema 17.13 se puede enunciar de nuevo diciendo que, si f es una función C^2 definida en un conjunto abierto convexo S, entonces f es cóncava si y sólo si $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ tiene sus autovalores no positivos para todo $\mathbf{x} \in S$. La parte (**a**) del Teorema 17.14 se enuncia diciendo que f es estrictamente cóncava si $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ tiene sus autovalores negativos para todo $\mathbf{x} \in S$. Se pueden enunciar, de manera obvia, las condiciones correspondientes para que f sea convexa o estrictamente convexa.

Problemas

1 La función

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$$

está definida en todo $\mathbb{R}^3$ y tiene un único punto estacionario. Demostrar que es un mínimo local.

2 Clasificar los puntos estacionarios de las funciones siguientes:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$

(b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 9xy - 9xz + 27x$

(c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 20x_2 + 48x_3 + 6x_4 + 8x_1x_2 - 4x_1^2 - 12x_3^2 - x_4^2 - 4x_2^3$

Problemas avanzados

3 Demostrar (17.27). (*Indicación:* $D_n(\mathbf{x}^0) \neq 0$ implica que 0 no es un autovalor de la matriz hessiana. Si no se satisfacen las condiciones de (**b**) ni las de (**d**) en el Teorema 17.12, entonces (usando los Teoremas 15.2 y 15.3 de la Sección 15.9) la matriz hessiana debe tener autovalores positivos y negativos. Así, la matriz hessiana es indefinida.)

17.10 FUNCIONES CUASICÓNCAVAS Y CUASICONVEXAS

Sea $f(\mathbf{x})$ una función definida en un conjunto convexo S de $\mathbb{R}^n$. Para cada número real a se define el conjunto P_a por la relación

$$P_a = \{\mathbf{x} \in S : f(\mathbf{x}) \geq a\} \tag{17.28}$$

Entonces P_a es un subconjunto de S que se llama un **conjunto sobrenivel** de f. La Figura 17.22 muestra un ejemplo para una función de dos variables.

La función cuya gráfica es la de la Figura 17.21 no es cóncava. Por ejemplo, el segmento que une los puntos P y Q de la gráfica está *por encima* de la gráfica de f, no por debajo. Por otra parte, la función es un ejemplo típico de una función cuasicóncava. Nótese que todos los conjuntos sobrenivel de la función son convexos. La Figura 17.22 muestra un conjunto sobrenivel típico de la función. Damos la definición siguiente:

La función f, definida sobre un conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$, es **cuasicóncava** si el conjunto sobrenivel $P_a = \{\mathbf{x} \in S : f(\mathbf{x}) \geq a\}$ es convexo para todo número a.	(17.29)

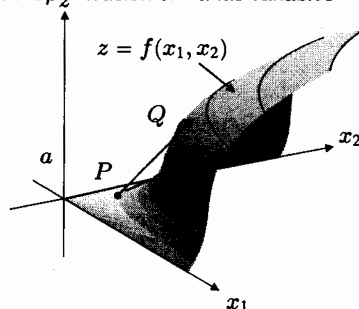


FIGURA 17.21 La gráfica de una función cuasicóncava $z = f(x_1, x_2)$.

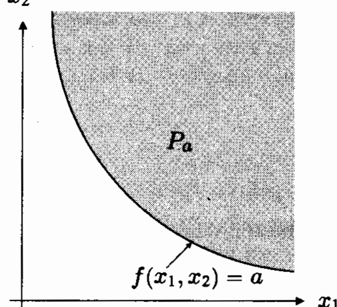


FIGURA 17.22 Un conjunto sobrenivel para la función $f(x_1, x_2)$ de la Figura 17.21.

Se dice que f es **cuasiconvexa** si $-f$ es cuasicóncava. Por tanto, f es cuasiconvexa si y sólo si el **conjunto bajonivel** $P^a = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq a\}$ es convexo para todo número a. La Figura 17.21 muestra un ejemplo de una función cuasicóncava que no es cóncava. Por otra parte, una función cóncava (convexa) definida sobre un conjunto convexo S es cuasicóncava (cuasiconvexa):

> Si $f(\mathbf{x})$ es cóncava, entonces $f(\mathbf{x})$ es cuasicóncava.
> Si $f(\mathbf{x})$ es convexa, entonces $f(\mathbf{x})$ es cuasiconvexa. (17.30)

Demostración: Para demostrar el primer enunciado de (17.30), supongamos que f es cóncava en el conjunto S. Tomemos dos puntos arbitrarios $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P_a$ y sea $\lambda \in [0, 1]$. Como S es convexo, $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in S$. Además, como $f(\mathbf{x}) \geq a$, $f(\mathbf{y}) \geq a$ y $\lambda \in [0, 1]$, la condición de concavidad para f implica que

$$f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \geq (1-\lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}) \geq (1-\lambda)a + \lambda a = a$$

Esto prueba que $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in P_a$. Por tanto, el conjunto sobrenivel P_a es convexo.

El segundo enunciado de (17.30) se deduce aplicando el primero a $-f(x)$, como siempre.

La siguiente caracterización de funciones cuasicóncavas es útil.

> **Teorema 17.15**
>
> Sea f una función de n variables definida en un conjunto convexo S de $\mathbb{R}^n$. Entonces f es cuasicóncava si y sólo si, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{x}^0 \in S$ y todo $\lambda \in [0, 1]$, se tiene
>
> $$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0) \implies f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}^0) \quad (17.31)$$

Demostración: Supongamos que f es cuasicóncava, que $\mathbf{x}, \mathbf{x}^0 \in S$ y que $\lambda \in [0,1]$. Supongamos que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0)$ y sea $a = f(\mathbf{x}^0)$. Se ve que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}^0$ pertenecen al conjunto sobrenivel $P_a = \{\mathbf{u} \in S : f(\mathbf{u}) \geq a\}$. Como P_a es convexo, $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^0 \in P_a$, lo que implica que $f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^0) \geq a = f(\mathbf{x}^0)$.

Recíprocamente, supongamos que se verifica (17.31), y sea a un número arbitrario. Hay que probar que $P_a = \{\mathbf{u} \in S : f(\mathbf{u}) \geq a\}$ es convexo. Si P_a es vacío o consta solamente de un punto, entonces P_a es convexo. Si P_a contiene más de un punto, tomemos dos puntos arbitrarios $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}^0$ de P_a, y sea $\lambda \in [0,1]$. Supongamos, por ejemplo, que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0)$. Entonces, por (17.31), $f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}^0)$. Como $f(\mathbf{x}^0) \geq a$, se deduce que $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^0 \in P_a$ y así P_a es convexo.

Damos a continuación algunas propiedades útiles de las funciones cuasicóncavas o cuasiconvexas:

Teorema 17.16

(**a**) Una suma de funciones cuasicóncavas (cuasiconvexas) no es necesariamente cuasicóncava (cuasiconvexa).

(**b**) Si $f(\mathbf{x})$ es cuasicóncava (cuasiconvexa) y F es estrictamente creciente, entonces también $F(f(\mathbf{x}))$ es cuasicóncava (cuasiconvexa).

(**c**) Si $f(\mathbf{x})$ es cuasicóncava (cuasiconvexa) y F es estrictamente decreciente, entonces también $F(f(\mathbf{x}))$ es cuasiconvexa (cuasicóncava).

Demostración: El lector se podrá convencer a sí mismo de que la parte (**a**) es cierta si hace a la vez el Problema 3.

Las demostraciones de las partes (**b**) y (**c**) son casi idénticas, luego demostramos sólo (**b**). Supongamos que $f(\mathbf{x})$ es cuasicóncava y que F es estrictamente creciente. Si $F(f(\mathbf{x})) \geq F(f(\mathbf{x}^0))$, entonces $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0)$ porque F es estrictamente creciente. Ahora bien, el Teorema 17.15 implica que $f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}^0)$ para todo $\lambda \in [0,1]$ porque f es cuasicóncava. Como F es creciente tenemos que $F(f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^0)) \geq F(f(\mathbf{x}^0))$, lo que demuestra que $F(f(\mathbf{x}))$ es cuasicóncava. El caso de cuasiconvexa se demuestra de manera análoga.

Ejemplo 17.23

Demostrar que $f(x) = e^{-x^2}$ es cuasicóncava. Sea $F_1(u) = \ln u$ para $u > 0$ y $F_2(u) = 1/u$ para $u > 0$. Ver si (**b**) y (**c**) del Teorema 17.16 se confirman en este caso.

Solución: Los conjuntos sobrenivel de f están definidos por $\{x : e^{-x^2} \geq a\}$. El máximo de f es 1 en $x = 0$. Por tanto, si $a = 1$, el conjunto sobrenivel consta del único número 0. Si $a > 1$, el conjunto sobrenivel es vacío. Si $a < 1$, entonces $e^{-x^2} \geq a$ si y sólo si $-x^2 \geq \ln a$ lo que equivale a que $x^2 \leq -\ln a$. Los valores de x que satisfacen esta desigualdad están en un intervalo. Así, todos los conjuntos sobrenivel son convexos, luego f es cuasicóncava.

La función $F_1(u) = \ln u$ es estrictamente creciente para $u > 0$. Además, $F_1(f(x)) = \ln(e^{-x^2}) = -x^2$, que es cóncava y, por tanto, cuasicóncava.

La función $F_2(u) = 1/u$ es estrictamente decreciente para $u > 0$. Además, $F_2(f(x)) = 1/e^{-x^2} = e^{x^2}$, que es convexa y, por tanto, cuasiconvexa. (Si $y = e^{x^2}$, entonces $y' = 2xe^{x^2}$, y así $y'' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} > 0$ para todo x.)

Estos resultados están de acuerdo con el Teorema 17.16.

Ejemplo 17.24

La función de Cobb–Douglas está definida por

$$z = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n} \qquad (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n \text{ y } A \text{ positivos}) \tag{1}$$

para todo $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$. Tomando ln en cada lado tenemos

$$\ln z = \ln A + a_1 \ln x_1 + \cdots + a_n \ln x_n$$

Como suma de funciones cóncavas, $\ln z$ es cóncava y, por tanto, cuasicóncava. Ahora bien, $z = e^{\ln z}$ y la función $u \to e^u$ es creciente. Por tanto, z es una función creciente de una función cuasicóncava, y así es cuasicóncava. Nótese que la *única* restricción sobre las constantes $a_1, \ldots, a_n$ es que sean todas positivas. Si $a_1 + \cdots + a_n < 1$, la función de Cobb–Douglas es estrictamente cóncava (véase el Ejemplo 17.18, Sección 17.8 para el caso $n = 2$ y el Problema 6 de esta sección para el caso general). Para $a_1 + \cdots + a_n > 1$, no es cóncava. Si ponemos $x_1 = \cdots = x_n = x$, entonces $z = Ax^{a_1+\cdots+a_n}$, que es convexa para $a_1+\cdots+a_n > 1$. Así la función es convexa a lo largo del rayo $x_1 = \cdots = x_n = x$.) Si $a_1+\cdots+a_n \leq 1$, la función de Cobb–Douglas no sólo es cuasicóncava, sino también cóncava.[5] El recuadro siguiente enumera algunas de las propiedades más importantes de la función de Cobb–Douglas.

La función de Cobb–Douglas $z = Ax_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$, definida para $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$, donde A, $a_1, \ldots, a_n$ son positivas, es: (17.32)

(**a**) homogénea de grado $a_1 + \cdots + a_n$

(**b**) cuasicóncava para todo $a_1, \ldots, a_n > 0$

(**c**) cóncava para $a_1 + \cdots + a_n \leq 1$

(**d**) estrictamente cóncava para $a_1 + \cdots + a_n < 1$

En el Ejemplo 17.11 de la Sección 17.5, hemos señalado que los conjuntos sobrenivel de una función de utilidad se suponen a menudo convexos, lo que significa que la función de utilidad es cuasicóncava. Una hipótesis ligeramente más restrictiva es que la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava, según la definición siguiente:

Una función $f(\mathbf{x})$ es **estrictamente cuasicóncava** si

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0),\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0,\ \text{y}\ 0 < \lambda < 1 \implies f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^0) > f(\mathbf{x}^0) \tag{17.33}$$

De la definición y del Teorema 17.15 se deduce inmediatamente que, si $f(\mathbf{x})$ es estrictamente cuasicóncava, entonces $f(\mathbf{x})$ es cuasicóncava.

Ejemplo 17.25

Una función $f(\mathbf{x})$ es cuasicóncava, pero no necesariamente cóncava, si sus conjuntos sobrenivel tienen la forma correcta. Recuérdese que el problema de maximizar $f(\mathbf{x})$ es equivalente al de maximizar $F(f(\mathbf{x}))$ para toda función estrictamente creciente F de una variable (véase

[5] Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado $q \in (0, 1]$, se puede demostrar que f es cóncava si y sólo si es cuasicóncava. Véase P. Newman, "Some properties of concave functions" *Journal of Economic Theory* 1, (1969) pp. 291-314.

Teorema 17.2 de la Sección 17.2). Surge la cuestión de si una función cuasicóncava $f(\mathbf{x})$ se puede convertir en una función cóncava $F(f(\mathbf{x}))$ mediante una transformación F estrictamente creciente. La función cuya gráfica es la de la Figura 17.23 prueba que esto puede no ser posible.

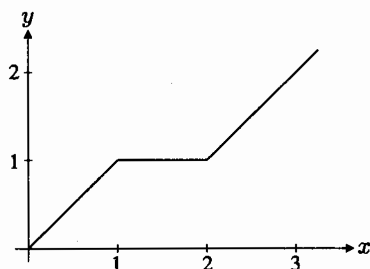


FIGURA 17.23 La función *f* es cuasicóncava, pero no se puede "concavificar" por una transformación estrictamente creciente.

La definición analítica de la función es

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ x-1, & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Esta función es cuasicóncava porque es creciente. Los conjuntos $\{x \in R : f(x) \geq a\}$ son los intervalos convexos $[a, \infty)$ para $a \leq 1$, y $[1+a, \infty)$ para $a \geq 1$. Toda transformación estrictamente creciente $F(f(\mathbf{x}))$ produce una función que es estrictamente creciente para $x < 1$, constante para $1 \leq x \leq 2$, y estrictamente creciente para $x > 2$. Ninguna función de este tipo puede ser cóncava.

Un criterio determinantal para cuasiconcavidad

Finalizamos esta sección con un criterio para comprobar la cuasiconcavidad de una función estudiando los signos de ciertos determinantes, llamados **hessianos ampliados**. Éstos son los hessianos ordinarios que se usan para determinar la concavidad de una función, orlados con una fila y una columna adicional que está formada por las parciales primeras de la función.

Teorema 17.17

Sea f una C^2 función definida en un conjunto abierto y convexo S de $\mathbb{R}^n$. Se definen los determinantes hessianos ampliados $D_r(\mathbf{x})$, $r = 1, \ldots, n$, por la relación

$$D_r(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} 0 & f_1'(\mathbf{x}) & \ldots & f_r'(\mathbf{x}) \\ f_1'(\mathbf{x}) & f_{11}''(\mathbf{x}) & \ldots & f_{1r}''(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_r'(\mathbf{x}) & f_{r1}''(\mathbf{x}) & \ldots & f_{rr}''(\mathbf{x}) \end{vmatrix}$$

(a) Una condición necesaria para que f sea cuasicóncava es que $(-1)^r D_r(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $r = 1, \ldots, n$ y todo $\mathbf{x} \in S$.

(b) Una condición suficiente para que f sea cuasicóncava es que $(-1)^r D_r(\mathbf{x}) > 0$ para todo $r = 1, \ldots, n$ y todo $\mathbf{x} \in S$.

Ejemplo 17.26

Sabemos por el Ejemplo 17.24 que la función de Cobb–Douglas $z = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$, definida para todo $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ es cuasicóncava. Utilizamos el Teorema 17.17 para comprobar este resultado.

Consideramos el caso $n = 3$, pero el razonamiento se puede generalizar fácilmente. Las parciales primeras y segundas se pueden escribir

$$z_i' = \frac{a_i}{x_i}z, \qquad z_{ii}'' = \frac{a_i(a_i-1)}{x_i^2}z, \qquad z_{ij}'' = \frac{a_i a_j}{x_i x_j}z \quad (i \neq j)$$

Por tanto, el determinante $D_3 = D_3(x_1, x_2, x_3)$ es

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1z/x_1 & a_2z/x_2 & a_3z/x_3 \\ a_1z/x_1 & a_1(a_1-1)z/x_1^2 & a_1a_2z/x_1x_2 & a_1a_3z/x_1x_3 \\ a_2z/x_2 & a_2a_1z/x_2x_1 & a_2(a_2-1)z/x_2^2 & a_2a_3z/x_2x_3 \\ a_3z/x_3 & a_3a_1z/x_3x_1 & a_3a_2z/x_3x_2 & a_3(a_3-1)z/x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a_1a_2a_3}{(x_1x_2x_3)^2}z^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1-1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2-1 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3-1 \end{vmatrix}$$

Nótese que hemos sacado factor común sistemáticamente de cada fila y columna. Ahora calculamos el último determinante. Sumando a la primera fila las restantes se puede sacar factor común de ésta el número $a_1 + a_2 + a_3$ y así el determinante vale

$$(a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1-1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2-1 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3-1 \end{vmatrix}$$

En este determinante, restamos de cada columna la primera, obteniendo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3$$

Así,

$$D_3 = (-1)^3\frac{a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)}{(x_1x_2x_3)^2}z^4$$

Si A, a_1, a_2, a_3 son positivos, entonces

$$(-1)^3D_3 = (-1)^6\frac{a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)}{(x_1x_2x_3)^2}z^4 > 0$$

Unos cálculos semejantes prueban que

$$(-1)^2D_2 = \frac{a_1a_2(a_1+a_2)}{(x_1x_2)^2}z^3 > 0 \qquad \text{y} \qquad (-1)^1D_1 = \frac{a_1^2}{x_1^2}z^2 > 0$$

Así deducimos del Teorema 17.17 (**b**) que la función de Cobb–Douglas $z = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}$ es cuasicóncava, exigiendo solamente que A, a_1, a_2 y a_3 sean positivos.

Problemas

1 Averiguar cuáles de las funciones siguientes son cuasicóncavas:

(a) $f(x) = 3x + 4$

(b) $f(x, y) = ye^x, \qquad (y > 0)$

(c) $f(x, y) = -x^2y^3, \qquad (x > 0,\ y > 0)$

(d) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ si $x < 0$; $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.

2 Demostrar que cualquier función creciente (o decreciente) de una variable definida en un intervalo es cuasicóncava.

3 Demostrar con un ejemplo que la suma de funciones cuasicóncavas no es en general cuasicóncava.

4 Usar el Teorema 17.15 para demostrar que $f(\mathbf{x})$ es cuasicóncava si y sólo si

$$f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^0) \geq \min\{\, f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}^0)\,\} \text{ para todo } \lambda \in [0,1] \text{ y todo } \mathbf{x}, \mathbf{x}^0 \in S$$

5 ¿Qué dice el Teorema 17.17 (**b**) sobre las funciones de una variable?

Problemas avanzados

6 Considérese la función de Cobb–Douglas $z = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ del Ejemplo 17.24.

(a) Calcular el k-ésimo menor principal dominante del hessiano $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ como en (17.22) y demostrar que vale

$$D_k = \frac{a_1\cdots a_k}{(x_1\cdots x_k)^2} z^k \begin{vmatrix} a_1 - 1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 - 1 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & a_k & \dots & a_k - 1 \end{vmatrix}$$

(b) Demostrar que

$$D_k = (-1)^{r-1}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i - 1\Big) z^k \frac{a_1\cdots a_k}{(x_1\cdots x_k)^2}$$

(*Indicación:* Sumar a la primera fila las restantes; sacar factor común $\sum_{i=1}^{k} a_i - 1$; restar de cada columna del nuevo determinante la primera.)

(c) Demostrar que la función es estrictamente cóncava para $a_1 + \cdots + a_n < 1$.

7 Sea $F(x, y)$ una función C^2 y supongamos que la ecuación $F(x, y) = c$ define implícitamente a $y = \phi(x)$ como función C^2 de x. Demostrar que, si F es cuasicóncava y $F_2'(x, y) > 0$, entonces ϕ es convexa. (*Indicación:* Usar (16.13), Sección 16.3 y el Teorema 17.17 de esta sección.)

18

Optimización restringida

> *Las matemáticas están fuera de este tumulto*
> *que es la vida humana, pero sus métodos y relaciones*
> *son un espejo, un espejo increíblemente puro*
> *de las relaciones que ligan los hechos de nuestra existencia.*
> —*Konrad Knopp* (1928)

Las variables que aparecen en los problemas económicos de optimización están casi siempre sometidas a ciertas restricciones. Por ejemplo, precios y cantidades son a menudo no negativos por definición, y la escasez impone que las cantidades que se consumen estén acotadas superiormente. Además, cuotas de producción, limitaciones presupuestarias y otras condiciones pueden restringir el rango de elección.

Comenzamos este capítulo estudiando el problema de maximizar o minimizar una función cuyas variables deben satisfacer una o más restricciones en forma de igualdades. Un ejemplo económico típico puede ser el de un consumidor que decide qué cantidad m de su renta va a gastar en x unidades de un bien al precio unitario p, y qué cantidad y va a reservar para gastar en otros bienes. En este caso el consumidor se enfrenta a la restricción presupuestaria $px + y = m$. Supongamos que la función de utilidad $u(x, y)$ representa las preferencias. En términos matemáticos el consumidor debe resolver el problema de hallar el punto (x, y) que maximice $u(x, y)$ sujeta a $px + y = m$. Esto es un *problema de maximización restringida*. En este caso, como $y = m - px$, se puede expresar el mismo problema como uno de *maximización no restringida* de la función $f(x) = u(x, m - px)$ con respecto a la única variable x. Ya vimos en la Sección 17.1 este método de reducir un problema de optimización restringida a uno no restringido.

Más generalmente, consideremos un consumidor que debe resolver el problema de decidir cuánto comprar de n bienes distintos en un cierto período. Designemos por $U(x_1, \dots, x_n)$ a la función de utilidad (véase Ejemplo 15.8, Sección 15.1). Supongamos que el precio unitario del bien i es fijo e igual a p_i. Así $p_1x_1 + \cdots + p_nx_n$ es la cantidad que se necesita para adquirir el vector de compra (o el vector de bienes) $(x_1, \dots, x_n)$. Más aún, supongamos que el consumidor quiere gastarse una cantidad m en los n bienes. Entonces es posible comprar cualquier vector $(x_1, \dots, x_n)$ de bienes que verifique la *restricción presupuestaria* $p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = m$. El problema es, pues,

elegir de entre todos los vectores de bienes que satisfagan la restricción presupuestaria uno que haga máxima la utilidad. En símbolos, el problema es

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} U(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{sujeta a } p_1x_1+\cdots+p_nx_n=m \tag{18.1}$$

Se supone tácitamente que $x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0$. Aquí también podremos despejar una de las incógnitas de la restricción presupuestaria, por ejemplo la x_n, en términos de $x_1,\ldots,x_{n-1}$. De nuevo el problema (18.1) se puede formular como uno de maximización no restringida.

Cuando la restricción es una función complicada, o cuando hay todo un sistema de ecuaciones para expresar las restricciones, el método de sustitución puede llegar a ser inaplicable en la práctica o, al menos, muy difícil de aplicar. En estos casos hay que usar otras técnicas. Los economistas usan mucho, en particular, el **método de los multiplicadores de Lagrange**. De hecho, también usan ese método incluso en casos de optimización no restringida. La razón es que los multiplicadores de Lagrange tienen unas interpretaciones económicas importantes.[1]

Hay otros problemas de optimización, en los cuales las restricciones vienen expresadas por desigualdades en vez de por igualdades, y se llaman **problemas de programación**. El estudio sistemático de estos problemas es relativamente reciente. En efecto, los resultados principales se han obtenido en los últimos 40 ó 50 años. Damos una breve introducción a los problemas de programación no lineal en las Secciones 18.8 a 18.10. La programación lineal, en la cual todas las funciones son lineales, es el objeto de estudio del Capítulo 19.

18.1 DOS VARIABLES Y UNA RESTRICCIÓN DE IGUALDAD

Consideremos el problema de maximizar (o minimizar) una función $f(x,y)$ cuando x e y deben verificar una ecuación $g(x,y)=c$. En el caso de maximizar $f(x,y)$, el problema se enuncia así

$$\max f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y)=c \tag{18.2}$$

Se puede dar una interpretación geométrica del problema (18.2) como en la Figura 18.1.

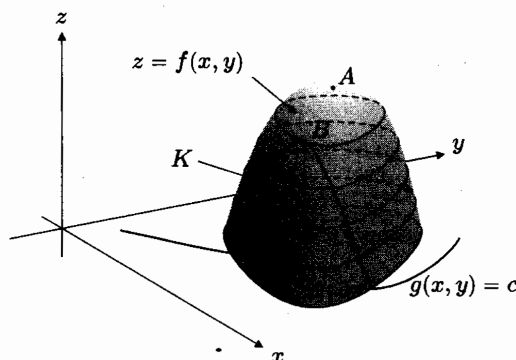


FIGURA 18.1

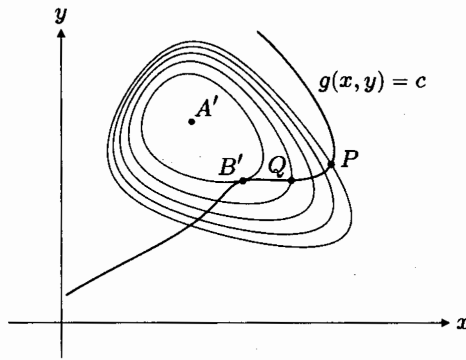


FIGURA 18.2

La gráfica de f es una superficie en forma de taza y la ecuación $g(x,y)=c$ representa una curva en el plano xy. Ésta se levanta a la curva K sobre la taza, es decir, a una curva de la superficie que yace verticalmente sobre ella. También se dice que $g(x,y)=c$ es la curva proyección de K sobre el plano xy. Maximizando $f(x,y)$ sin tener en cuenta la restricción obtenemos la cima A

[1] El método toma el nombre de su descubridor, el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736–1813). El economista danés Harald Westergaard parece haber sido el primero en usarlo en economía, en 1876. (Véase Thorkild Davidsen, "Westergaard, Edgeworth and the use of Lagrange multipliers in economics" *The Economic Journal*, (1986), pp. 808-811.)

de la Figura 18.1. La solución del problema (18.2) es el punto B, que es el punto más alto de la curva K. Si imaginamos que la gráfica de f es una montaña y que K es un sendero, entonces estamos buscando el punto más elevado del sendero, que es B. Analíticamente, el problema consiste en hallar las coordenadas de B.

En la Figura 18.2 dibujamos algunas curvas de nivel de f y la curva restricción $g(x, y) = c$. En esa figura, A' es el punto en el que $f(x, y)$ alcanza su máximo no restringido (libre). Cuanto más cerca del punto A' está una curva de nivel de f, mayor es el valor de f sobre esa curva de nivel. Buscamos el punto de la curva $g(x, y) = c$ para el que f alcance su valor máximo. Si comenzamos a recorrer la curva desde el punto P hacia A', vamos encontrando curvas de nivel con valores de f cada vez mayores.

Evidentemente, el punto Q de la Figura 18.2 no es el punto de $g(x, y) = c$ en el cual f alcanza su valor máximo, porque la curva restricción pasa *transversalmente* a la curva de nivel de f en ese punto. Por tanto, podemos seguir nuestro camino a lo largo de la curva restricción y llegar a valores de f más altos. Sin embargo, al llegar al punto B' no podemos subir más. Es claro intuitivamente hablando que B' se caracteriza por ser el punto en que la curva restricción tiene un contacto con la curva de nivel de f, pero sin atravesarla.

Esta observación quiere decir que la pendiente de la tangente en $B' = (x, y)$ a la curva $g(x, y) = c$ es igual a la pendiente de la tangente a la curva de nivel de f en ese punto.

Recuérdese de la Sección 16.3 que la pendiente de la tangente a la curva de nivel $F(x, y) = c$ es $dy/dx = -F_1'(x, y)/F_2'(x, y)$. Así, la condición de que la pendiente de la tangente a $g(x, y) = c$ sea igual a la pendiente de una curva de nivel de $f(x, y)$ se expresa analíticamente así:[2]

$$-g_1'(x, y)/g_2'(x, y) = -f_1'(x, y)/f_2'(x, y)$$

ó

$$\frac{f_1'(x, y)}{f_2'(x, y)} = \frac{g_1'(x, y)}{g_2'(x, y)} \tag{18.3}$$

Para el problema de minimizar $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = c$ se obtiene la misma condición (18.3). Se deduce que una condición necesaria para que (x, y) resuelva el problema (18.2) (o el de minimización) es que (x, y) satisfaga (18.3) y $g(x, y) = c$. Así se tienen dos ecuaciones para hallar las dos incógnitas x e y.

Ejemplo 18.1

Hallar la única solución posible al problema

$$\max\ xy \quad \text{sujeta a } 2x + y = m$$

Solución: Comparando el problema con (18.2) vemos que $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + y$, y $c = m$. Por tanto, $f_1'(x, y) = y$, $f_2'(x, y) = x$, $g_1'(x, y) = 2$, and $g_2'(x, y) = 1$. Así (18.3) da

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} \qquad \text{ó} \qquad y = 2x$$

Llevando $y = 2x$ a la restricción $2x + y = m$ se obtiene $2x + 2x = m$. Por tanto, $x = m/4$ y así $y = m/2$. (Se puede resolver el problema directamente; despejando y en la ecuación de la restricción se obtiene $y = m - 2x$, sustituyendo en la función tenemos que $xy = x(m - 2x) = -2x^2 + mx$, cuya gráfica es una parábola con un máximo en $x = m/4$. Así $x = m/4$ e $y = m/2$ resuelven el problema.)

---

[2] Olvídense por un momento los puntos (x, y) en los cuales una o las dos parciales de f y g con respecto a y se anulan. Véase Teorema 18.1 de la Sección 18.3 para un resultado preciso.

Ejemplo 18.2

Hallar la única solución posible al problema de demanda del consumidor

$$\max\ x^\alpha y^\beta \quad \text{sujeta a} \quad px + y = m \tag{1}$$

donde α y β son constantes positivas.

Solución: Poniendo $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$ y $g(x,y) = px + y$, tenemos $f_1'(x,y) = \alpha x^{\alpha-1}y^\beta$, $f_2'(x,y) = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$, $g_1'(x,y) = p$ y $g_2'(x,y) = 1$. Así (18.3) da

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^\beta}{\beta x^\alpha y^{\beta-1}} = \frac{p}{1} \quad \text{ó} \quad \frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x} = p$$

Nótese que hemos simplificado la primera fracción por $x^{\alpha-1}$ e $y^{\beta-1}$. Despejando y de la última ecuación obtenemos $y = (\beta/\alpha)px$ que, llevado a la restricción presupuestaria, da $px + (\beta/\alpha)px = m$ ó $px(\alpha+\beta) = \alpha m$. Por tanto,

$$px = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}m, \qquad y = \frac{\beta}{\alpha+\beta}m \tag{2}$$

Esta solución es lógica. Dice que el consumidor debería gastar la fracción $\alpha/(\alpha+\beta)$ de sus ingresos en el primer bien y la fracción $\beta/(\alpha+\beta)$ en el resto. En el Problema 3 de la Sección 18.10 comprobamos que ésta es, efectivamente, la solución. Si queremos una demostración alternativa, y mucho más fácil, estudiamos la variación de signo de la derivada de la función de una variable $x^\alpha(m-px)^\beta$.

En los pocos problemas que completan esta sección, hay que resolver algunos de optimización restringida usando la condición (18.3). En la sección siguiente damos el método de los multiplicadores de Lagrange, que es la técnica más conveniente para resolver la mayoría de los problemas de este tipo.

Problemas

Hallar las únicas soluciones posibles a los siguientes problemas de optimización restringida:

1 (a) max $f(x,y) = x + y$ sujeta a $g(x,y) = x^2 + y = 1$.
(b) min $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a $x + 2y = 4$.

2 (a) max(min) $3xy$ sujeta a $x^2 + y^2 = 8$.
(b) max(min) $x + y$ sujeta a $x^2 + 3xy + 3y^2 = 3$.

3 max $f(x,y) = 10x^{1/2}y^{1/3}$ sujeta a $g(x,y) = 2x + 4y = 9$.

18.2 EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Recuérdese el problema (18.2) de optimización restringida, que consiste en maximizar $f(x,y)$ sujeta a $g(x,y) = c$. La condición (18.3) de primer orden se puede expresar de una forma que sea fácil de recordar y de generalizar. Primero se escribe (18.3) en la forma

$$\frac{f_1'(x,y)}{g_1'(x,y)} = \frac{f_2'(x,y)}{g_2'(x,y)} \tag{$*$}$$

Si (x_0,y_0) es una solución del problema (18.2), las dos fracciones de $(*)$ coinciden cuando se las evalúa en (x_0,y_0). El valor común λ de esas fracciones se llama un **multiplicador de Lagrange**.

La ecuación (*) se puede expresar como

$$f_1'(x,y) - \lambda g_1'(x,y) = 0\,, \qquad f_2'(x,y) - \lambda g_2'(x,y) = 0 \tag{18.4}$$

Se define la **función lagrangiana** $\mathcal{L}$ por

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c) \tag{18.5}$$

Las parciales de $\mathcal{L}(x,y)$ con respecto a x e y son $\mathcal{L}_1'(x,y) = f_1'(x,y) - \lambda g_1'(x,y)$ y $\mathcal{L}_2'(x,y) = f_2'(x,y) - \lambda g_2'(x,y)$ respectivamente. Así las ecuaciones (18.4) representan las **condiciones de primer orden**, que expresan el requerimiento de que las parciales de $\mathcal{L}$ se anulen. Este razonamiento justifica el procedimiento siguiente:

El método lagrangiano

Para hallar las soluciones del problema

$$\max\,(\min)\ f(x,y) \ \text{ sujeta a } \ g(x,y) = c$$

se procede así:

1. Escribir la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda\big(g(x,y) - c\big)$$

donde λ es una constante.

2. Derivar $\mathcal{L}$ con respecto a x e y, e igualar a 0 las parciales.
3. Escribir el sistema formado por las dos ecuaciones de **2** junto con la restricción:

$$\begin{aligned} f_1'(x,y) &= \lambda g_1'(x,y) \\ f_2'(x,y) &= \lambda g_2'(x,y) \\ g(x,y) &= c \end{aligned}$$

4. Resolver esas tres ecuaciones en las tres incógnitas x, y y λ.

Este método nos va a dar en general unos pares de números (x, y) que puede que resuelvan el problema. Además obtenemos el valor del multiplicador de Lagrange λ. Vamos a ver dentro de un momento que λ tiene una interpretación muy interesante que es útil en muchos problemas económicos de optimización.[3]

Ejemplo 18.3

Usar el método de Lagrange en el problema del Ejemplo 18.1.

Solución: La función lagrangiana es

$$\mathcal{L}(x,y) = xy - \lambda(2x + y - m)$$

[3] Algunos prefieren considerar a la función lagrangiana como una función de tres variables, $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$. Entonces $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda = -[g(x,y) - c]$, luego igualando a 0 esta parcial obtenemos la restricción $g(x,y) = c$. Más adelante, en la Sección 18.8, apuntaremos algunos peligros de este procedimiento cuando estudiemos las restricciones en forma de desigualdades.

Así las condiciones necesarias para la solución del problema son

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = y - 2\lambda = 0, \qquad \mathcal{L}_2'(x,y) = x - \lambda = 0, \qquad 2x + y = m \qquad (*)$$

Las dos primeras ecuaciones implican que $y = 2\lambda$ y $x = \lambda$. Así $y = 2x$. Llevando este valor a la restricción tenemos $2x + 2x = m$. Por tanto, $x = m/4$, $y = m/2$ y $\lambda = x = m/4$. Ésta es la misma solución que la que hallamos en el Ejemplo 18.1.

Ejemplo 18.4

Resolver el problema

$$\max(\min)\ f(x,y) = x^2 + y^2 \text{ sujeta a } g(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 3 \qquad (1)$$

Solución: La función lagrangiana es en este caso

$$\mathcal{L}(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$$

Las tres ecuaciones son

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = 2x - \lambda(2x + y) = 0 \qquad (2)$$
$$\mathcal{L}_2'(x,y) = 2y - \lambda(x + 2y) = 0 \qquad (3)$$
$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \qquad (4)$$

Se pueden hallar de varias maneras las soluciones x, y y λ de estas tres ecuaciones. Damos un método sencillo. Primero se suman las ecuaciones (2) y (3), lo que da

$$2(x + y) = 3\lambda(x + y) \qquad (5)$$

Supongamos que $x + y \neq 0$; por (5) es $\lambda = 2/3$. Llevando este valor a (2), obtenemos $x = y$, y (4) da $x^2 = 1$, ó $x = \pm 1$. Así tenemos dos candidatos a solución $(x, y, \lambda) = (1, 1, 2/3)$ y $(x, y, \lambda) = (-1, -1, 2/3)$.

Supongamos que $x + y = 0$, *lo que implica que* $y = -x$. Por (4), $x^2 = 3$, y (2) da $\lambda = 2$. Tenemos, por tanto, los dos candidatos $(x, y, \lambda) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2)$ y $(x, y, \lambda) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$.

Hemos hallado los únicos cuatro puntos (x, y) que pueden resolver el problema (1). Más aún,

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 2, \qquad f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6 \qquad (6)$$

De aquí deducimos que, si el problema (1) tiene soluciones, entonces $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ resuelven el problema de minimización, mientras que $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ resuelven el de maximización.

¿Cómo podemos estar seguros de que el problema tiene soluciones? La función $f(x,y) = x^2 + y^2$ es continua y el conjunto de todos los (x, y) que verifican $x^2 + xy + y^2 = 3$ es cerrado y acotado (véase Problema 6 de la Sección 17.2). El Teorema 17.3, el teorema de los valores extremos, nos asegura que el problema (1) tiene soluciones. Geométricamente, la restricción representa una elipse y el problema (1) consiste en hallar las distancias máxima y mínima desde el origen a un punto de la elipse (véase Figura 18.3).

Una forma alternativa de demostrar que se ha encontrado la solución es la siguiente, aunque este método sólo funciona en casos particulares. Demostraremos que $(x, y) = (1, 1)$ minimiza a $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + xy + y^2 = 3$. Los otros puntos se tratan de la misma forma. Sean $x = 1 + h$ e $y = 1 + k$. Entonces

$$f(x,y) = (1 + h)^2 + (1 + k)^2 = 2 + 2(h + k) + h^2 + k^2 \qquad (7)$$

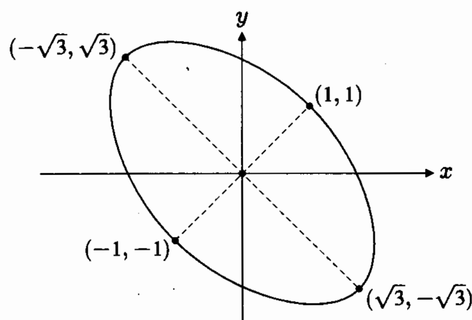


FIGURA 18.3

Si $(x, y) = (1+h, 1+k)$ verifica la restricción, entonces

$$(1+h)^2 + (1+h)(1+k) + (1+k)^2 = 3$$

luego

$$h + k = -hk/3 - (h^2 + k^2)/3$$

Llevando a (7) esta expresión de $h + k$ obtenemos

$$f(x, y) = 2 + 2\left[-\tfrac{1}{3}hk - \tfrac{1}{3}(h^2 + k^2)\right] + h^2 + k^2 = 2 + \tfrac{1}{3}(h-k)^2$$

Como $\frac{1}{3}(h-k)^2 \geq 0$ para todo (h, k), es $f(x, y) \geq 2$ para todos los valores de (x, y). Como $f(1, 1) = 2$, esto significa que $(1, 1)$ realmente minimiza $f(x, y)$ sujeta a la restricción.

Interpretaciones económicas del multiplicador de Lagrange

Consideremos de nuevo el problema

$$\max f(x, y) \text{ sujeta a } g(x, y) = c$$

Sean x^* e y^* los valores de x e y que resuelven este problema. En general, x^* e y^* dependen de c. *Vamos a suponer* que $x^* = x^*(c)$ e $y^* = y^*(c)$ son funciones diferenciables de c. Entonces

$$f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c)) \tag{18.6}$$

es también función de c. A $f^*(c)$ se le llama **función valor óptimo** para el problema. Cuando se use el método lagrangiano, el valor correspondiente $\lambda(c)$ del multiplicador de Lagrange también depende de c. Si se satisfacen ciertas condiciones de regularidad tenemos el notable resultado de que

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda(c) \tag{18.7}$$

Así, *el multiplicador de Lagrange $\lambda = \lambda(c)$ es la tasa de variación del valor óptimo de la función objetivo cuando la constante de restricción c cambia.*

Demostración de (18.7) bajo la hipótesis de que $f^*(c)$ es diferenciable:

Tomando la diferencial de (18.6) obtenemos

$$df^*(c) = df(x^*, y^*) = f_1'(x^*, y^*)\,dx^* + f_2'(x^*, y^*)\,dy^* \tag{1}$$

Por las condiciones de primer orden (18.4), $f_1'(x^*, y^*) = \lambda g_1'(x^*, y^*)$ y $f_2'(x^*, y^*) = \lambda g_2'(x^*, y^*)$, luego (1) se puede escribir en la forma

$$df^*(c) = \lambda g_1'(x^*, y^*)\, dx^* + \lambda g_2'(x^*, y^*)\, dy^* \tag{2}$$

Tomando la diferencial de la igualdad $g(x^*(c), y^*(c)) = c$ obtenemos

$$g_1'(x^*, y^*)\, dx^* + g_2'(x^*, y^*)\, dy^* = dc$$

luego (2) implica que $df^*(c) = \lambda\, dc$.

En particular, si dc es un cambio pequeño de c, entonces

$$f^*(c + dc) - f^*(c) \approx \lambda(c)\, dc \tag{18.8}$$

En aplicaciones económicas, c designa a menudo el stock disponible de un cierto recurso y $f(x, y)$ designa a la utilidad o beneficio. Entonces la medida aproximada del aumento de utilidad o beneficio que se puede obtener de dc unidades más del recurso es $\lambda(c)\, dc$, con $dc > 0$. Los economistas llaman a λ un **precio sombra** del recurso.

Ejemplo 18.5

Consideremos el problema max xy sujeta a $2x + y = m$ del Ejemplo 18.3. Con la notación anterior, la solución es $x^*(m) = m/4$, $y^*(m) = m/2$ y $\lambda(m) = m/4$. Por tanto, el valor de la función es $f^*(m) = (m/4)(m/2) = m^2/8$. Se tiene que $df^*(m)/dm = m/4 = \lambda(m)$. Así se confirma (18.7). Sea, en particular, $m = 100$. Entonces $f^*(100) = 100^2/8$. ¿Qué ocurre con el valor de la función si $m = 100$ aumenta en una unidad? Su nuevo valor es $f^*(101) = 101^2/8$, luego $f^*(101) - f^*(100) = 101^2/8 - 100^2/8 = 1.275{,}125 - 1.250 = 25{,}125$. Nótese que la fórmula (18.8) predice que $f^*(101) - f^*(100) \approx \lambda(100) \cdot 1 = 25 \cdot 1 = 25$, que es una buena aproximación al valor verdadero de 25,125.

Ejemplo 18.6

Una empresa usa cantidades K y L de capital y trabajo, respectivamente, para producir una cantidad Q de un solo producto, siguiendo la función de producción $Q = F(K, L) = K^{1/2}L^{1/4}$. Los precios de capital y trabajo son r y w, respectivamente.

(**a**) Hallar las cantidades K y L que minimizan los costes, así como el coste mínimo, como funciones de r, w y Q. Designemos por K^*, L^* y C^* a estos valores.

(**b**) Comprobar que

$$K^* = \frac{\partial C^*}{\partial r}, \qquad L^* = \frac{\partial C^*}{\partial w}, \qquad \lambda = \frac{\partial C^*}{\partial Q}, \qquad \frac{\partial K^*}{\partial w} = \frac{\partial L^*}{\partial r}$$

donde λ designa al multiplicador de Lagrange.

Solución: (**a**) La empresa tiene que resolver el siguiente problema de minimización de coste:

$$\min C = rK + wL \text{ sujeta a } K^{1/2}L^{1/4} = Q$$

La función lagrangiana es $\mathcal{L}(K, L) = rK + wL - \lambda(K^{1/2}L^{1/4} - Q)$. Igualando las parciales a cero obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2}L^{1/4} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \frac{1}{4}\lambda K^{1/2}L^{-3/4} = 0$$

Así, $r = \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2}L^{1/4}$ y $w = \frac{1}{4}\lambda K^{1/2}L^{-3/4}$. Despejando λ de estas dos ecuaciones e igualando los resultados obtenemos

$$\lambda = 2rK^{1/2}L^{-1/4} = 4wK^{-1/2}L^{3/4} \tag{1}$$

Simplificando por $K^{1/2}L^{1/4}$ obtenemos $2rK = 4wL$, luego $L = (r/2w)K$. Llevando este valor a la restricción $K^{1/2}L^{1/4} = Q$ tenemos $K^{1/2}(r/2w)^{1/4}K^{1/4} = Q$ luego

$$K^{3/4} = 2^{1/4}r^{-1/4}w^{1/4}Q$$

Elevando la última igualdad a $4/3$ y usando superíndices $*$ se tiene

$$K^* = 2^{1/3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3} \qquad \text{y así} \qquad L^* = (r/2w)K^* = 2^{-2/3}r^{2/3}w^{-2/3}Q^{4/3}$$

El coste mínimo correspondiente es

$$C^* = rK^* + wL^* = 3 \cdot 2^{-2/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{4/3} \tag{2}$$

Finalmente, usando (1) otra vez, hallamos $\lambda = 2^{4/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{1/3}$. Si se desea una demostración de que K^* y L^* resuelven realmente el problema de minimización, véase el Ejemplo 18.8 de la Sección 18.4.

(**b**) Por (2) tenemos, en particular, que

$$\frac{\partial C^*}{\partial r} = 3 \cdot 2^{-2/3}\frac{2}{3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3} = 2^{1/3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3} = K^*$$

Nótese que la tercera igualdad de (**b**) es un caso particular de (18.7), y vemos que el valor común es $\lambda = \partial C^*/\partial Q = 2^{4/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{1/3}$. Se comprueban fácilmente también las otras igualdades.

Nota: Uno de los errores más frecuentes que aparece en la literatura económica en lo referente al método lagrangiano es la afirmación de que transforma un problema de optimización restringida en uno de hallar un óptimo no restringido de la función lagrangiana. El Problema 4 prueba que esto no es cierto.

Problemas

1 Consideremos el problema max $f(x, y) = x + y$ sujeta a $g(x, y) = x^2 + y = 1$.

(a) Escribir la función lagrangiana para el problema y resolver las condiciones necesarias en este caso.

(b) Explicar geométricamente la solución dibujando las curvas de nivel de $f(x, y)$, junto a la gráfica de la parábola $x^2 + y = 1$. ¿Tiene solución el correspondiente problema de minimización?

(c) Sustituir la restricción por $x^2 + y = 1{,}1$ y resolver el problema en este caso. Hallar el cambio del valor óptimo de $f(x, y) = x + y$ y comprobar si es aproximadamente igual a $\lambda \cdot 0{,}1$ como indica (18.8).



2 Consideremos el problema

$$\min f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ sujeta a } x + 2y = a \qquad (a \text{ es constante})$$

(a) Resolver el problema usando primero la restricción para eliminar y. Demostrar que se ha hallado realmente el mínimo.

(b) Escribir la función lagrangiana del problema y resolver las condiciones necesarias en este caso.

(c) Resolver también el problema estudiando las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$ junto con la gráfica de la recta $x + 2y = a$ en el mismo diagrama. Dar una interpretación geométrica del problema. ¿Tiene solución el correspondiente problema de maximización?

(d) Comprobar la ecuación (18.7) para este problema.

3 Resolver los problemas siguientes por el método lagrangiano. Probar en cada caso que se ha encontrado la solución óptima.

(a) max $x^2 + 3xy + y^2$ sujeta a $x + y = 100$

(b) max $12x\sqrt{y}$ sujeta a $3x + 4y = 12$

4 Consideremos el problema max xy sujeta a $x + y = 2$. Usando el método lagrangiano, demostrar que $(x, y) = (1, 1)$ resuelve el problema con $\lambda = 1$. Demostrar también que $(1, 1)$ no maximiza la función lagrangiana $\mathcal{L}(x, y) = xy - 1 \cdot (x + y - 2)$ con $\lambda = 1$.

5 Consideremos el problema max $10x^{1/2}y^{1/3}$ sujeta a $2x + 4y = m$.

(a) Escribir las condiciones necesarias en este caso, y resolverlas en x, y y λ como funciones de m.

(b) Comprobar (18.7).

6 Consideremos el problema max $U(x, y) = 100 - e^{-x} - e^{-y}$ sujeta a $px + qy = m$.

(a) Escribir las condiciones necesarias para la solución del problema y resolverlas para x, y y λ como funciones de p, q y m.

(b) Demostrar que x e y son homogéneas de grado 0 como funciones de p, q y m. Explicar cómo se puede llegar a esta conclusión estudiando el enunciado del problema. (¿Qué ocurre con la restricción cuando p, q y m se sustituyen por tp, tq, tm, respectivamente, para un $t > 0$?)

7 Sea p un número real fijo y consideremos el problema

$$\min f(x, y) = x + 2y \text{ sujeta a } p(x^2 + y^2) + x^2y^2 - 4 = 0 \qquad (*)$$

(a) Hallar la solución del problema para $p = 0$, suponiendo que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(b) Para p arbitrario, probar que, para que un punto (x, y) con $x > 0$ e $y > 0$ resuelva el problema $(*)$, debe verificar las ecuaciones

$$2px - py + 2xy^2 - x^2y = 0, \qquad px^2 + py^2 + x^2y^2 = 4 \qquad (**)$$

(c) Supongamos que $(**)$ define a x e y como funciones continuamente diferenciables de p en un cierto intervalo centrado en $p = 0$. Por derivación implícita de $(**)$, hallar las derivadas $x'(p)$ e $y'(p)$ en $p = 0$.

(d) Sea $h(p) = x(p) + 2y(p)$; hallar $h'(0)$.

8 Un productor de petróleo comienza la explotación de un campo petrolífero en el instante $t = 0$. Supongamos que se va a extraer todo el petróleo en el intervalo $[0, y]$ de tiempo y que la producción por unidad de tiempo en el instante $t \in [0, y]$ es $xt(y - t)$. Supongamos que el productor puede elegir las cantidades x e y. La cantidad total de petróleo extraída en el tiempo dado viene expresada por la función siguiente de x e y:

$$g(x, y) = \int_0^y xt(y - t)\, dt$$

Supongamos además que el precio unitario p del petróleo es una función creciente del tiempo, $p = 1 + t$, y que el coste unitario del petróleo extraído es igual a αy^2, donde α es una constante positiva. El ingreso neto por unidad de tiempo es entonces $(1 + t - \alpha y^2)xt(y - t)$ y el ingreso neto total en el intervalo $[0, y]$ es la función de x e y dada por

$$f(x, y) = \int_0^y (1 + t - \alpha y^2)\, xt\, (y - t)\, dt$$

Si la cantidad de petróleo que se puede extraer es M, el productor sólo puede elegir valores de x e y tales que $g(x, y) = M$. Así el problema se formula de esta manera:

$$\max\ f(x, y) \text{ sujeta a } g(x, y) = M \qquad (*)$$

(a) Hallar explícitamente $f(x, y)$ y $g(x, y)$ calculando las integrales dadas y resolver después el problema $(*)$.

(b) Cuando $\alpha \to 0$, el valor de y que maximiza el ingreso neto tenderá a ∞. ¿Por qué?

(c) Comprobar la ecuación (18.7) en este caso.

18.3 DEMOSTRACIÓN ANALÍTICA DEL MÉTODO LAGRANGIANO (OPCIONAL)

El estudio que hemos hecho en la Sección 18.2 no precisaba las condiciones bajo las que el método lagrangiano funciona. De hecho, algunos problemas de optimización pueden producir inconvenientes a menos que se tenga buen cuidado. Un caso a tener en cuenta es el problema siguiente:

Ejemplo 18.7

$$\max f(x,y) = 2x + 3y \text{ sujeta a } g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$$

Solución: La función lagrangiana es $\mathcal{L}(x,y) = 2x + 3y - \lambda(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 5)$. Así, las tres condiciones para que (x,y) sea una solución parece que son

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = 2 - \lambda\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0\,, \qquad \mathcal{L}_2'(x,y) = 3 - \lambda\frac{1}{2\sqrt{y}} = 0\,, \qquad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \qquad (1)$$

Las dos primeras ecuaciones de (1) dan $\lambda = 4\sqrt{x} = 6\sqrt{y}$. Elevando al cuadrado y eliminando λ^2 obtenemos $16x = 36y$, lo que implica que $y = 4x/9$. Llevando este valor a la restricción se obtiene $(5/3)\sqrt{x} = 5$, luego $x = 9$. Se deduce que $y = 4$. Así, el método lagrangiano indica la solución $(x,y) = (9,4)$. Además $f(9,4) = 2\cdot 9 + 3\cdot 4 = 30$. Sin embargo $(x,y) = (25,0)$ también verifica la restricción y $f(25,0) = 50$. Por tanto, $(9,4)$ *no* resuelve el problema dado.

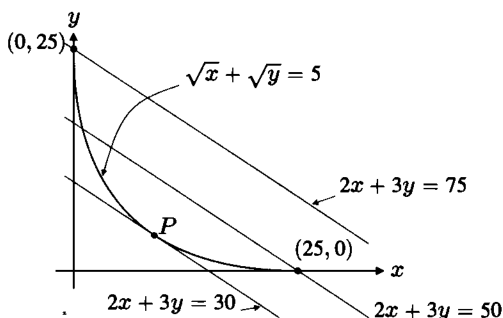


FIGURA 18.4 El punto P minimiza $2x+3y$ cuando $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 5$, mientras que $(0, 25)$ la maximiza.

¿Hay solución al problema de maximización? Sí. De hecho, el conjunto de los puntos que satisfacen la restricción es la curva de la Figura 18.4, que es un conjunto cerrado y acotado. Por tanto, la función continua $f(x,y) = 2x + 3y$ alcanza en esta curva un máximo y un mínimo en virtud del teorema de los valores extremos. Explicamos a continuación cómo se casa esto con lo que hemos obtenido por el método de Lagrange.

La solución al problema se logra estudiando las curvas de nivel de $f(x,y) = 2x + 3y$, que son rectas. El valor mínimo de $f(x,y)$ sujeta a la restricción dada es el punto $P = (9,4)$ que hemos hallado con los cálculos anteriores. El máximo se alcanza en el punto $(0,25)$, con $f(0,25) = 75$. Este punto es indetectable por el método lagrangiano.

El razonamiento que dimos para la condición (18.3), que era la base del método lagrangiano, es válido también para puntos óptimos locales de $f(x,y)$ sujeta a $g(x,y) = c$. La Figura 18.5 ilustra

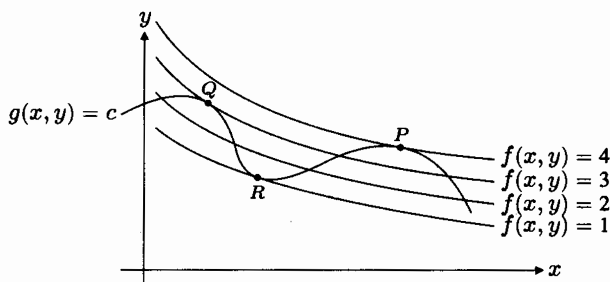


FIGURA 18.5 Curvas de nivel para $z = f(x, y)$, junto con la gráfica de $g(x, y) = c$.

los conceptos de puntos óptimos locales y globales en este marco. El punto R es un mínimo local de $f(x,y)$ sujeta a $g(x,y) = c$, y Q, P son máximos locales. El máximo global de $f(x,y)$ sujeta a $g(x,y) = c$ se alcanza solamente en P. Cada uno de los puntos P, Q y R de la Figura 18.5 verifica la condición necesaria (18.3). Un resultado preciso es el siguiente:

Teorema 18.1 (Teorema de Lagrange)

Supongamos que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas en un dominio A del plano xy y que (x_0, y_0) es un punto interior de A y un óptimo local para $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y) = c$. Supongamos además que no se anulan a la vez $g_1'(x_0, y_0)$ y $g_2'(x_0, y_0)$. Existe un número único λ tal que la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda\,(g(x,y) - c)$$

tiene un punto estacionario en (x_0, y_0).

Demostración: Supongamos que $g_2'(x_0, y_0) \neq 0$. Por el teorema de existencia de funciones implícitas (véase la Nota al final de la Sección 16.3), la ecuación $g(x,y) = c$ define a y como función diferenciable de x en un cierto entorno de (x_0, y_0). Si designamos por $y = h(x)$ a esta función, entonces

$$y' = h'(x) = -g_1'(x,y)/g_2'(x,y)$$

Cuando $g(x,y) = c$ se sustituye por $y = h(x)$, el problema de maximización restringida (18.2) se reduce al problema de maximizar $z = f(x,y) = f(x, h(x))$ con respecto a la única variable x. Una condición necesaria de máximo es que la derivada total de z con respecto a x sea 0. Como

$$\frac{dz}{dx} = f_1'(x,y) + f_2'(x,y)y' \qquad (\text{con } y' = h'(x))$$

sustituyendo y' por su valor se obtiene la siguiente condición necesaria para que (x_0, y_0) sea un punto óptimo local:

$$\frac{dz}{dx} = f_1'(x_0, y_0) - f_2'(x_0, y_0)\frac{g_1'(x_0, y_0)}{g_2'(x_0, y_0)} = 0 \tag{18.9}$$

Poniendo $\lambda = f_2'(x_0, y_0)/g_2'(x_0, y_0)$ vemos que las condiciones (18.4) de punto estacionario de antes se verifican en (x_0, y_0), luego la función lagrangiana tiene un punto estacionario en (x_0, y_0).

Hemos supuesto que $g_2'(x_0, y_0) \neq 0$. Si $g_2'(x_0, y_0) = 0$, las hipótesis implican que $g_1'(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces el teorema de la función implícita nos dice que $g(x,y) = c$ define a x como función diferenciable de y en un entorno de (x_0, y_0). El resto del razonamiento es análogo, con x e y intercambiados.

Reconsideremos la dificultad que encontramos en el Ejemplo 18.7 a la luz del Teorema 18.1. La función $f(x, y) = 2x + 3y$ es continuamente diferenciable en todo el plano. Sin embargo, la función de restricción $g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ está definida solamente para $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Sus derivadas parciales son $g_1'(x, y) = 1/2\sqrt{x}$ y $g_2'(x, y) = 1/2\sqrt{y}$. Vemos que g es continuamente diferenciable sólo en el conjunto A de los puntos (x, y) tales que $x > 0$ e $y > 0$. Nótese que g_1' y g_2' son distintas de 0 en todos los puntos del conjunto abierto A. El Teorema 18.1 nos dice que un punto de A que esté sobre la curva de restricción y resuelva nuestro problema debe satisfacer a (1) del Ejemplo 18.7. Allí encontramos sólo un punto con esta propiedad, a saber $(9, 4)$. Sin embargo, hay que examinar otros dos puntos fuera de A: los puntos frontera $(25, 0)$ y $(0, 25)$ sobre la curva de restricción. Como $f(9, 4) = 30$, $f(25, 0) = 50$ y $f(0, 25) = 75$, deducimos que el mínimo es $(9, 4)$ y el máximo es $(0, 25)$. Por el razonamiento del Ejemplo 18.7 sabemos que se alcanzan el máximo y el mínimo.

Problemas

1 El texto siguiente está tomado de un libro de matemáticas de gestión y contiene errores *graves*. Detectarlos y corregirlos. "Consideremos el problema general de hallar los puntos óptimos de $z = f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$. Claramente los puntos óptimos deben verificar el par de ecuaciones $f_x'(x, y) = 0$, $f_y'(x, y) = 0$ además de la restricción $g(x, y) = 0$. Hay así tres ecuaciones que se deben verificar por el par de incógnitas x, y. Como hay más ecuaciones que incógnitas, el sistema se llama superdeterminado y, en general, es difícil de resolver. Para facilitar los cálculos ..." (Sigue una descripción del método lagrangiano).

2 Consideremos el problema

$$\min f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 \text{ sujeta a } y^2 - 8x = 0$$

(a) Tratar de resolver el problema reduciéndolo a uno de minimización en (i) la variable x; (ii) la variable y. Comentar.

(b) Resolver el problema usando el método lagrangiano.

(c) Dar una interpretación geométrica del problema.

Problemas avanzados

3 Sean f y g las funciones definidas por

$$f(x, y) = (x + 2)^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = y^2 - x(x + 1)^2$$

Hallar el valor mínimo de $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = 0$. (*Sugerencia:* Dibujar la gráfica. Asegurarse de incluir todos los puntos que satisfagan $g(x, y) = 0$)

18.4 CONDICIONES SUFICIENTES

Bajo las hipótesis del Teorema 18.1 el método de los multiplicadores de Lagrange para el problema

$$\max(\min) f(x, y) \text{ sujeta a } g(x, y) = c \tag{18.10}$$

da condiciones *necesarias* para la solución del problema. Para poder asegurar que hemos hallado realmente la solución necesitamos más argumentos. A veces podemos apoyarnos en el teorema de los valores extremos (como en el Ejemplo 18.4 y el 18.7), o en métodos ad hoc (como al final del Ejemplo 18.4).

Si (x_0, y_0) resuelve el problema (18.10), la lagrangiana $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$ es estacionaria en (x_0, y_0), pero no tiene necesariamente en él un máximo o mínimo (véase el

Problema 4 de la Sección 18.2). Sin embargo, supongamos que (x_0, y_0) maximiza a $\mathcal{L}(x,y)$ entre *todos* los (x,y). Entonces

$$\mathcal{L}(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) - \lambda(g(x_0,y_0) - c) \geq \mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c) \qquad (*)$$

para todo (x,y). Si (x_0,y_0) verifica también la restricción $g(x_0,y_0) = c$, entonces $(*)$ se reduce a $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ para todo (x,y) tal que $g(x,y) = c$. Por tanto, (x_0,y_0) resuelve realmente el problema de maximización (18.10). Se obtiene un resultado correlativo para el problema de minimización (18.10), siempre que (x_0,y_0) minimice a $\mathcal{L}(x,y)$ entre todos los pares (x,y). Combinando esta observación con el Teorema 17.8 se obtiene el siguiente:

Teorema 18.2 (Suficiencia global)

Supongamos que las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ del problema (18.10) son continuamente diferenciables en un conjunto abierto convexo A de $\mathbb{R}^2$ y sea $(x_0,y_0) \in A$ un punto estacionario para la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

Supongamos además que $g(x_0,y_0) = c$. Entonces

$\mathcal{L}(x,y)$ cóncava $\Longrightarrow$ (x_0,y_0) resuelve el problema de maximización de (18.10)

$\mathcal{L}(x,y)$ convexa $\Longrightarrow$ (x_0,y_0) resuelve el problema de minimización de (18.10)

Nótese que $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$ es *cóncava* si $f(x,y)$ es cóncava y $\lambda g(x,y)$ es convexa porque entonces $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + [-\lambda g(x,y)] + \lambda c$ es suma de funciones cóncavas.

Ejemplo 18.8

Consideremos el Ejemplo 18.6 de la Sección 18.2. La función lineal $rK + wL$ es convexa y la función de Cobb–Douglas $K^{1/2}L^{1/4}$ es cóncava (véase Ejemplo 17.18, Sección 17.8). Como $\lambda \geq 0$, la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(K,L) = rK + wL + (-\lambda)(K^{1/2}L^{1/4} - Q)$$

es suma de dos funciones convexas y, por tanto, es convexa. Por el Teorema 18.2, el par (K^*, L^*) minimiza el coste.

Condiciones suficientes locales

Consideremos el problema de maximización (o minimización) local restringida

$$\max(\min) \text{ local } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y) = c \qquad (18.11)$$

Nuestro razonamiento para las condiciones de primer orden es el siguiente. Cuando $g_2'(x,y) \neq 0$, el objetivo $z = f(x,y)$ es, de hecho, una función de x únicamente por la presencia de la restricción. Hallando dz/dx, y teniendo en cuenta que y depende de x, obtenemos una condición necesaria de puntos óptimos locales. Para hallar una condición suficiente estudiamos el signo de d^2z/dx^2. Se tiene que (18.9) implica que

$$\frac{dz}{dx} = f_1'(x,y) - f_2'(x,y)\frac{g_1'(x,y)}{g_2'(x,y)} \qquad (1)$$

La derivada d^2z/dx^2 es la derivada total de dz/dx con respecto a x. Suponiendo que f y g son funciones continuamente diferenciables dos veces, y recordando que y es función de x, obtenemos

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f''_{11} + f''_{12}y' - (f''_{21} + f''_{22}y')\frac{g'_1}{g'_2} - f'_2\frac{(g''_{11} + g''_{12}y')g'_2 - (g''_{21} + g''_{22}y')g'_1}{(g'_2)^2}$$

Como f y g son funciones continuamente diferenciables dos veces, $f''_{12} = f''_{21}$ y $g''_{12} = g''_{21}$. Más aún, $y' = -g'_1/g'_2$. También es $f'_1 = \lambda g'_1$ y $f'_2 = \lambda g'_2$ porque ésas son las condiciones de primer orden. Usando esas relaciones para eliminar y' y f'_2, así como algunos cálculos algebraicos elementales, obtenemos

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{(g'_2)^2}\left[(f''_{11} - \lambda g''_{11})(g'_2)^2 - 2(f''_{12} - \lambda g''_{12})g'_1g'_2 + (f''_{22} - \lambda g''_{22})(g'_1)^2\right] \tag{2}$$

La expresión larga entre corchetes se puede escribir de una forma simétrica que es mucho más fácil de recordar. En efecto, usando el resultado de (**) al final de la Sección 15.8, si ponemos

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & g'_1(x,y) & g'_2(x,y) \\ g'_1(x,y) & f''_{11}(x,y) - \lambda g''_{11}(x,y) & f''_{12}(x,y) - \lambda g''_{12}(x,y) \\ g'_2(x,y) & f''_{21}(x,y) - \lambda g''_{21}(x,y) & f''_{22}(x,y) - \lambda g''_{22}(x,y) \end{vmatrix} \tag{18.12}$$

entonces

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{[g'_2(x,y)]^2}\,D(x,y) \tag{18.13}$$

Nótese que la matriz 2×2 abajo a la derecha de (18.12) es la hessiana de la función lagrangiana. Así se llama al determinante un **hessiano ampliado**.

Así hemos llegado al resultado siguiente:

> Una condición suficiente para que (x_0, y_0) resuelva el problema (18.11) es que satisfaga las condiciones de primer orden y, además, que el hessiano ampliado $D(x_0, y_0)$ dado por (18.12) sea > 0 en el caso de maximización y < 0 en el de minimización. (18.14)

Las condiciones sobre el signo del determinante $D(x,y)$ se llaman las *condiciones locales de segundo orden* para el problema (18.11).

Ejemplo 18.9

Consideremos el problema

$$\max\,(\min)\ \text{local}\ f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{sujeta a} \quad g(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 3$$

(véase Ejemplo 18.4). Las condiciones de primer orden producen los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$ con $\lambda = 2/3$, así como $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ con $\lambda = 2$. Comprobar las condiciones de segundo orden en este caso.

Solución: Se tiene que $f''_{11} = 2$, $f''_{12} = 0$, $f''_{22} = 2$, $g''_{11} = 2$, $g''_{12} = 1$ y $g''_{22} = 2$, luego

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & 2x + y & x + 2y \\ 2x + y & 2 - 2\lambda & -\lambda \\ x + 2y & -\lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix}$$

Calculando los cuatro determinantes de orden 3 con el correspondiente valor de λ obtenemos $D(1,1) = D(-1,-1) = -24$ y $D(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = D(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 24$. Deducimos que $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son mínimos locales, mientras que $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ son máximos locales. En el Ejemplo 18.4 hemos demostrado que esos puntos eran óptimos *globales*.

Problemas

1 Usar el Teorema 18.2 para comprobar la solución óptima del Problema 5 de la Sección 18.2.

2 Consideremos el problema min $x^2 + y^2$ sujeta a $x + 2y = a$. Calcular el $D(x,y)$ de (18.12) en este caso. Comparar con el resultado del Problema 2, Sección 18.2.

18.5 PROBLEMAS LAGRANGIANOS MÁS GENERALES

Los problemas de optimización restringida que se tratan en economía necesitan usualmente de más de dos variables. Comenzamos considerando el problema

$$\max(\min) f(x_1, \ldots, x_n) \text{ sujeta a } g(x_1, \ldots, x_n) = c \tag{18.15}$$

Se puede generalizar fácilmente el método de Lagrange de las secciones anteriores. Como antes, se asocia un multiplicador lagrangiano λ a la restricción y se forma la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda\big(g(x_1, \ldots, x_n) - c\big) \tag{18.16}$$

Después se calculan las derivadas parciales de $\mathcal{L}$ y se las iguala a cero, formando el sistema

$$\begin{aligned} f_1'(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g_1'(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_n'(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g_n'(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{18.17}$$

Estas n ecuaciones junto con la restricción, forman un sistema de $n+1$ ecuaciones con las que hay que calcular las $n+1$ incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ y λ.

Nota: Este método no dará, en general, las condiciones necesarias correctas si todas las parciales de primer orden de $g(x_1, \ldots, x_n)$ se anulan en el punto estacionario de la función lagrangiana. En caso contrario, la demostración es una generalización fácil de la del Teorema 18.1. Si, por ejemplo, $\partial g / \partial x_n \neq 0$, "resolvemos" $g(x_1, \ldots, x_n) = c$ en x_n y reducimos el problema a uno de óptimos sin restricciones en $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (véase el Problema 11 para el caso $n = 3$).

Ejemplo 18.10

Hallar la única solución posible al problema

$$\max\ x^2y^3z \text{ sujeta a } x + y + z = 12 \tag{1}$$

Solución: La función lagrangiana es

$$\mathcal{L}(x,y,z) = x^2y^3z - \lambda(x + y + z - 12) \tag{2}$$

Las condiciones de primer orden (18.17) se reducen a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2xy^3z - \lambda = 0\,, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 3x^2y^2z - \lambda = 0\,, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = x^2y^3 - \lambda = 0 \tag{3}$$

Si *una cualquiera* de las variables x, y, z es 0, entonces $x^2y^3z = 0$, que *no* es el valor máximo. Supongamos, por tanto, que x, y y z son todas $\neq 0$. De las dos primeras ecuaciones de (3)

sacamos que $2xy^3z = 3x^2y^2z$, luego $y = 3x/2$. De las ecuaciones primera y tercera de (3) obtenemos análogamente $z = x/2$. Llevando los valores $y = 3x/2$ y $z = x/2$ a la restricción deducimos que $x + 3x/2 + x/2 = 12$, luego $x = 4$. Entonces $y = 6$ y $z = 2$. Así, la única solución posible es $(x, y, z) = (4, 6, 2)$.

Ejemplo 18.11

En el problema (18.1) de la introducción, la función lagrangiana es

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n) = U(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n - m)$$

luego

$$\mathcal{L}_i'(x_1, \ldots, x_n) = U_i'(x_1, \ldots, x_n) - \lambda p_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Escribiendo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ tenemos

$$\frac{U_1'(\mathbf{x})}{p_1} = \frac{U_2'(\mathbf{x})}{p_2} = \cdots = \frac{U_n'(\mathbf{x})}{p_n} = \lambda \tag{18.18}$$

Aparte de la última ecuación, que sirve solamente para determinar el multiplicador de Lagrange λ, tenemos $n - 1$ ecuaciones. Para $n = 2$ hay una ecuación, para $n = 3$ hay dos ecuaciones, y así sucesivamente. Además se tiene que verificar la restricción. Tenemos así n ecuaciones para determinar los valores de $x_1, \ldots, x_n$. La derivada parcial $U_i'(\mathbf{x}) = \partial U/\partial x_i$ se llama la **utilidad marginal** del i-ésimo bien.

Las ecuaciones (18.18) dicen que, *si* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *maximiza la utilidad sujeta a la restricción presupuestaria, entonces la razón entre la utilidad marginal de un bien y su precio unitario debe ser el mismo para todos los bienes.*

Supongamos que el sistema (18.18) con la restricción presupuestaria se puede resolver en $x_1, \ldots, x_n$ como funciones de $p_1, \ldots, p_n$ y m, dando $x_i = D_i(p_1, \ldots, p_n, m)$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces $D_i(p_1, \ldots, p_n, m)$ representa la cantidad del i-ésimo bien que demanda el individuo a los precios $p_1, \ldots, p_n$ y con una renta m. Por esta razón, $D_1, \ldots, D_n$ se llaman las **funciones de demanda individuales**.

Ejemplo 18.12

Un individuo compra cantidades a, b y c de tres bienes distintos cuyos precios son p, q y r, respectivamente. La renta (exógena) del consumidor es m, con $m > 2p$, y la función de utilidad es $U(a, b, c) = a + \ln(bc)$.

Hallar la demanda del consumidor de cada uno de los bienes como función de los precios p, q, r y la renta m. Probar que el gasto en cada uno de los bienes segundo y tercero es siempre igual a p.

Solución: Aquí $U_1'(a, b, c) = 1$, $U_2'(a, b, c) = (1/bc)c = 1/b$ y $U_3'(a, b, c) = (1/bc)b = 1/c$. Las ecuaciones (18.18) implican que

$$\frac{1}{p} = \frac{1/b}{q} = \frac{1/c}{r} = \lambda$$

De la primera igualdad obtenemos que $qb = p$ y de la segunda que $rc = p$, luego el gasto en cada uno de los bienes segundo y tercero *es* igual a p. Llevando $qb = p$ y $rc = p$ a la restricción presupuestaria obtenemos $pa + p + p = m$, luego $a = m/p - 2$. Ésta es positiva cuando $m > 2p$. Así, para $m > 2p$, las funciones de demanda son $a = (m/p) - 2$, $b = p/q$ y $c = p/r$.

El caso general

A veces los economistas tienen que trabajar con problemas de optimización con más de una restricción. El problema lagrangiano general correspondiente es

$$\max(\min) f(x_1, \ldots, x_n) \text{ sujeta a } \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = c_m \end{cases} \tag{18.19}$$

Se puede extender el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver el problema (18.19). Se asocian **multiplicadores de Lagrange** a cada una de las m restricciones, y se define la nueva **función lagrangiana** por

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \big(g_j(x_1, \ldots, x_n) - c_j\big) \tag{18.20}$$

Las condiciones necesarias de primer orden que un óptimo debe verificar son que se anulen las derivadas parciales de la función lagrangiana con respecto a cada x_i. En símbolos:[4]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{18.21}$$

Entre esas n ecuaciones y las m restricciones se forma un sistema de $n + m$ ecuaciones en las $n + m$ incógnitas $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Ejemplo 18.13

Resolver el problema max(min) $x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones

$$x + 2y + z = 1 \tag{1}$$

$$2x - y - 3z = 4 \tag{2}$$

Solución: La función lagrangiana es

$$\mathcal{L}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + 2y + z - 1) - \lambda_2(2x - y - 3z - 4)$$

Las condiciones de primer orden (18.21) son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \tag{5}$$

Así tenemos cinco ecuaciones, (1) a (5), para determinar las cinco incógnitas x, y, z, λ_1 y λ_2.

Se pueden despejar λ_1 y λ_2 de (3) y (4):

$$\lambda_1 = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y, \qquad \lambda_2 = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y \tag{6}$$

Llevando estos valores a (5) y simplificando tenemos

$$x - y + z = 0 \tag{7}$$

---

[4] En el Teorema 18.1 supusimos que g_1' y g_2' no se anulan simultáneamente. La condición correspondiente aquí es que los vectores gradiente $g_1, \ldots, g_m$ sean linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Esta ecuación, junto con (1) y (2) forman un sistema de tres ecuaciones lineales en las incógnitas x, y y z. Resolviéndolo por la regla de Cramer (o mejor por eliminación) obtenemos

$$x = \frac{16}{15}, \qquad y = \frac{1}{3}, \qquad z = -\frac{11}{15} \tag{8}$$

Los valores de los multiplicadores son $\lambda_1 = 52/75$ y $\lambda_2 = 54/75$.

Vamos a dar una razón geométrica de por qué (8) resuelve el problema de minimización. Cada una de las dos restricciones representa un plano en $\mathbb{R}^3$ y los puntos que verifican ambas son los de la recta intersección. Ahora bien, $x^2 + y^2 + z^2$ es el cuadrado de la distancia del origen al punto (x, y, z). Por tanto, nuestro problema es hallar las distancias mínima y máxima del origen a los puntos de una recta. Evidentemente no hay distancia máxima pero sí mínima, la cual se alcanza en el punto que hemos hallado.

Problemas

1 Consideremos el problema min $x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a $x + y + z = 1$.

(a) Escribir la función lagrangiana para este problema y hallar el único punto (x, y, z) que verifica las condiciones necesarias.

(b) Dar un razonamiento geométrico para la existencia de solución. ¿Tiene solución el problema correspondiente de maximización?

2 Resolver el problema min $x + 4y + 3z$ sujeta a $x^2 + 2y^2 + \frac{1}{3}z^2 = b$. (Supongamos que $b > 0$ y que el problema tiene solución.)

3 Un individuo consume semanalmente las cantidades x e y de dos bienes y trabaja durante ℓ horas. Se eligen esas cantidades de tal manera que maximicen la función utilidad

$$U(x, y, \ell) = \alpha \ln x + \beta \ln y + (1 - \alpha - \beta) \ln(L - \ell)$$

definida para $0 \leq \ell < L$, $x, y > 0$, donde α y β son parámetros positivos que verifican $\alpha + \beta < 1$. El individuo tiene la restricción presupuestaria $p\,x + q\,y = w\,\ell + m$, donde m (≥ 0) designa renta no salarial.

(a) Suponiendo que

$$m \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha - \beta}\right) w\,L \tag{$*$}$$

hallar las demandas x, y y el trabajo ℓ del individuo como funciones de p, q, r y m.

(b) ¿Qué ocurre cuando se viola la desigualdad $(*)$?

4 Consideremos el problema del Ejemplo 18.13, y sea $(x, y, z) = (\frac{16}{15} + h, \frac{1}{3} + k, -\frac{11}{15} + \ell)$. Demostrar que, si (x, y, z) satisface ambas restricciones, entonces $k = -h$ y $\ell = h$. Probar entonces que $f(x, y, z) = (16/15)^2 + (1/3)^2 + (-11/15)^2 + 3h^2$. ¿Cuál es la conclusión?

5 Resolver el problema siguiente, suponiendo que tiene solución

$$\min\ x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z \quad \text{sujeta a} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 5 \end{cases}$$

6 (a) Usando el método de Lagrange, hallar *posibles* soluciones del problema

$$\max\ (\min)\ x + y + z \quad \text{sujeta a} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

(b) Dar una interpretación geométrica de las restricciones, y usar el teorema de los valores extremos para demostrar que existen los valores máximo y mínimo. Hallar los máximos y mínimos.

7 Resolver el problema

$$\max\ (\min)\ x+y \quad \text{sujeta a} \quad \begin{cases} x^2+2y^2+z^2=1 \\ x\ +\ y\ +\ z=1 \end{cases}$$

8 Un problema estadístico exige resolver

$$\min a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2+\cdots+a_n^2x_n^2 \quad \text{sujeta a } x_1+x_2+\cdots+x_n=1$$

Resolver el problema, supuesta la existencia de solución.

Problemas avanzados

9 (a) Supuesta la existencia de solución, resolver el problema

$$\min\ f(x,y,z)=(y+z-3)^2 \quad \text{sujeta a} \quad \begin{cases} x^2+y+\ z=2 \\ x\ +y^2+2z=2 \end{cases}$$

(b) Las condiciones necesarias de la parte (a) tienen dos soluciones. Se puede pensar que una que no resuelve el problema de minimización debe resolver el de maximización. Probar que esto no ocurre en este caso.

10 Consideremos el problema del Ejemplo 18.11. Hallar las funciones de demanda cuando (cf. Problemas 10 y 11 en la Sección 17.1):

(a) $U(x_1,\ldots,x_n)=Ax_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ $\quad(A>0,\, a_1>0,\,\ldots,\, a_n>0)$

(b) $U(x_1,\ldots,x_n)=x_1^a+\cdots+x_n^a$ $\quad(0<a<1)$

11 Consideremos el problema max (min) $f(x_1,x_2,x_3)$ sujeta a $g(x_1,x_2,x_3)=c$. Supongamos que la restricción define x_3 como una función continuamente diferenciable de x_1 y x_2. Deducir (18.17) para $n=3$ usando la idea de la demostración analítica de (18.9) en la Sección 18.3. (*Indicación:* Sea $\lambda=f_3'/g_3'$).

12 Consideremos el problema max $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ sujeta a $\mathbf{x}'\mathbf{x}=\sum x_i^2=1$ (con $\mathbf{A}$ simétrica). Demostrar que todo vector solución $\mathbf{x}_0$ debe ser un autovector de $\mathbf{A}$. Si λ_0 es el autovalor asociado, probar que $\lambda_0=\mathbf{x}_0'\mathbf{A}\mathbf{x}_0$. Así, el valor máximo de $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ sujeta a la restricción dada es el mayor autovalor de $\mathbf{A}$. (*Indicación:* Considerar primero el caso $n=2$.) ¿Qué se puede decir del problema de minimización correspondiente?

18.6 INTERPRETACIONES ECONÓMICAS DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En la Sección 18.2 hemos visto que se puede dar una interpretación interesante del multiplicador de Lagrange para el problema de maximizar $f(x,y)$ sujeta a $g(x,y)=c$, como un valor marginal. En esta sección se generaliza este resultado. Usando notación vectorial $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, se puede formular más concisamente el problema lagrangiano general (18.19) como

$$\max(\min)\ f(\mathbf{x}) \quad \text{sujeta a } g_j(\mathbf{x})=c_j,\ j=1,\ldots,m \tag{18.22}$$

Sean $x_1^*,\ldots,x_n^*$ los valores de $x_1,\ldots,x_n$ que verifican las condiciones necesarias para la solución de (18.22). En general, $x_1^*,\ldots,x_n^*$ dependen de los valores de $c_1,\ldots,c_m$. Suponemos que $x_i^*=x_i^*(c_1,\ldots,c_m)$ $(i=1,\ldots,n)$ son funciones diferenciables de $c_1,\ldots,c_m$. El valor asociado

f^* de f es también función de $c_1, \ldots, c_m$. En símbolos, si se pone $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ y $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$, entonces

$$f^*(\mathbf{c}) = f(\mathbf{x}^*(\mathbf{c})) = f(x_1^*(\mathbf{c}), \ldots, x_n^*(\mathbf{c})) \tag{18.23}$$

La función f^* se llama la **función valor óptimo** del problema (18.22). Los multiplicadores de Lagrange asociados a $\mathbf{x}^*$ dependen también de $c_1, \ldots, c_m$. Bajo unas ciertas hipótesis de regularidad se tiene

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{c})}{\partial c_i} = \lambda_i(\mathbf{c}) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{18.24}$$

El multiplicador de Lagrange $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{c})$ de la i-ésima restricción es la tasa de variación del valor óptimo de la función objetivo respecto a los cambios de la constante c_i. El número λ_i se llama **precio sombra** (o **valor marginal**) de una unidad del recurso i.

Demostración informal de (18.24):

Tomando diferenciales en (18.23) se obtiene

$$df^*(\mathbf{c}) = df(\mathbf{x}^*(\mathbf{c})) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}))\, dx_i^*(\mathbf{c})$$

Las condiciones de primer orden de (18.21) implican que

$$f_i'(\mathbf{x}^*(\mathbf{c})) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}))}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Tomando también diferenciales en cada identidad $g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{c})) = c_j$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}))}{\partial x_i}\, dx_i^*(\mathbf{c}) = dc_j \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} df^*(\mathbf{c}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}))}{\partial x_i} dx_i^*(\mathbf{c}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}))}{\partial x_i} dx_i^*(\mathbf{c}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j dc_j \end{aligned}$$

Supongamos que $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ varía en $\mathbf{dc} = (dc_1, \ldots, dc_m)$. Según la Sección 16.8, si dc_1, $\ldots$, dc_m son pequeños en valor absoluto, entonces

$$f^*(\mathbf{c} + \mathbf{dc}) - f^*(\mathbf{c}) \approx \lambda_1(\mathbf{c})\, dc_1 + \cdots + \lambda_m(\mathbf{c})\, dc_m \tag{18.25}$$

Ejemplo 18.14

En el Ejemplo 18.11 de la Sección 18.5, sea $U^*(p_1, \ldots, p_n, m)$ la utilidad máxima que se obtiene cuando los precios son $p_1, \ldots, p_n$ y la renta es m. A esta U^* se la llama la función de utilidad *indirecta*. Usando (18.24) vemos que

$$\lambda = \frac{\partial U^*}{\partial m} \tag{18.26}$$

Así, λ es aproximadamente el aumento de utilidad máxima que proviene de aumentar la renta en una unidad. Por tanto, se llama a λ generalmente la **utilidad marginal de la renta.**

Ejemplo 18.15

Consideremos el problema del Ejemplo 18.13 de la Sección 18.5, y supongamos que se cambian las restricciones, tomando como primera $x + 2y + z = 0{,}9$ y como segunda $2x - y - 3z = 4{,}1$. Hacer una estimación del cambio correspondiente en la función valor usando (18.25). Hallar el nuevo valor de la función valor.

Solución: Usando la notación de (18.22) a (18.25) y los resultados del Ejemplo 18.13, tenemos $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $dc_1 = -0{,}1$, $dc_2 = 0{,}1$, $\lambda_1(1,4) = 52/75$, $\lambda_2(1,4) = 54/75$ y

$$f^*(c_1, c_2) = f^*(1,4) = (16/15)^2 + (1/3)^2 + (-11/15)^2 = 402/225$$

Entonces (18.25) da

$$\begin{aligned} f^*(1 - 0{,}1\,,\, 4 + 0{,}1) - f^*(1\,,\,4) &\approx \lambda_1(1\,,\,4)\,dc_1 + \lambda_2(1\,,\,4)\,dc_2 \\ &= (52/75)(-0{,}1) + (54/75)(0{,}1) = 0{,}2/75 \end{aligned}$$

Así, $f^*(0{,}9\,,\,4{,}1) = f^*(1 - 0{,}1\,,\,4 + 0{,}1) \approx 402/225 - 0{,}2/75 = 401{,}4/225 = 1{,}784$. Para hallar el valor exacto de $f^*(0{,}9\,,\,4{,}1)$, obsérvese que (7) del Ejemplo 18.13 sigue siendo válida. Así tenemos las tres ecuaciones

$$x + 2y + z = 0{,}9\,, \qquad 2x - y - 3z = 4{,}1\,, \qquad x - y + z = 0$$

cuyas soluciones en x, y y z son $1{,}06$, $0{,}3$ y $-0{,}76$, respectivamente. Así, $f^*(0{,}9\,,4{,}1) = (1{,}06)^2 + (0{,}3)^2 + (-0{,}76)^2 = 1{,}7912$.

Problemas

1 Comprobar (18.24) para el Problema 2 de la Sección 18.5.

2 Consideremos el problema

$$\max f(x,y,z) = 4z - x^2 - y^2 - z^2 \text{ sujeta a } g(x,y,z) = z - xy = 0 \qquad (*)$$

(a) Usar el método de Lagrange para hallar condiciones necesarias para una solución del problema, y hallar todos los (x,y,z) que las verifican.

(b) El punto $(1,1,1)$ es un máximo de $(*)$. Hallar un valor aproximado de la variación del valor máximo de f si se cambia la restricción de $z - xy = 0$ a $z - xy = 0{,}1$.

3 Consideremos el problema

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ \text{ sujeta a } \begin{cases} (1)\ \ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 = 3 \\ (2)\ \ x_1x_2x_3x_4 = 144 \\ (3)\ \ x_1, \ldots, x_4 \text{ son todas } \geq 0 \end{cases}$$

(a) Escribir las condiciones necesarias para la solución de este problema.

(b) Probar que las condiciones necesarias implican que $x_1 = x_2$ y $x_3 = x_4$. Suponiendo que el problema tiene solución, hallarla.

(c) Supongamos que se cambia la restricción (2) a $x_1x_2x_3x_4 = 145$. Hallar el cambio aproximado en el valor óptimo de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ sin rehacer el problema completo

18.7 RESULTADOS SOBRE ENVOLVENTES

Los problemas de optimización en economía usan normalmente funciones que dependen de un número de parámetros, como precios, porcentaje de impuestos, niveles de renta y demás. Aunque esos parámetros se mantienen constantes durante la optimización, pueden variar según la situación económica. Por ejemplo, podemos calcular el beneficio máximo de una empresa considerando los precios a que se enfrenta como parámetros, pero luego podemos querer averiguar cómo ese beneficio máximo responde a los cambios de esos precios. Así que es importante saber qué ocurre con la solución óptima cuando la situación cambia —esto es, cuando cambian los parámetros. Los multiplicadores de Lagrange que hemos estudiado en la sección anterior daban cierta información de este tipo. Más generalmente, consideremos el problema

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \quad \text{sujeta a } g_j(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = 0, \ j = 1, \ldots, m \tag{18.27}$$

donde $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ es un vector de parámetros. Aquí $\mathbf{r}$ se mantiene constante durante la maximización con respecto a $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Nótese que los parámetros pueden aparecer tanto en el objetivo como en las funciones de restricción. El valor máximo de $f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ que se obtenga para (18.27) dependerá de $\mathbf{r}$ y lo designaremos por $f^*(\mathbf{r})$. Suponiendo que existe ese valor máximo,

$$f^*(\mathbf{r}) = \max \{ f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) : g_j(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = 0, \ j = 1, \ldots, m \} \tag{18.28}$$

Así $f^*(\mathbf{r})$ es el máximo de todos los números $f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ cuando $\mathbf{x}$ recorre el conjunto de los que verifican que $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = 0, \ j = 1, \ldots, m$. La función $f^*(\mathbf{r})$ se llama la **función valor** del problema (18.27). Si designamos por $x_1^*(\mathbf{r}), \ldots, x_n^*(\mathbf{r})$ los valores de $x_1, \ldots, x_n$ para los que se alcanza el valor máximo en (18.28), entonces

$$f^*(\mathbf{r}) = f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = f(x_1^*(\mathbf{r}), \ldots, x_n^*(\mathbf{r}), r_1, \ldots, r_k) \tag{18.29}$$

Consideremos primero el caso en que no hay restricciones. Si $n = 1$, la función $f^*(r)$ es la "envolvente" de todas las funciones $f(x, r)$ en el sentido que especificamos en la Figura 18.6.

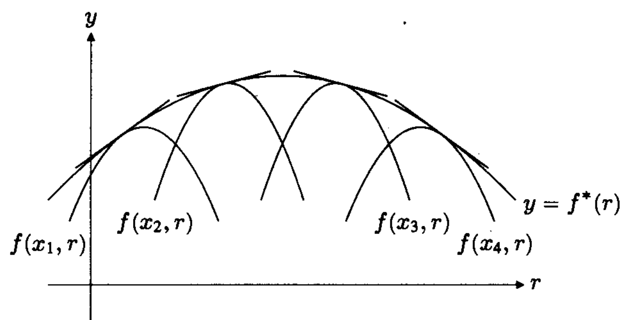


FIGURA 18.6 La función $f^*(r)$ es la "envolvente" de todas las funciones $f(x, r)$ distintas.

El resultado siguiente muestra en general cómo derivar la función valor:

> Si $f^*(\mathbf{r}) = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ y $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ es el valor de $\mathbf{x}$ que maximiza $f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$, entonces
>
> $$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}), \mathbf{r})}{\partial r_j} \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{18.30}$$

Los economistas llaman a (18.30) un **teorema de envolvente**. Es un resultado **muy útil** que se debe estudiar con atención. Nótese que si varía r_j, entonces $f^*(\mathbf{r})$ cambia por dos razones: En primer lugar, un cambio en r_j cambia el vector $\mathbf{r}$ y así cambia $f(\mathbf{x},\mathbf{r})$ directamente. En segundo lugar, un cambio en r_j cambia todas las funciones $x_1^*(\mathbf{r}),\ldots,x_n^*(\mathbf{r})$ y, por tanto, $f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})$ cambia indirectamente. El resultado de (18.30) demuestra que el efecto total sobre la función valor de un pequeño cambio en r_j se puede hallar calculando la derivada parcial de $f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})$ con respecto a r_j, ignorando el efecto indirecto de la dependencia de $\mathbf{x}^*$ de $\mathbf{r}$. A primera vista esto es sorprendente. Sin embargo, después de una reflexión más cuidadosa se puede ver que las condiciones de primer orden para que $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ maximice a $f(\mathbf{x},\mathbf{r})$ con respecto a $\mathbf{x}$ implican que cambios pequeños de $\mathbf{x}$ inducidos por un cambio pequeño de $\mathbf{r}$ tienen efectos casi nulos sobre el valor de $f(\mathbf{x}^*,\mathbf{r})$. Esto se confirma en la demostración que damos un poco más adelante.

Consideremos a continuación el problema más general (18.27) y supongamos que $\lambda_i=\lambda_i(\mathbf{r})$, $i=1,\ldots,m$, son los multiplicadores de Lagrange que se obtienen de las condiciones de primer orden para el problema. Sea $\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{r})=f(\mathbf{x},\mathbf{r})-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(\mathbf{x},\mathbf{r})$ la función de Lagrange correspondiente. Entonces:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_j}=\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial r_j}\qquad (j=1,\ldots,k)\tag{18.31}$$

Según este resultado, el efecto total sobre el valor de $f^*(\mathbf{r})$ de un cambio pequeño de r_j se puede hallar derivando parcialmente la función lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{r})$ con respecto a r_j, considerando como constantes las x y las λ. Éste es el **teorema de la envolvente** general. La demostración de este resultado que damos a continuación *supone* que $f^*(\mathbf{r})$ es diferenciable y es muy semejante a la de (18.24).

Demostración de (18.31):

Usando la regla de la cadena para derivar (18.29) con respecto a r_h obtenemos

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_h}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*(\mathbf{r})}{\partial r_h}+\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial r_h}\tag{1}$$

Por las condiciones de primer orden para el problema (18.27), para todo $i=1,\ldots,n$,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial x_i}$$

Por tanto, podemos escribir (1) en la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_h}&=\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial x_i}\Big]\frac{\partial x_i^*(\mathbf{r})}{\partial r_h}+\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial r_h}\\&=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*(\mathbf{r})}{\partial r_h}\Big]+\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r})\mathbf{r})}{\partial r_h}\end{aligned}\tag{2}$$

Ahora bien, usando la regla de la cadena para derivar la identidad $g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})=0$ con respecto a r_h obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*(\mathbf{r})}{\partial r_h}+\frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}{\partial r_h}=0$$

que se verifica para todo $j = 1, \ldots, m$. Así se puede escribir (2) como

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_h} = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}), \mathbf{r})}{\partial r_h} + \frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}), \mathbf{r})}{\partial r_h} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}), \mathbf{r})}{\partial r_h}$$

Como la diferencia entre los dos subíndices h y j no tiene ninguna significación, queda probado (18.31).

Nota: Esta demostración usa sólo las condiciones de primer orden para el problema (18.27). Por tanto, los resultados de (18.30) y (18.31) son igualmente válidos si minimizamos $f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ con respecto a $\mathbf{x}$ en lugar de maximizar.

Ejemplo 18.16

Consideremos el problema

$$\min C = rK + wL \quad \text{sujeta a} \quad K^{1/2}L^{1/4} = Q$$

que estudiamos en el Ejemplo 18.6 de la Sección 18.2. Sea $C^* = C(r, w, Q)$ la función valor para el problema y sea $\mathcal{L} = rK + wL - \lambda(K^{1/2}L^{1/4} - Q)$ la función lagrangiana. Comprobar las tres primeras igualdades del Ejemplo 18.6(**b**).

Solución: Nótese que las derivadas parciales de $\mathcal{L}$ con respecto a r, w y Q son $\partial\mathcal{L}/\partial r = K$, $\partial\mathcal{L}/\partial w = L$ y $\partial\mathcal{L}/\partial Q = \lambda$. Así, según (18.31),

$$\frac{\partial C^*}{\partial r} = K, \qquad \frac{\partial C^*}{\partial w} = L, \qquad \frac{\partial C^*}{\partial Q} = \lambda$$

Esto concuerda con los resultados del Ejemplo 18.6.

Problemas

1 Consideremos el problema siguiente: max $U(x, y) = 10x^{1/2}y^{1/2}$ sujeta a $px + qy = m$. Sea $U^*(p, q, m)$ la función valor óptimo y escribamos los resultados obtenidos en (18.31). Usando el método lagrangiano, hallar los valores de x e y (como funciones de p, q y m) que resuelven el problema y satisfacen (18.31) directamente.

2 Explicar por qué (18.24) es un caso particular de (18.31).

3 Consideremos el problema

$$\max\ x_1^a x_2^{b-a}(x_1 + b - a)^{-b} \quad \text{sujeta a} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

con a y b constantes.

(a) Resolver el problema y hallar, por tanto, las funciones de demanda $x_1 = D_1(p_1, p_2, m)$ y $x_2 = D_2(p_1, p_2, m)$.

(b) Estudiar los signos de las parciales de x_1 y x_2 con respecto a p_1, p_2 y m.

(c) Comprobar que D_1 y D_2 son homogéneas de grado 0.

18.8 PROGRAMACIÓN NO LINEAL: UNA GUÍA INFORMAL

Hasta ahora hemos estudiado en este capítulo cómo maximizar o minimizar una función sujeta a restricciones en forma de ecuaciones. Las últimas secciones se ocupan de problemas de programación no lineal, con restricciones en forma de *desigualdades*. Algunas formas especialmente simples son las que requieren que ciertas variables sean no negativas. Este tipo de restricciones se tienen que

imponer para que la solución tenga sentido económico. Por otra parte, los límites en la disponibilidad de los recursos se expresan como desigualdades más bien que como igualdades.

Un problema de programación no lineal suficientemente general es el siguiente:

$$\max\ f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{sujeta a} \quad \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \le c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \le c_m \end{cases} \tag{18.32}$$

El conjunto de vectores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ que verifican todas las restricciones se llama **el conjunto de restricciones**, el **conjunto admisible** o, más frecuentemente, el **conjunto factible**.

Nótese que minimizar $f(x_1, \ldots, x_n)$ es equivalente a maximizar $-f(x_1, \ldots, x_n)$. También una desigualdad de la forma $g_j(x_1, \ldots, x_n) \ge c_j$ se puede escribir como $-g_j(x_1, \ldots, x_n) \le -c_j$, y una igualdad $g_j(x_1, \ldots, x_n) = c_j$ es equivalente a las dos desigualdades $g_j(x_1, \ldots, x_n) \le c_j$ y $-g_j(x_1, \ldots, x_n) \le -c_j$. De esta manera la mayoría de los problemas de optimización restringida se pueden expresar en la forma (18.32).

En principio se pueden resolver estos problemas por los métodos clásicos de la Sección 17.3. En ellos se estudian los puntos estacionarios de f en el interior del conjunto factible S y el comportamiento de f en la frontera de S. Sin embargo, desde los años 50, los economistas han tratado generalmente estos problemas usando una extensión del método de los multiplicadores de Lagrange que se debe originariamente a H. W. Kuhn y A. W. Tucker.

Un caso sencillo

Consideremos primero el problema sencillo de programación no lineal

$$\max\ f(x, y) \quad \text{sujeta a} \quad g(x, y) \le c \tag{18.33}$$

Lo primero que haremos es escribir una regla que nos dé todos los puntos (x, y) que pudieran resolver el problema (18.33), excepto en casos raros. Esta regla se parece bastante a la que resuelve el problema lagrangiano max $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = c$.

Regla para resolver max $f(x, y)$ **sujeta a** $g(x, y) \le c$

1. Asociar un multiplicador constante de Lagrange λ a la restricción $g(x, y) \le c$ y definir la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda\big(g(x, y) - c\big) \tag{18.34}$$

2. Igualar a cero las parciales de $\mathcal{L}(x, y)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1'(x, y) &= f_1'(x, y) - \lambda g_1'(x, y) = 0 \\ \mathcal{L}_2'(x, y) &= f_2'(x, y) - \lambda g_2'(x, y) = 0 \end{aligned} \tag{18.35}$$

3. Introducir la **condición de holgura complementaria**

$$\lambda \ge 0 \ (= 0 \ \text{ si } g(x, y) < c) \tag{18.36}$$

4. Exigir que (x, y) satisfaga la restricción

$$g(x, y) \le c$$

Si hallamos todos los pares (x, y) que, junto con valores adecuados de λ, verifican todas esas condiciones, tenemos todos los candidatos para la solución del problema (18.33). Nótese que las condiciones **1** y **2** son exactamente las que se usaron en el método lagrangiano de la Sección 18.2. Como la condición **4** se tiene que satisfacer obviamente, la única novedad es la condición **3**.

La condición **3** es artificiosa. Dice que λ debe ser no negativa y, además, que $\lambda = 0$ si $g(x, y) < c$. Así, si $\lambda > 0$, se debe tener $g(x, y) = c$. Una formulación alternativa de esta condición es que

$$\lambda \geq 0, \quad y \quad \lambda \cdot [g(x, y) - c] = 0 \tag{18.37}$$

Más tarde veremos que, incluso en programación no lineal, el multiplicador de Lagrange λ se interpreta como un "precio" asociado a un aumento unitario del miembro de la derecha, c, de la "restricción del recurso" $g(x, y) \leq c$. Con esta interpretación, es lógico exigir que los precios sean no negativos y, si la restricción del recurso no se satura porque $g(x, y) < c$ en el óptimo, esto quiere decir que el precio asociado a un crecimiento unitario de c es 0.

Nótese que es posible que sean $\lambda = 0$ y $g(x, y) = c$ a la vez en (18.36). Decimos que $\lambda \geq 0$ y $g(x, y) \leq c$ son **desigualdades complementarias** en el sentido de que a lo más se puede "dar holgura" a una, esto es, a lo más una es estricta. Equivalentemente, al menos una debe ser una igualdad.

Advertencia: Con restricciones en forma de igualdad, el hacer cero la derivada parcial $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda$ significa recuperar la restricción $g(x, y) = c$, y así es un procedimiento válido para deducir una condición de primer orden, como se apuntó en la nota a pie de página que seguía a la discusión del método lagrangiano de la Sección 18.2. Sin embargo, cuando la restricción es una desigualdad, se puede tener $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda = -g(x, y) + c > 0$ si la restricción no se satura o está inactiva en un óptimo. Por esta razón no aconsejamos derivar la función lagrangiana con respecto al multiplicador λ, aun cuando algunos libros aconsejen este procedimiento.

Ejemplo 18.17

Resolver el problema

$$\max f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1 \text{ sujeta a } g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$$

Solución: La función lagrangiana es

$$\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \tag{1}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = 2x - 2\lambda x = 0 \tag{2}$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = 2y + 1 - 2\lambda y = 0 \tag{3}$$

La condición de holgura complementaria es

$$\lambda \geq 0 \; (= 0 \text{ si } x^2 + y^2 < 1) \tag{4}$$

Queremos hallar todos los pares (x, y) que verifican estas condiciones para un valor adecuado de λ.

Consideramos primero la condición (2), que es $2x(1 - \lambda) = 0$. Hay dos posibilidades: $\lambda = 1$ ó $x = 0$. Si $\lambda = 1$, entonces (3) da $1 = 0$, que es una contradicción. *Por tanto,* $x = 0$.

Supongamos que $x^2 + y^2 = 1$ y así $y = \pm 1$ porque $x = 0$. Tomemos primero $y = 1$. Entonces (3) implica que $\lambda = 3/2$ y así se verifica (4). Por tanto, $(0, 1)$ *con* $\lambda = 3/2$ *es un candidato a óptimo* porque se satisfacen todas las condiciones (2) a (4). Tomemos ahora $y = -1$. La condición (3) da $\lambda = 1/2$ y se verifica también (4). Por tanto, $(0, -1)$ *con* $\lambda = 1/2$ *es otro candidato a óptimo.*

Finalmente consideremos el caso en que $x = 0$ y $x^2 + y^2 = y^2 < 1$, esto es, $-1 < y < 1$. Entonces (4) implica que $\lambda = 0$ y (3) da $y = -1/2$. Por tanto, $(0, -1/2)$ *con* $\lambda = 0$ *es un candidato a óptimo.*

La conclusión es entonces que hay tres candidatos a óptimo. Ahora bien,

$$f(0,1) = 1, \qquad f(0,-1) = -1, \qquad f(0,-1/2) = -5/4 \tag{5}$$

Como queremos maximizar una función continua sobre un conjunto cerrado y acotado, por el teorema de los valores extremos, hay solución al problema. Como las únicas soluciones posibles son los tres puntos que hemos hallado, deducimos de (5) que $x = 0$ e $y = 1$ resuelven el problema. El punto $(0, -1/2)$ resuelve el problema de minimización correspondiente. Hemos resuelto estos problemas en el Ejemplo 17.5 de la Sección 17.3.

¿Por qué funciona la regla?

Supongamos que (x^*, y^*) resuelve el problema (18.33). Entonces o bien $g(x^*, y^*) < c$, en cuyo caso se dice que la restricción $g(x^*, y^*) \leq c$ está **inactiva** o **no saturada** en (x^*, y^*), o bien $g(x^*, y^*) = c$, en cuyo caso se dice que la restricción $g(x^*, y^*) \leq c$ está **activa** o **saturada** en (x^*, y^*). Se muestran los dos casos en las Figuras 18.7 y 18.8. La función objetivo crece conforme las curvas de nivel se hacen más pequeñas. En la Figura 18.7, la solución (x^*, y^*) al problema (18.33) es un punto interior del conjunto factible. Por otra parte, en la Figura 18.8, la solución (x^*, y^*) está en la frontera del conjunto factible.

En el caso de que la solución (x^*, y^*) satisfaga $g(x^*, y^*) < c$, como en la Figura 18.7, el punto (x^*, y^*) es normalmente interior al conjunto factible y de máximo de la función f. Entonces, es un punto estacionario en el cual $f_1'(x^*, y^*) = f_2'(x^*, y^*) = 0$. En este caso, si ponemos $\lambda = 0$, se verifican las condiciones (2) a (4) de la regla.

Por otra parte, en el caso en que la restricción sea saturada en (x^*, y^*), como en la Figura 18.8, el punto (x^*, y^*) resuelve el problema lagrangiano

$$\max\ f(x, y) \text{ sujeta a } g(x, y) = c \tag{18.38}$$

con una restricción en forma de igualdad. Siempre que se satisfagan las condiciones del Teorema 18.1 de la Sección 18.3, existirá un multiplicador de Lagrange λ tal que la función lagrangiana (18.34) verifica las condiciones de primer orden (18.35) en (x^*, y^*). Hace falta demostrar que ese multiplicador de Lagrange λ verifica que $\lambda \geq 0$, asegurando así que se verifica (18.36) en (x^*, y^*).

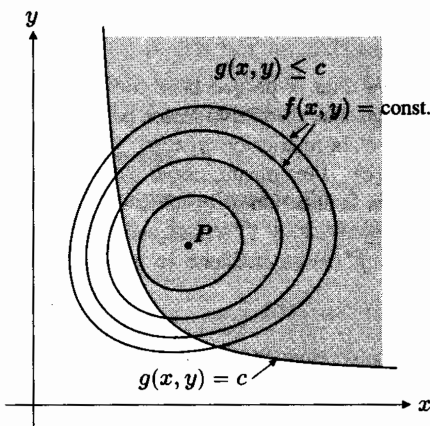


FIGURA 18.7 El punto $P = (x^*, y^*)$ es interior al conjunto factible.

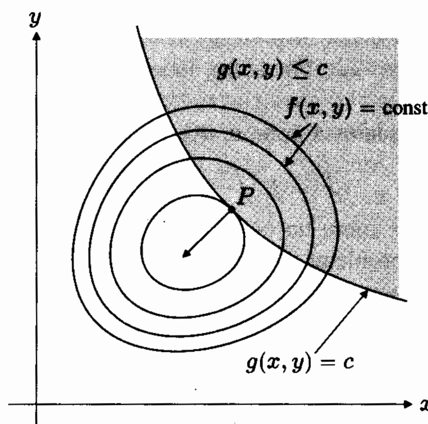


FIGURA 18.8 La restricción $g(x, y) \leq c$ está saturada en $P = (x^*, y^*)$.

Para ver por qué $\lambda \geq 0$ en este caso, nótese que se pueden escribir las condiciones de primer orden en la forma

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$$

que dice que el vector gradiente de f en (x^*, y^*) es proporcional al de g. Según (16.11) de la Sección 16.3, el gradiente apunta en la dirección de valores crecientes de la función. Ahora bien, si λ fuera negativo, los vectores ∇f y ∇g en (x^*, y^*) apuntarían en direcciones opuestas. Por tanto, alejándose un poco de (x^*, y^*) en la dirección ∇f crecerá f mientras que g decrecerá. Esto nos llevará a un punto (x, y) con $f(x, y) > f(x^*, y^*)$ y $g(x, y) < g(x^*, y^*) = c$. Por tanto, (x^*, y^*) no podría ser una solución óptima. Así debe ser $\lambda \geq 0$. De hecho, en la Figura 18.8, $\nabla f(x^*, y^*)$ y $\nabla g(x^*, y^*)$ apuntan en la dirección indicada.

Hay una explicación alternativa, que se generaliza más fácilmente al caso de varias variables y varias restricciones, y que requiere considerar las dos funciones valor

$$\begin{aligned} v(b) &= \max\{f(x, y) : g(x, y) \leq b\} \\ f^*(b) &= \max\{f(x, y) : g(x, y) = b\} \end{aligned} \tag{18.39}$$

para las versiones del problema (18.33) en las que la constante c se ha sustituido por el parámetro variable b, y donde $f^*(b)$ proviene del problema en el que la restricción desigualdad se ha sustituido por la igualdad correspondiente. Recuérdese de (18.7) que $\lambda = df^*(c)/dc$ si f^* es diferenciable en c. Vamos a demostrar ahora que f^* es no decreciente en $b = c$, lo que implicará que $\lambda \geq 0$, al menos cuando f^* es diferenciable.

En efecto, (18.39) implica que $f^*(b) \leq v(b)$ para todo b, porque la restricción en forma de igualdad es más fuerte que la desigualdad, e imponer algo más restrictivo nunca permite alcanzar un valor máximo más alto. Pero también en el caso $b < c$, la restricción $g(x, y) \leq b$ es más fuerte que $g(x, y) \leq c$, de donde se deduce que $v(b) \leq v(c)$. Finalmente, como estamos discutiendo el caso en que la restricción $g(x^*, y^*) = c$ se satura en la solución al problema (18.33), debemos tener $v(c) = f^*(c)$. Así la cadena $f^*(b) \leq v(b) \leq v(c) = f^*(c)$ se satisface siempre que $b < c$. Se deduce de aquí que $f^*(b) \leq f^*(c)$, luego $f^*(b)$ es creciente en $b = c$, y finalmente $\lambda = df^*(c)/dc \geq 0$, como queríamos.

El caso general

Ahora ya es muy fácil dar una regla para resolver el problema general (18.32) de programación no lineal. Damos la regla en el siguiente recuadro:

Regla para resolver el problema general de programación no lineal

$$\max\ (\min)\ f(\mathbf{x}) \text{ sujeta a } g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \qquad (j = 1, \dots, m)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

1. Escribir la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) - c_j)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son multiplicadores de Lagrange asociados con las m restricciones.

2. Igualar a cero todas las parciales de primer orden de $\mathcal{L}(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

3. Imponer las condiciones de holgura complementaria:

$$\lambda_j \geq 0 \ (= 0 \text{ si } g_j(\mathbf{x}) < c_j) \qquad (j = 1, \dots, m)$$

4. Exigir que $\mathbf{x}$ satisfaga las restricciones

$$g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \qquad (j = 1, \dots, m)$$

Hallar todos los $\mathbf{x}$, y los valores asociados de $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, que satisfagan todas esas condiciones. Estos son los candidatos a óptimo, y, si el problema tiene solución, al menos uno de ellos lo resuelve.

Los pasos **2** a **4** se llaman usualmente las **condiciones de Kuhn–Tucker**. Nótese que son esencialmente condiciones *necesarias* para la solución del problema (18.32). En general, no son suficientes, ni mucho menos. En efecto, supongamos que se puede hallar un punto $\mathbf{x}^0$ en el cual f es estacionaria y $g_j(\mathbf{x}) < c_j$ para $j = 1, \dots, m$. Entonces las condiciones de Kuhn–Tucker **2** a **4** se verificarán automáticamente para $\mathbf{x}^0$ junto con los multiplicadores de Lagrange $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Entonces $\mathbf{x}^0$ podría ser un máximo o mínimo local o global, o algún tipo de punto de silla. No se sabe nada más a menos que recurramos a condiciones de segundo orden de algún tipo. En la Sección 18.10 estudiamos condiciones suficientes de máximo con más precisión.

Ejemplo 18.18

Una empresa dispone de L unidades de trabajo y produce tres bienes. La producción de x, y y z unidades de esos bienes requiere αx^2, βy^2 y γz^2 unidades de trabajo respectivamente. Resolver el problema

$$\max\ ax + by + cz \text{ sujeta a } \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \leq L \tag{1}$$

cuando los coeficientes a, b, c, α, β y γ son todos constantes positivas.

Solución: La función lagrangiana es

$$\mathcal{L}(x, y, z) = ax + by + cz - \lambda(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - L)$$

Las condiciones necesarias para que (x^*, y^*, z^*) resuelva el problema son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = a - 2\lambda\alpha x^* = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = b - 2\lambda\beta y^* = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = c - 2\lambda\gamma z^* = 0 \tag{4}$$

$$\lambda \geq 0 \ (= 0 \text{ si } \alpha(x^*)^2 + \beta(y^*)^2 + \gamma(z^*)^2 < L) \tag{5}$$

Como a, b y c son distintos de cero, se deduce de (2) a (4) que λ, x^*, y^* y z^* no son todos cero. Por tanto, (2) a (4) implican que $\lambda = a/2\alpha x^* = b/2\beta y^* = c/2\gamma z^*$. Así

$$y^* = \frac{\alpha}{\beta}\frac{b}{a}x^*, \qquad z^* = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{c}{a}x^* \tag{6}$$

También, como $\lambda \neq 0$, la condición de holgura complementaria (5) implica que

$$\alpha(x^*)^2 + \beta(y^*)^2 + \gamma(z^*)^2 = L \tag{7}$$

Llevando las expresiones (6) de y^* y z^* a (7) obtenemos

$$\alpha(x^*)^2 + \frac{\alpha^2}{\beta}\frac{b^2}{a^2}(x^*)^2 + \frac{\alpha^2}{\gamma}\frac{c^2}{a^2}(x^*)^2 = L$$

Después de un poco más de cálculo algebraico se halla que la solución positiva es

$$x^* = a\sqrt{L}/\alpha\mu \tag{8}$$

donde μ designa a la constante $\mu = \sqrt{a^2/\alpha + b^2/\beta + c^2/\gamma}$. Análogamente,

$$y^* = b\sqrt{L}/\beta\mu, \qquad z^* = c\sqrt{L}/\gamma\mu \tag{9}$$

La restricción $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \leq L$ define un conjunto cerrado y acotado, de hecho un elipsoide, luego por el teorema de los valores extremos hay una solución. Como los valores de x^*, y^* y z^* de (8) y (9) son las únicas soluciones positivas a las condiciones de Kuhn–Tucker, resuelven el problema. El razonamiento del Ejemplo 18.21, Sección 18.10 también prueba la optimalidad.

En problemas más complicados de programación no lineal, es difícil a veces saber cómo comenzar a "atacar" las condiciones necesarias. En el ejemplo siguiente usamos un procedimiento sistemático para hallar todos los candidatos.

Ejemplo 18.19

Resolver el problema max $4z - x^2 - y^2 - z^2$ sujeta a las restricciones

$$z \leq xy \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \tag{2}$$

Solución: Ponemos $f(x, y, z) = 4z - x^2 - y^2 - z^2$. Representamos las restricciones por

$$g_1(x, y, z) = z - xy \leq 0, \qquad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$$

e introducimos la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, z) = 4z - x^2 - y^2 - z^2 - \lambda(z - xy) - \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

Las condiciones necesarias son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x + \lambda y - 2\mu x = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y + \lambda x - 2\mu y = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 4 - 2z - \lambda - 2\mu z = 0 \tag{5}$$

$$\lambda \geq 0 \ (= 0 \text{ si } z < xy) \tag{6}$$

$$\mu \geq 0 \ (= 0 \text{ si } x^2 + y^2 + z^2 < 3) \tag{7}$$

Para cada una de las dos restricciones tenemos bien igualdad (si la restricción está *activa*) o desigualdad (si la restricción está *inactiva*). Así, hay cuatro casos diferentes:

Caso I: (1) y (2) están inactivas, esto es, $z < xy$ y $x^2 + y^2 + z^2 < 3$. Entonces por (6) y (7), $\lambda = \mu = 0$. Llevando estos valores a las ecuaciones (3) a (5), se tiene $x = y = 0$ y $z = 2$, lo que contradice (2). *No hay candidatos a solución.*

Caso II: (1) está inactiva y (2) activa. Entonces $\lambda = 0$ por (6). Así (3) da $2x(1 + \mu) = 0$. Por tanto, $x = 0$ porque $\mu \geq 0$. Llevando esto a (4) obtenemos $y(1 + \mu) = 0$, luego $y = 0$. De $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ deducimos que $z = \pm\sqrt{3}$. Pero $z \leq xy = 0$ por (1), luego $z = -\sqrt{3}$ y entonces (5) da $4 + 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3}\mu$, que contradice $\mu \geq 0$. *No hay candidatos a solución.*

Caso III: (1) está activa y (2) inactiva. Entonces $xy = z$ y $\mu = 0$.

Si $x \neq 0$ entonces, por (4), $\lambda = 2y/x$. Llevando este valor a (3) obtenemos $2x = 2y^2/x$, luego $x^2 = y^2$, ó $y = \pm x$. Pero entonces $\lambda = 2y/x = \pm 2$, y como $\lambda \geq 0$, es $\lambda = 2$. Por tanto, $y = x$. De (5) sacamos que $z = 1$; como (1) está activa se deduce que $x^2 = y^2 = 1$. Entonces $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, lo que contradice la hipótesis de que (2) está inactiva.

La única posibilidad que resta en este caso es que $x = 0$. Por (4), $y = 0$. Entonces $z = 0$ y por tanto (5) implica que $\lambda = 4$. Entonces se satisfacen todas las condiciones (1) a (7). Así, $(0, 0, 0)$ *con* $\lambda = 4$ *y* $\mu = 0$ *es un candidato.*

Caso IV: (1) y (2) están activas. Entonces $xy = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. De (3) y (4), obtenemos que $-2x + \lambda y - 2\mu x = -2y + \lambda x - 2\mu y$, ó $(y - x)(2 + \lambda + 2\mu) = 0$. Como $2 + \lambda + 2\mu > 0$, se tiene $y = x$. Así, $z = x^2$ y $x^2 + x^2 + x^4 = 3$ ó $(x^2)^2 + 2(x^2) - 3 = 0$, lo que implica que $x^2 = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2$. Para x real, la única posibilidad es que $x^2 = 1$, y así $x = \pm 1$. Entonces $y = x = \pm 1$ y $z = xy = 1$. Ahora, (3) y (4) implican que $(-2 + \lambda - 2\mu)x = 0$ y así $-2 + \lambda - 2\mu = 0$ porque $x \neq 0$. Pero (5) implica que $2 - \lambda - 2\mu = 0$ porque $z = 1$. Sumando estas dos ecuaciones en λ y μ se obtiene $-4\mu = 0$. Así $\mu = 0$ y $\lambda = 2$. Esto nos deja con los *dos candidatos a solución* $(1, 1, 1)$ *y* $(-1, -1, 1)$, *con* $\lambda = 2$ *y* $\mu = 0$ *para ambos.*

Ahora bien,

$$f(0,0,0) = 0, \qquad f(1,1,1) = 1, \qquad f(-1,-1,1) = 1$$

luego $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, 1)$ resuelven el problema. De nuevo el teorema de los valores extremos nos dice que hay solución.

Nota: El método general para hallar todos los candidatos a óptimo en un problema de programación no lineal se puede formular así: Estudiar primero el caso en que todas las restricciones están activas, luego estudiar la totalidad de los casos en que todas menos una están activas, luego aquéllos en que todas menos dos están activas, y así sucesivamente. Se termina por el estudio del caso en que ninguna restricción está activa. Por supuesto que el orden no importa, pero hay que considerar cada

caso. En cada paso hallamos todos los vectores $\mathbf{x}$, junto con los valores asociados de los multiplicadores de Lagrange, que verifican todas las condiciones relevantes, si las hay. Luego buscamos entre todas las posibilidades para hallar la mejor.

Problemas

1 Consideremos el problema

$$\max\ x^2 + 2y^2 - x \text{ sujeta a } x^2 + y^2 \leq 1$$

(a) Escribir la función lagrangiana y las condiciones de primer orden de (18.35).

(b) ¿Cuál es la condición de holgura complementaria?

(c) Hallar todos los pares (x, y) que verifican todas las condiciones necesarias. Hay cinco candidatos. Hallar la solución al problema.

2 Resolver los problemas siguientes, suponiendo que hay soluciones:

(a) $\max\ \frac{1}{2}x - y$ sujeta a $x + e^{-x} \leq y,\ x \geq 0$.

(b) $\max\ x^2 + 2y$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 5,\ y \geq 0$.

3 Resolver los problemas siguientes, suponiendo que existan soluciones:

(a) $\max\ y - x^2$ sujeta a $y \geq 0,\ y - x \geq -2,\ y^2 \leq x$.

(b) $\max\ xe^{y-x} - 2ey$ sujeta a $x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1 + x/2$.

4 Consideremos el problema

$$\max x + ay \text{ sujeta a } x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 0 \qquad (a \text{ es constante})$$

(a) Escribir las condiciones necesarias.

(b) Hallar la solución según los valores de la constante a.

5 Consideremos el problema

$$\max \ln x_1(x_2 + x_3) \text{ sujeta a } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1 \\ x_1 & \geq 1 \\ x_1^2 + x_2^2 & \leq 2 \end{cases}$$

(a) Escribir las condiciones necesarias.

(b) Hallar *todos* los puntos que verifican las condiciones necesarias. (*Indicación:* Hay infinitos.) ¿Cuál es la solución del problema?

Problemas avanzados

6 Resolver el problema

$$\max\ \ln(x^2 + 2y) - \tfrac{1}{2}x^2 - y \text{ sujeta a } 2 \leq xy,\ x \geq 1,\ y \geq 1$$

18.9 MÁS SOBRE PROGRAMACIÓN NO LINEAL (OPCIONAL)

En esta sección se estudia primero el caso en que las variables se suponen no negativas, y se enuncian las condiciones de Kuhn–Tucker modificadas para él. Luego se describen algunas interpretaciones económicas de la programación no lineal.

Condiciones de no negatividad para las variables

Consideremos una vez más el problema general de programación no lineal (18.32). Es frecuente que las variables que aparecen en los problemas económicos de optimización sean no negativas por su propia naturaleza. No es difícil incorporar esas restricciones a la formulación de (18.32). Por ejemplo, la restricción $x_1 \geq 0$ se puede representar por $g_{m+1}(x_1, \ldots, x_n) = -x_1 \leq 0$, y se introduce un multiplicador de Lagrange adicional para ella. Sin embargo, para no tener que manejar demasiados multiplicadores de Lagrange, se formulan las condiciones necesarias de solución de los problemas de programación no lineal con restricciones de no negatividad de las variables de una forma ligeramente distinta.

Consideremos primero el problema

$$\max \; f(x, y) \; \text{ sujeta a } \; g(x, y) \leq c, \; x \geq 0, \; y \geq 0 \tag{18.40}$$

Introducimos las funciones $g_1(x, y) = -x$ y $g_2(x, y) = -y$, con lo que las restricciones del problema (18.40) se convierten en $g(x, y) \leq c$, $g_1(x, y) \leq 0$ y $g_2(x, y) \leq 0$. Aplicando la regla para resolver (18.32), tomamos la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c) - \mu_1(-x) - \mu_2(-y)$$

Las condiciones de Kuhn–Tucker son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_1'(x, y) - \lambda g_1'(x, y) + \mu_1 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_2'(x, y) - \lambda g_2'(x, y) + \mu_2 = 0 \tag{2}$$

$$\lambda \geq 0 \;\; (= 0 \text{ si } g(x, y) < c) \tag{3}$$

$$\mu_1 \geq 0 \;\; (= 0 \text{ si } x > 0) \tag{4}$$

$$\mu_2 \geq 0 \;\; (= 0 \text{ si } y > 0) \tag{5}$$

De (1) obtenemos $f_1'(x, y) - \lambda g_1'(x, y) = -\mu_1$. De (4) obtenemos que $-\mu_1 \leq 0$ y $-\mu_1 = 0$ si $x > 0$. Así (1) y (4) equivalen conjuntamente a

$$f_1'(x, y) - \lambda g_1'(x, y) \leq 0 \;\; (= 0 \text{ si } x > 0) \tag{6}$$

De manera análoga, (2) y (5) equivalen conjuntamente a

$$f_2'(x, y) - \lambda g_2'(x, y) \leq 0 \;\; (= 0 \text{ si } y > 0) \tag{7}$$

Por tanto, las nuevas condiciones de Kuhn–Tucker son (6), (7) y (3). Nótese que, después de sustituir (1) y (4) por (6), y (2) y (5) por (7), sólo el multiplicador λ asociado con $g(x, y) \leq c$ permanece.

Se puede extender la misma idea al problema de n variables

$$\max f(x_1, \ldots, x_n) \;\text{ con }\; \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq c_m \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{18.41}$$

Formuladas brevemente, las condiciones necesarias de solución de (18.41) son que, para cada $i = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \leq 0 \;\; (= 0 \text{ si } x_i > 0) \tag{18.42}$$

$$\lambda_j \geq 0 \;\; (= 0 \text{ si } g_j(\mathbf{x}) < c_j) \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{18.43}$$

Ejemplo 18.20 (**Precios en horas punta**)

Consideremos un productor que genera energía eléctrica quemando combustible, como carbón o gas natural. La demanda de electricidad varía entre horas punta y horas valle. En las primeras hay que usar toda la capacidad de generar energía.

Consideremos un cierto intervalo de tiempo, por ejemplo un año, dividido en n periodos de igual longitud. Designemos por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a las ventas de energía eléctrica en esos n periodos. Supongamos que una autoridad reguladora fija los precios unitarios correspondientes a $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Se designa por $C(x_1, \ldots, x_n)$ al coste total operativo en los n periodos y por k a la capacidad de producción en cada período. Finalmente, designemos por $D(k)$ al coste de mantener la capacidad de producción k. El beneficio total del productor es entonces

$$\pi(x_1, \ldots, x_n, k) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - C(x_1, \ldots, x_n) - D(k) \tag{1}$$

Como el productor no puede exceder la capacidad k en ningún período, se enfrenta a las restricciones

$$x_1 \leq k, \ \ldots, \ x_n \leq k \tag{2}$$

Consideramos el problema de hallar $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ y $k \geq 0$ que maximizan el beneficio con las restricciones (2).

Este es un problema de programación no lineal en $n+1$ variables con n restricciones. La función lagrangiana $\mathcal{L}$ es

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, k) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - C(x_1, \ldots, x_n) - D(k) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - k)$$

Los valores $(x_1^0, \ldots, x_n^0, k^0) \geq 0$ resuelven el problema solamente si existen multiplicadores de Lagrange $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tales que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = p_i - C_i'(x_1^0, \ldots, x_n^0) - \lambda_i \leq 0 \ \ (= 0 \text{ si } x_i^0 > 0) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = -D'(k^0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 0 \ \ (= 0 \text{ si } k^0 > 0) \tag{4}$$

$$\lambda_i \geq 0 \ (= 0 \text{ si } x_i^0 < k) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

Sea i un índice tal que $x_i^0 > 0$. Entonces (3) implica que

$$p_i = C_i'(x_1^0, \ldots, x_n^0) + \lambda_i \tag{6}$$

Si el período i-ésimo no es de horas puntas, entonces $x_i^0 < k^0$ y así $\lambda_i = 0$ por (5). De (6) se deduce que $p_i = C_i'(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Así vemos que *el* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *que maximiza el beneficio igualará el precio puesto por la autoridad reguladora para los periodos fuera de las horas punta y el coste operativo marginal correspondiente.*

Por otra parte, λ_j puede ser positivo en horas punta cuando $x_j^0 = k^0$. Si $k^0 > 0$ se deduce de (4) que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = D'(k^0)$. Concluimos que la estructura de la producción será tal que *en horas punta el precio puesto por el regulador excederá al coste operativo marginal en una cantidad* λ_i, *que es realmente el "precio sombra" de la restricción de capacidad* $x_i \leq k$. *La suma de esos precios sombra sobre todos los periodos de hora punta es igual al coste marginal de*

capacidad.

Una interpretación económica de los problemas de programación no lineal

Consideremos una empresa que produce un cierto bien mediante n "procesos de producción" intermedios distintos. Además se necesitan m recursos distintos durante la producción de los que se dispone en total de las cantidades $c_1, \ldots, c_m$. Designemos por $f(x_1, \ldots, x_n)$ al número de unidades producidas de ese bien cuando los n procesos de producción trabajan a los niveles $x_1, \ldots, x_n$. Sea $g_j(x_1, \ldots, x_n)$ el número de unidades del recurso j-ésimo, $j = 1, \ldots, m$, que se necesitan en esas circunstancias. El problema (18.41) se puede formular en este caso como sigue:

Hallar niveles no negativos de actividad a los cuales hay que hacer operar los procesos de producción para obtener la mayor cantidad posible del bien, teniendo en cuenta la imposibilidad de usar más recursos de los que se dispone en total.

Para cada recurso j tomamos un precio sombra unitario λ_j. Para producir $f(x_1, \ldots, x_n)$ unidades del bien se requieren $g_j(x_1, \ldots, x_n)$ unidades del recurso j al coste sombra $\lambda_j g_j(x_1, \ldots, x_n)$. Si hacemos igual a 1 el precio sombra unitario del bien producido, la función $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ definida por

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, \ldots, x_n) \tag{18.44}$$

representa el *beneficio sombra* de hacer trabajar los procesos a los niveles del vector de actividad $(x_1, \ldots, x_n)$. Supongamos que encontramos un vector de actividad $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ y precios sombra no negativos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que:

1. $\mathbf{x}^0$ maximiza el beneficio sombra entre todos los vectores de niveles de actividad no negativos.
2. $\mathbf{x}^0$ verifica cada restricción de recursos $g_j(\mathbf{x}^0) \leq c_j, \ j = 1, \ldots, m$.
3. Si no se usa en su totalidad el recurso j-ésimo porque $g_j(\mathbf{x}^0) < c_j$, entonces el precio sombra λ_j de ese recurso es 0.

En esas condiciones podemos demostrar que $\mathbf{x}^0$ *resuelve el problema (18.41):*

Teorema 18.3

Consideremos el problema

$$\max f(\mathbf{x}) \quad \text{sujeta a} \quad g_j(\mathbf{x}) \leq c_j, \ j = 1, \ldots, m, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Supongamos que existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ y un vector factible $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ tales que

(a) $f(\mathbf{x}^0) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

(b) $\lambda_j \geq 0$ ($= 0$ si $g_j(\mathbf{x}^0) < c_j$) para $j = 1, \ldots, m$

Entonces $\mathbf{x}^0$ resuelve el problema.

Demostración: Designemos por S al conjunto factible, es decir, al de los vectores $\mathbf{x}$ que verifican las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \leq c_j$, para $j = 1, \ldots, m$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. El símbolo $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ significa que todas las componentes del

vector $\mathbf{x}$ son mayores o iguales que cero. Reordenando los términos de (**a**) tenemos[5]

$$f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}) \geq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\mathbf{x}^0) - g_j(\mathbf{x})) \text{ para todo } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{$*$}$$

Pero (**b**) y la condición $g_j(\mathbf{x}) \leq c_j$ implican conjuntamente que $\lambda_j g_j(\mathbf{x}^0) = \lambda_j c_j$ para $j = 1, \ldots, m$. Si $\lambda_j = 0$, la igualdad es obvia. Si $\lambda_j > 0$, entonces (**b**) y la restricción implican que $g_j(\mathbf{x}^0) = c_j$, y así $\lambda_j g_j(\mathbf{x}^0) = \lambda_j c_j$. Sumando estas igualdades para j obtenemos

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x}^0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j \tag{18.45}$$

Por tanto, $(*)$ implica que

$$f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}) \geq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (c_j - g_j(\mathbf{x})) \text{ para todo } \mathbf{x} \in S \tag{$**$}$$

Sin embargo, la restricción y $\lambda_j \geq 0$ implica que $\lambda_j(c_j - g_j(\mathbf{x})) \geq 0$ para $j = 1, \ldots, m$, y así el miembro de la derecha de $(**)$ es ≥ 0. Por tanto, $f(\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in S$.

No se requieren condiciones de regularidad para f ni $g_1, \ldots, g_m$ en el Teorema 18.3, excepto cuando hemos supuesto implícitamente que las funciones están definidas para $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Usando la terminología económica, (18.45) nos dice que, a los precios sombra dados para los recursos, *el valor total de los recursos usados en el óptimo* $\mathbf{x}^0$ *es igual al valor sombra total de los stocks iniciales.*

El Teorema 18.3 suministra condiciones suficientes para que $\mathbf{x}^0$ resuelva el problema (18.41). ¿Son también necesarias? Esto es, si $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ resuelve el problema (18.41), ¿es posible siempre hallar precios no negativos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que se satisfagan (**a**) y (**b**) del Teorema 18.3? La respuesta es no. Sin embargo, si la función π de (18.44) es cóncava, y si imponemos una condición débil adicional en el conjunto de restricciones, se puede demostrar la existencia de estos precios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.[6]

Propiedades de la función valor

Volvamos al problema general (18.32) de programación no lineal sin restricciones de no negatividad explícitas. El valor del objetivo $f(\mathbf{x})$ depende obviamente de $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$. La función definida por

$$v(\mathbf{c}) = \max\{ f(\mathbf{x}) : g_j(\mathbf{x}) \leq c_j,\ j = 1, \ldots, m \} \tag{18.46}$$

asigna a cada vector $\mathbf{c}$ el valor óptimo $v(\mathbf{c})$ de f. Se le llama la **función valor** para el problema.

Las tres propiedades siguientes de v son muy útiles:

1. $v(\mathbf{c})$ es no decreciente en cada variable $c_1, \ldots, c_m$.
2. Si existe $\partial v(\mathbf{c})/\partial c_j$, entonces es igual a $\lambda_j(\mathbf{c})$, $\quad j = 1, \ldots, m$.
3. Si $f(\mathbf{x})$ es cóncava y $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ son todas convexas, entonces $v(\mathbf{c})$ es cóncava.

La propiedad **1** se demuestra inmediatamente porque si c_j crece y todas las otras variables están fijas, el conjunto factible se agranda. Por tanto, $v(\mathbf{c})$ no puede decrecer.

Respecto a la propiedad **2**, cada $\lambda_j(\mathbf{c})$ es un multiplicador de Lagrange que proviene de las condiciones de Kuhn–Tucker. Sin embargo, la función valor v no tiene por qué ser diferenciable.

---

[5] De hecho basta suponer que se verifica $(*)$ para todo $\mathbf{x}$ que verifica las restricciones.

[6] Véase Dixit (1990).

Aun cuando f y $g_1, \ldots, g_m$ sean todas diferenciables, la función valor puede tener cambios bruscos de pendiente.[7] Damos una demostración de la propiedad 3 que es importante en muchas aplicaciones económicas.

Demostración: Probamos la propiedad 3. Designemos por $\mathbf{x}(\mathbf{c})$ a una solución óptima al problema cuando el vector de los miembros de la derecha de las desigualdades es $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$. Sean $\mathbf{c}'$ y $\mathbf{c}''$ dos vectores arbitrarios de miembros de la derecha. Entonces $v(\mathbf{c}') = f(\mathbf{x}(\mathbf{c}'))$ y $v(\mathbf{c}'') = f(\mathbf{x}(\mathbf{c}''))$, con $g_j(\mathbf{x}(\mathbf{c}')) \leq c_j'$ y $g_j(\mathbf{x}(\mathbf{c}'')) \leq c_j''$, para $j = 1, \ldots, m$. Sea $t \in [0, 1]$. Correspondiente al vector $(1-t)\mathbf{c}' + t\mathbf{c}''$ hay una solución óptima $\mathbf{x}((1-t)\mathbf{c}' + t\mathbf{c}'')$ para la cual

$$v((1-t)\mathbf{c}' + t\mathbf{c}'') = f(\mathbf{x}((1-t)\mathbf{c}' + t\mathbf{c}''))$$

Escribamos $\widehat{\mathbf{x}} = (1-t)\mathbf{x}(\mathbf{c}') + t\mathbf{x}(\mathbf{c}'')$. La convexidad de g_j implica que, para $j = 1, \ldots, m$, se tiene

$$g_j(\widehat{\mathbf{x}}) \leq (1-t)g_j(\mathbf{x}(\mathbf{c}')) + tg_j(\mathbf{x}(\mathbf{c}'')) \leq (1-t)c_j' + tc_j''$$

donde la última desigualdad se deduce del hecho de que los dos vectores $\mathbf{x}(\mathbf{c}')$ y $\mathbf{x}(\mathbf{c}'')$ sean factibles. Así $\widehat{\mathbf{x}}$ es factible para el problema cuyo miembro de la derecha es el vector $(1-t)\mathbf{c}' + t\mathbf{c}''$. Por definición, $\mathbf{x}((1-t)\mathbf{c}' + t\mathbf{c}'')$ es óptimo para este problema. Por tanto,

$$f(\widehat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}((1-t)\mathbf{c}' + t\mathbf{c}'')) = v((1-t)\mathbf{c}' + t\mathbf{c}'') \qquad (*)$$

Además, la concavidad de f implica que

$$f(\widehat{\mathbf{x}}) \geq (1-t)f(\mathbf{x}(\mathbf{c}')) + tf(\mathbf{x}(\mathbf{c}'')) = (1-t)v(\mathbf{c}') + tv(\mathbf{c}'') \qquad (**)$$

La concavidad de v se deduce de las desigualdades $(*)$ y $(**)$.

Problemas

1 Resolver el problema $\max\ 1 - x^2 - y^2$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$; (a) por razonamiento directo y (b) usando las condiciones de Kuhn–Tucker de la sección anterior.

2 Usar las condiciones (18.42) y (18.43) para resolver el problema de importación de gas natural del Ejemplo 17.6, Sección 17.3, a saber

$$\max\ 9x + 8y - 6(x+y)^2 \ \text{ sujeta a } \begin{cases} x & \leq 5 \\ \quad\ y & \leq 3, \\ -x + 2y & \leq 2 \end{cases} \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$$

3 Supongamos que la utilización a capacidad óptima por una empresa exige que se elijan las cantidades x_1 y x_2 producidas y el nivel de capacidad k de tal manera que se resuelva el problema

$$\max\ x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2 - k^2 \ \text{ sujeta a } \begin{cases} x_1 \leq k \\ x_2 \leq k \end{cases}, \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ k \geq 0$$

Demostrar que $k = 0$ no puede ser óptima y luego hallar la solución.

Problemas avanzados

4 Supongamos que $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \geq \mathbf{0}$ y $\lambda = \mathbf{p} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \geq \mathbf{0}$ verifican las condiciones suficientes (**a**) y (**b**) del Teorema 18.3, de tal manera que $\mathbf{x}^0$ resuelve el problema (18.41). Supongamos que $\widehat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \geq \mathbf{0}$ resuelve también el problema. Demostrar que, *para los* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *asociados a* $\mathbf{x}^0$, el vector $\widehat{\mathbf{x}}$ también verifica (**a**) y (**b**) (con $\widehat{\mathbf{x}}$ sustituyendo a $\mathbf{x}^0$, claro).

5 Considerar el problema

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \ \text{ sujeta a } g_j(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \leq 0,\ j = 1, \ldots, m$$

---

7 Para un estudio de las propiedades de la función valor puede verse Luenberger (1973), Sección 10.6, y Dixit (1990).

Supongamos que f es cóncava en $(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ y que cada $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ es convexa en $(\mathbf{x}, \mathbf{r})$. Demostrar que el valor óptimo $v(\mathbf{r})$ de f como función de $\mathbf{r}$ es cóncava en $\mathbf{r}$. (*Indicación:* Usar la misma técnica que en la demostración anterior de la propiedad **3**.)

6 Para el problema (18.41), sea $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(g_j(\mathbf{x}) - c_j)$. Decimos que $\mathcal{L}$ tiene un **punto de silla** en $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$, con $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$, $\lambda^* \geq \mathbf{0}$, si

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ y todo } \lambda \geq \mathbf{0} \tag{$*$}$$

(a) Probar que, si $\mathcal{L}$ tiene un punto de silla en $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$, entonces $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema (18.41). (*Indicación:* Usar la segunda desigualdad de $(*)$ para probar que $g_j(\mathbf{x}^*) \leq c_j$ para $j = 1, \ldots, m$. Probar luego que $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^*(g_j(\mathbf{x}^*) - c_j) = 0$. Usar después la primera desigualdad de $(*)$ para completar la demostración.)

(b) Supongamos que existe un vector factible $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ y precios $\lambda^* \geq \mathbf{0}$ tales que $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ siempre que $\mathbf{x}$ sea factible y con $\lambda_j = 0$ si $g_j(\mathbf{x}^*) \leq c_j$ para $j = 1, \ldots, m$. Probar que $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$ tiene un punto de silla $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ en este caso.

18.10 RESULTADOS PRECISOS (OPCIONAL)

Comenzamos demostrando que las condiciones de Kuhn–Tucker son suficientes para óptimo, siempre que se satisfagan ciertas condiciones de concavidad o convexidad.[8]

Teorema 18.4 (Condiciones suficientes de Kuhn–Tucker)

Consideremos el problema de programación no lineal

$$\max \ f(\mathbf{x}) \text{ sujeta a } \ g_j(\mathbf{x}) \leq c_j, \ j = 1, \ldots, m \tag{18.47}$$

donde f y $g_1, \ldots, g_m$ son continuamente diferenciables, f es cóncava y las $g_1, \ldots, g_m$ son convexas. Supongamos que existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ y un vector factible $\mathbf{x}^0$ tales que

(**a**) $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$

(**b**) $\lambda_j \geq 0 \ \ (= 0 \text{ si } g_j(\mathbf{x}^0) < c_j) \qquad (j = 1, \ldots, m)$

Entonces $\mathbf{x}^0$ resuelve el problema.

Demostración: La función lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ se puede escribir en la forma

$$f(\mathbf{x}) + \lambda_1(-g_1(\mathbf{x}) + c_1) + \cdots + \lambda_m(-g_m(\mathbf{x}) + c_m)$$

Ésta es cóncava por ser suma de funciones cóncavas. Por (**a**), $\partial\mathcal{L}(\mathbf{x}^0)/\partial x_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, y así el Teorema 17.8 de la Sección 17.7 implica que $\mathbf{x}^0$ maximiza a $\mathcal{L}(\mathbf{x})$. El resultado se deduce del Teorema 18.3, que se sigue verificando sin las restricciones $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Nota: Es fácil ver que el Teorema 18.4 es válido para el problema (18.41) con las restricciones de no negatividad de las variables, siempre que (**a**) y (**b**) se sustituyan por (18.42) y (18.43).

---

[8] La referencia clásica es H. W. Kuhn, A. W. Tucker, "Non–linear programming" en *Proceedings of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, J. Neyman (editor), University of California Press, Berkeley, (1951) pp. 481-492. Ver también Dixit (1990).

Ejemplo 18.21

¿Qué puede decir el Teorema 18.4 sobre el problema del Ejemplo 18.18, Sección 18.8?

Solución: La función objetivo $f(x, y, z) = ax+by+cz$ es lineal y, por tanto, cóncava. También $g(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$, con $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ y $\gamma \geq 0$, es suma de funciones convexas, luego es convexa. Como los valores de x^*, y^* y z^* dados por (8) y (9) son soluciones a la condiciones (**a**) y (**b**) del Teorema 18.4, sabemos que son óptimas.

El Teorema 18.4 es muy conveniente cuando se satisfacen sus hipótesis. Sin embargo, la concavidad de f y la convexidad de las funciones g_j son hipótesis ciertamente restrictivas. De hecho, en el Ejemplo 18.17 de la Sección 18.8, la función objetivo $f(x, y)$ no es cóncava, y en el Ejemplo 18.19 la función de restricción $g_1(x, y, z) = z - xy$ no es convexa.

La siguiente generalización del Teorema 18.4 es útil en muchas aplicaciones económicas.[9]

Teorema 18.5 (Condiciones suficientes en programación cuasi-cóncava)

Consideremos el problema del Teorema 18.4 donde las funciones f, g_1, ..., g_m son continuamente diferenciables. Supongamos que existen números λ_1, ..., λ_m y un vector $\mathbf{x}^0$ tales que

(**a**) $\mathbf{x}^0$ es factible y se verifican (**a**) y (**b**) del Teorema 18.4.

(**b**) $(f_1'(\mathbf{x}^0), \ldots, f_n'(\mathbf{x}^0)) \neq (0, \ldots, 0)$.

(**c**) $f(\mathbf{x})$ es cuasi-cóncava y $\lambda_j g_j(\mathbf{x})$ es cuasi-convexa para $j = 1, \ldots, m$.

Entonces $\mathbf{x}^0$ resuelve el problema.

La condición (**b**) es un añadido significativo a las condiciones correspondientes en el Teorema 18.4. Se excluyen los puntos $\mathbf{x}^0$ en los cuales f es estacionaria. Esto es necesario porque un punto estacionario de la función cuasi-cóncava f puede incluso no ser un máximo local, mucho menos una solución al problema de maximización restringida (véase Problema 5).

Ejemplo 18.22

Consideremos el siguiente problema estándar en teoría de demanda del consumidor, en el cual se permite al consumidor gastar por debajo de sus posibilidades:

$$\max U(x_1, \ldots, x_n) \text{ sujeta a } p_1x_1 + \cdots + p_nx_n \leq m \tag{1}$$

Supongamos que la función de utilidad U es continuamente diferenciable y cuasi-cóncava y que los precios $p_1, \ldots, p_n$ son no negativos. Supongamos que $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ satisface la restricción presupuestaria, además de (**a**) y (**b**) del Teorema 18.4, o sea

$$U_i'(\mathbf{x}^0) = \lambda p_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

$$\lambda \geq 0 \;\; (= 0 \text{ si } p_1x_1^0 + \cdots + p_nx_n^0 < m) \tag{3}$$

Supongamos además que no todas las parciales $U_1'(\mathbf{x}^0)$, ..., $U_n'(\mathbf{x}^0)$ son cero. Entonces (2) implica que $\lambda > 0$ y así $p_1x_1^0 + \cdots + p_nx_n^0 = m$. Por tanto, se gasta todo el presupuesto y $\mathbf{x}^0$ resuelve el problema (1). Para tomar en cuenta explícitamente las restricciones $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, usar la Nota al Teorema 18.4.

[9] Véase K. J. Arrow, A. C. Enthoven, "Quasi-concave programming" *Econometrica*, 26 (1959), pp. 522-552.

Condiciones necesarias

Hasta ahora hemos tratado en esta sección de condiciones suficientes de óptimo en programación no lineal. Vamos a volver ahora a condiciones necesarias.

La regla de la Sección 18.8 para el problema (18.32) nos da todos los candidatos a óptimo, excepto en "casos raros". Para obtener condiciones verdaderamente necesarias tenemos que dar una nueva:[10]

Una cualificación de restricciones

Las funciones g_j $(j = 1, \ldots, m)$ correspondientes a las restricciones que están activas en $\mathbf{x}^0$ tienen gradientes en $\mathbf{x}^0$ que son linealmente independientes. (18.48)

En el Ejemplo 18.23 a continuación se prueba que no se puede prescindir en el Teorema 18.6 de la cualificación de las restricciones.

Teorema 18.6 (Condiciones necesarias de Kuhn–Tucker)

Supongamos que $\mathbf{x} = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ resuelve el problema

$$\max f(\mathbf{x}) \text{ sujeta a } g_j(\mathbf{x}) \leq c_j, \ j = 1, \ldots, m$$

donde $f, g_1, \ldots, g_m$ son funciones continuamente diferenciables. Supongamos además que se verifica la cualificación de las restricciones (18.48). Entonces, existen unos únicos números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, tales que

(a) $$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(b) $\lambda_j \geq 0$ $(= 0 \text{ si } g_j(\mathbf{x}^0) < c_j)$ $\qquad (j = 1, \ldots, m)$

Ejemplo 18.23

Consideremos el problema

$$\max \ f(x, y) = xy \text{ sujeta a } g(x, y) = (x + y - 2)^2 \leq 0$$

Como $(x + y - 2)^2$ es no negativa, la restricción es equivalente a $x + y - 2 = 0$, luego la solución es $x = 1$ e $y = 1$ (véase Problema 4 de la Sección 18.2). La condición (**a**) del Teorema 18.6 se reduce a

$$y - 2\lambda(x + y - 2) = 0, \qquad x - 2\lambda(x + y - 2) = 0$$

Haciendo $x = 1$ e $y = 1$ se obtiene la contradicción $1 = 0$ en cada caso.

Nótese que $g_1'(x, y) = g_2'(x, y) = 2(x + y - 2) = 0$ para $x = y = 1$, luego el gradiente de g en $(1, 1)$ es $(0, 0)$, que no es un conjunto de vectores linealmente independientes. Así, la cualificación de la restricción falla en $(1, 1)$.

[10] Nótese la semejanza de esta condición y la condición correspondiente para el problema lagrangiano de la nota a pie de página 4 en (18.21), Sección 18.5. Véase Luenberger (1973) para una demostración del Teorema 18.6.

En virtud del Teorema 18.6, si $\mathbf{x}^0$ resuelve el problema (18.32) y se satisface la cualificación de las restricciones en $\mathbf{x}^0$, entonces se verifican las condiciones (**a**) y (**b**). Esto significa que si no se verifica la cualificación de las restricciones en $\mathbf{x}^0$, entonces $\mathbf{x}^0$ puede ser una solución del problema sin verificar (**a**) y (**b**), como era el caso de $\mathbf{x}^0 = (1, 1)$ en el Ejemplo anterior. El método correcto para hallar *todos* los candidatos a óptimo en el problema (18.32) es por tanto el siguiente:

1. Hallar todos los puntos factibles donde se satisfacen la cualificación de las restricciones y las condiciones (**a**) y (**b**).

2. Hallar también todos los puntos factibles en los que la cualificación de las restricciones falla.

Si sabemos que el problema tiene solución, entonces los pasos **1** y **2** nos darán todos los posibles candidatos a solución. Después de evaluar f en todos esos candidatos, podemos tomar el (o los) que maximiza(n) f.

Nota: Un error común al aplicar el Teorema 18.6 es el siguiente: Supongamos que se encuentra un único candidato a solución $\mathbf{x}^0$ a partir de las condiciones (**a**) y (**b**) del teorema. Entonces se comprueba la cualificación de las restricciones en $\mathbf{x}^0$. El error consiste en no comprobar si la cualificación de las restricciones falla en *otros* puntos factibles. Si lo hace, esos puntos son también candidatos a solución, y el verdadero óptimo puede darse en uno de ellos. En el Problema 6 se estudia esta posibilidad

Problemas

1 Consideremos el problema

$$\max f(x,y) = 2 - (x-1)^2 - e^{y^2} \text{ sujeta a } x^2 + y^2 \leq a$$

donde a es una constante positiva.

(a) Demostrar que $f(x, y)$ es cóncava.

(b) Escribir las condiciones de Kuhn–Tucker para la solución del problema. Hallar la única solución posible, que dependerá de a, y demostrar que es óptima usando el Teorema 18.4.

2 (a) Resolver el problema siguiente por un razonamiento geométrico.

$$\max\ 2x + y \quad \text{sujeta a} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + (y+1)^2 \leq 4 \end{cases} \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$$

(b) Escribir las condiciones de Kuhn–Tucker. Usando la Nota al Teorema 18.4, demostrar que el punto hallado en la parte anterior resuelve el problema.

(c) Supongamos que se sustituye la restricción $x^2 + (y+1)^2 \leq 4$ por $x^2 + (y+1)^2 \leq 4{,}1$. Dar una estimación del cambio aproximado del valor óptimo de $2x + y$.

3 Consideremos el problema del Ejemplo 18.2 de la Sección 18.1. Usar el Teorema 18.5 para demostrar que se ha hallado la solución. (*Indicación:* Usar (17.32)(**b**), Sección 17.10.)

4 Consideremos el problema $\max f(x)$ sujeta a $x \in [a, b]$, $a < b$.

(a) Escribiendo las restricciones en la forma $g_1(x) = a - x \leq 0$ y $g_2(x) = x - b \leq 0$, ver qué tienen que decir las condiciones de Kuhn–Tucker sobre un punto x^* que resuelva el problema. (Considerar los tres casos $x^* = a$, $x^* \in (a, b)$ y $x^* = b$.)

(b) Supongamos que $f(x)$ es cóncava. Entonces las condiciones de Kuhn–Tucker son suficientes para óptimo. Ilustrar los tres casos que se pueden dar.

5 Consideremos el problema

$$\max\ (x-1)^3 \text{ sujeta a } g_1(x) = -x \leq 0, \quad g_2(x) = x \leq 2$$

(a) Hallar gráficamente la solución.

(b) Demostrar que las condiciones (**a**) y (**c**) del Teorema 18.5 se satisfacen con $x^0 = 1$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ¿Se satisface (**b**) en $x^0 = 1$? ¿Es x^0 la solución óptima?

6 Consideremos el problema

$$\max\ 3x + y \text{ sujeta a } y \leq (1-x)^3, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

(a) Hallar gráficamente la solución y demostrar que la cualificación de restricción (18.48) falla.

(b) Probar que la única solución a (**a**) y (**b**) del Teorema 18.6 es $x = 0$ e $y = 1$, con multiplicadores de Lagrange correspondientes $(1, 0, 0)$. Nótese que, aun cuando se satisfaga la cualificación de las restricciones en $(x, y) = (0, 1)$, éste no es el óptimo.

19

Programación lineal

Si hiciéramos una estadística sobre qué problema de matemáticas utiliza más tiempo de computador en todo el mundo, entonces (sin contar problemas de manejo de bases de datos, como ordenación y búsqueda) la respuesta sería la programación lineal.
—*L. Lovász* (1980)

Programación lineal (PL en siglas) es el nombre que se usa para los problemas en los que el objetivo es maximizar o minimizar una función lineal sujeta a restricciones en forma de desigualdades lineales. Como dice la cita de Lovász del principio, la programación lineal es una técnica matemática de inmensa importancia práctica. Desde sus orígenes en los años 40, se han producido desarrollos importantes tanto teóricos como computacionales, y se usan sus métodos a lo largo de casi todo el planeta.

Por el extenso uso que se hace de la programación lineal en problemas de decisión económica, todo economista debería tener un conocimiento básico de esta teoría. Sin embargo, su importancia va más allá de las aplicaciones prácticas. En particular, la teoría de la dualidad de la programación lineal es una base para entender problemas más complicados de optimización con aplicaciones económicas aún más interesantes.

En principio se puede resolver *cualquier* problema de programación lineal (problema PL abreviadamente), si tiene solución. El *método del simplex*, introducido en 1947 por G. B. Dantzig, es un método numérico muy eficaz para hallar la solución en un número finito de pasos. No estudiaremos este método en este libro. De hecho, es probablemente más importante para los economistas entender la teoría de la dualidad de la PL que los detalles del método del simplex. La razón es que hay muchos programas de computador para hallar la solución de un problema PL por el método del simplex, y todo el mundo puede recurrir a ellos en caso de necesidad.

19.1 PRELIMINARES

Un problema general de programación lineal con dos únicas variables de decisión consiste en maxi-

mizar o minimizar una función lineal

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad \text{(función objetivo)}$$

sujeta a m restricciones

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{array}\right. \qquad \text{(restricciones en forma de desigualdad)}$$

Usualmente imponemos también restricciones explícitas de no negatividad sobre x_1 y x_2:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad \text{(restricciones de no negatividad)}$$

Nótese que el sentido de las desigualdades en las restricciones anteriores es un puro convenio. Las desigualdades de sentido contrario se pueden reducir a éstas. Por ejemplo, una desigualdad de la forma $ax_1 + bx_2 \geq c$ es equivalente a $-ax_1 - bx_2 \leq -c$.

Técnica gráfica para problemas PL sencillos

Los problemas PL con dos variables de decisión se pueden resolver por un método geométrico sencillo.

Ejemplo 19.1

Un pastelero tiene 150 kilos de harina, 22 de azúcar y 27,5 de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles. Supongamos que se necesitan 3 kilos de harina, 1 de azúcar y 1 de mantequilla para hacer una docena de pasteles del tipo A, mientras que las cantidades para una docena del tipo B son, respectivamente, 6 kilos, 0,5 kilos y 1 kilo. Supongamos que el beneficio que se obtiene por la venta de una docena de pasteles del tipo A es 20 y por una docena del tipo B es 30. Hallar el número x_1 de docenas de pasteles del tipo A y el número x_2 de docenas del tipo B que hay que hacer para maximizar el beneficio del pastelero.

Solución: La producción de x_1 docenas del tipo A y x_2 del tipo B requerirá $3x_1 + 6x_2$ kilos de harina. Como hay 150 kilos en total, se debe verificar la desigualdad

$$3x_1 + 6x_2 \leq 150 \qquad \text{(restricción de harina)} \tag{1}$$

En el caso del azúcar se tiene análogamente

$$x_1 + 0{,}5x_2 \leq 22 \qquad \text{(restricción de azúcar)} \tag{2}$$

y en el de la mantequilla

$$x_1 + x_2 \leq 27{,}5 \qquad \text{(restricción de mantequilla)} \tag{3}$$

Desde luego, $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. El beneficio que se obtiene al producir x_1 docenas del tipo A y x_2 docenas del tipo B es

$$z = 20x_1 + 30x_2 \tag{4}$$

Así, el problema es

$$\max z = 20x_1 + 30x_2 \ \text{ sujeta a } \left\{\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & \leq & 150 \\ x_1 & + & 0{,}5x_2 & \leq & 22 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 27{,}5 \end{array}\right. \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \tag{5}$$

Resolveremos este problema gráficamente.

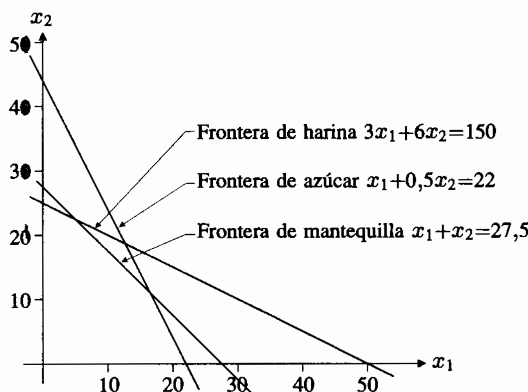


FIGURA 19.1

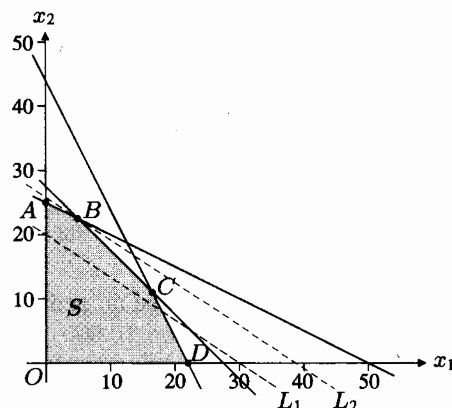


FIGURA 19.2

El par (x_1, x_2) se llama *factible* (o *admisible*) para el problema (5) si verifica las cinco restricciones. Consideremos la restricción de harina $3x_1 + 6x_2 \leq 150$. Si se usa toda la harina, entonces $3x_1 + 6x_2 = 150$, y se llama a esta recta la *frontera de harina*. Podemos hallar "fronteras semejantes" para los otros ingredientes. La Figura 19.1 contiene las rectas que representan estas tres fronteras. Para que (x_1, x_2) sea factible debe verificar que, para cada una de las tres fronteras, (x_1, x_2) está justo en ella o debajo de ella (al sudoeste). Las restricciones $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ limitan la posición de (x_1, x_2) al primer cuadrante (el de los puntos con coordenadas no negativas). Así el conjunto de los pares factibles para el problema (5), se llama la **región factible**, o la **región admisible**, y es el conjunto sombreado S de la Figura 19.2. Este conjunto S se llama en matemáticas un **poliedro convexo** y a sus esquinas O, A, B, C, D se les llama **puntos extremos** del conjunto S.

En principio, el pastelero puede hallar el punto de la región factible que maximiza el beneficio calculando $20x_1 + 30x_2$ en cada punto de S y quedándose con el valor más alto. Esto es imposible en la práctica porque hay un número infinito de pares. Razonemos de otra forma. ¿Puede tener el pastelero un beneficio de 600? Si fuera así, la recta $20x_1 + 30x_2 = 600$ debería tener puntos en común con S. Esta recta está representada en la Figura 19.2 por una línea punteada L_1. Tiene puntos en común con S. Uno de ellos es $(x_1, x_2) = (0, 20)$, que representa el no fabricar pasteles A y producir 20 docenas de B, con un beneficio de $20 \cdot 0 + 30 \cdot 20 = 600$. ¿Puede ganar más el pastelero? La respuesta es que sí. Por ejemplo, la recta $20x_1 + 30x_2 = 601$ también tiene puntos en común con S y el beneficio es 601. Todas las rectas

$$20x_1 + 30x_2 = c \qquad (c \text{ constante}) \tag{6}$$

son paralelas a $20x_1 + 30x_2 = 600$. Al crecer c, la recta dada por (6) se aleja hacia el nordeste. Es claro que la recta (6) que da el mayor valor de c y que tiene un punto común con S es la línea punteada L_2 de la figura. Esta recta corta al conjunto S en un único punto B. Nótese que B es el punto de intersección de las fronteras de harina y mantequilla. Por tanto sus coordenadas satisfacen las dos ecuaciones:

$$3x_1 + 6x_2 = 150 \qquad \text{y} \qquad x_1 + x_2 = 27{,}5$$

Resolviendo esas dos ecuaciones obtenemos $x_1 = 5$ y $x_2 = 22{,}5$. Así el pastelero maximiza el beneficio haciendo 5 docenas de pasteles A y 22,5 de B. Con esto se gasta toda la harina y mantequilla disponible y sobran $22 - 5 - 0{,}5 \cdot 22{,}5 = 5{,}75$ kilos de azúcar. El beneficio es de $20x_1 + 30x_2 = 775$.

El ejemplo siguiente es un problema de minimización.

Ejemplo 19.2

Una empresa produce dos bienes A y B. Tiene dos factorías y cada una de ellas produce los dos bienes en las cantidades por hora siguientes:

	Factoría 1	*Factoría 2*
Bien A	*10*	*20*
Bien B	*25*	*25*

La empresa recibe un pedido de 300 unidades de A y 500 de B. Los costes operativos de las dos factorías son 10.000 y 8.000 por hora. Formular el problema de programación lineal de minimizar el coste total de servir este pedido.

Solución: Sean u_1 y u_2 el número de horas que funcionan las factorías para producir el pedido. Entonces fabrican $10u_1 + 20u_2$ unidades del bien A y $25u_1 + 25u_2$ del B. Como se necesitan 300 unidades de A y 500 de B,

$$\begin{aligned} 10u_1 + 20u_2 &\geq 300 \\ 25u_1 + 25u_2 &\geq 500 \end{aligned} \tag{1}$$

Además, $u_1 \geq 0$ y $u_2 \geq 0$. El coste operativo total de las dos factorías para u_1 y u_2 horas, respectivamente, es de $10.000\,u_1 + 8.000\,u_2$. El problema es, por tanto,

$$\min\ 10.000\,u_1 + 8.000\,u_2 \quad \text{sujeta a} \quad \begin{cases} 10u_1 + 20u_2 \geq 300 \\ 25u_1 + 25u_2 \geq 500 \end{cases} \qquad u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0$$

El conjunto factible S es el de la Figura 19.3. Como las desigualdades de (1) son de tipo $\geq$, el conjunto factible está al nordeste. Se han dibujado también algunas curvas de nivel $10.000u_1 + 8.000u_2 = c$, denotadas por L_1, L_2 y L_3, como líneas punteadas. Corresponden a los valores 100.000, 160.000 y 240.000 del nivel de coste c. Cuando c aumenta, la curva se aleja hacia el nordeste.

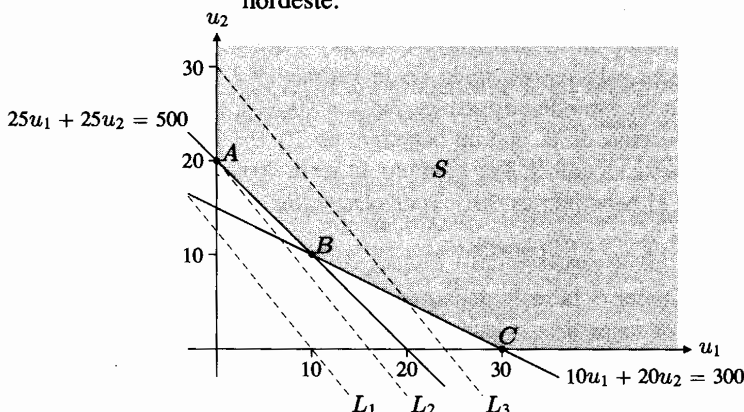


FIGURA 19.3

La solución al problema de minimización es claramente la curva de nivel que corta al conjunto factible S en el punto A de coordenadas $(0, 20)$. Por tanto, la solución óptima es operar la factoría 2 durante 20 horas y no usar la 1 en absoluto. El coste mínimo de producción del pedido es 160.000.

El método gráfico de resolver problemas de programación lineal funciona bien cuando hay solamente dos variables de decisión. En principio, es posible extender el método al caso de tres variables

de decisión. Entonces el conjunto factible es un poliedro convexo en el espacio tridimensional, y las superficies de nivel de la función objetivo son planos. No es fácil, sin embargo, visualizar la solución en esos casos. No hay un método geométrico para más de tres variables de decisión. Usando la teoría de la dualidad se pueden resolver problemas PL geométricamente cuando bien el número de incógnitas o el de restricciones es menor o igual que 3 (véase Sección 19.5).

Los dos ejemplos anteriores tenían soluciones óptimas. Si la región factible es no acotada, puede que no exista una solución óptima, como es el caso del Problema 2.

El problema PL general

El problema PL general consiste en maximizar o minimizar

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \qquad \textbf{(función objetivo)} \tag{19.1}$$

con $c_1, \ldots, c_n$ constantes, sujeta a m restricciones

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \qquad \textbf{(restricciones en forma de desigualdad)} \tag{19.2}$$

donde los elementos a_{ij} y b_k son constantes. Normalmente suponemos explícitamente que

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \qquad \textbf{(restricciones de no negatividad)} \tag{19.3}$$

No hay diferencia esencial entre un problema de minimización y uno de maximización porque la solución óptima $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ que minimiza (19.1) sujeta a (19.2) y (19.3) también maximiza a $-z$ y $\min z = -\max(-z)$. Un n-vector $(x_1, \ldots, x_n)$ que verifica (19.2) y (19.3) se llama **factible**.

El conjunto de los puntos factibles es un *poliedro convexo* contenido en la parte no negativa del espacio n-dimensional. Un ejemplo típico en el espacio tridimensional se exhibe en la Figura 19.4. Las porciones planas de la frontera se llaman *caras* y los puntos O, P, Q, R, S, T, U, V *vértices* o *puntos extremos*. Un poliedro convexo de un n-espacio tiene también caras y puntos extremos. Si n y m son números grandes, el número de puntos extremos puede ser astronómico.[1]

FIGURA 19.4

[1] Como un punto extremo viene definido típicamente por n restricciones tomadas de entre las $n+m$, pero con igualdad, puede haber hasta $(n+m)!/n!m!$ puntos extremos. Por ejemplo, si $n = 50$ y $m = 60$, lo que es normal para los problemas que se pueden resolver numéricamente, puede haber hasta $110!/50!60! = 62757830663187746413533383430396$ puntos extremos.

Si un problema PL tiene solución, debe tener una solución en un punto extremo. El método del simplex es un procedimiento que nos permite ir de un punto extremo a otro de tal manera que el valor de la función objetivo no disminuye hasta que lleguemos a un punto tal que, moviéndose hasta otro punto extremo, es imposible aumentar el valor de la función objetivo. Entonces habremos alcanzado la solución óptima.

Problemas

1 Usar el método gráfico para resolver los problemas PL siguientes:

(a) $\max\ 3x_1 + 4x_2$ con $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 4x_2 \leq 4 \end{cases}$ $\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

(b) $\min\ 10u_1 + 27u_2$ con $\begin{cases} u_1 + 3u_2 \geq 11 \\ 2u_1 + 5u_2 \geq 20 \end{cases}$ $\quad u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0$

(c) $\max\ 2x_1 + 5x_2$ con $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$ $\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

(d) $\max\ 8x_1 + 9x_2$ con $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$ $\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

(e) $\max\ -2x_1 + x_2$ con $0 \leq x_1 - 3x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2 (a) ¿Tiene solución el problema siguiente?

$$\max\ x_1 + x_2 \text{ con } \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3 \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

(b) ¿Hay solución si la función objetivo es $z = -x_1 - x_2$?

3 Sea A el conjunto de todos los (x_1, x_2) que verifican

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \end{aligned} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Resolver los problemas siguientes con A como conjunto factible:

(a) $\max\ x_2$ (b) $\max\ x_1$ (c) $\max\ 3x_1 + 2x_2$

(d) $\min\ 2x_1 - 2x_2$ (e) $\max\ 2x_1 + 4x_2$ (f) $\min\ -3x_1 - 2x_2$

4 Una empresa produce dos tipos de televisores, uno barato (A) y uno caro (B). La empresa tiene un beneficio de 700 procedente de la venta de cada televisor del tipo A y de 1.000 para el tipo B. Hay tres etapas en el proceso de producción. En la primera se requieren 3 horas de trabajo para cada televisor A y 5 horas para B. El número total de horas disponibles para esta etapa es de 3.900. La etapa segunda requiere una hora para el tipo A y 3 para el B. El total de horas disponibles para esta etapa es de 2.100. En la etapa tercera, se requieren 2 horas de trabajo para cada uno de los tipos, y hay disponibles 2.200. ¿Cuántos televisores de cada tipo hay que producir para maximizar el beneficio?

5 Sustituir la función objetivo del Ejemplo 19.1 por $20x_1 + tx_2$. ¿Para qué valores de t seguirá estando el beneficio máximo en $x_1 = 5$ y $x_2 = 22{,}5$?

19.2 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA DUALIDAD

Confrontado a un problema de optimización de recursos escasos, un economista se preguntará: ¿Qué ocurrirá con la solución óptima si cambia la disponibilidad de los recursos? Para programas lineales, las respuestas a las preguntas de este tipo están relacionadas íntimamente con la llamada **teoría de la dualidad** de la PL. Como punto de partida, consideremos de nuevo el problema del pastelero del Ejemplo 19.1.

Ejemplo 19.3

Supongamos que el pastelero recibe gratis un kilo extra de harina. ¿Cuánto añadirá este kilo extra al beneficio máximo? ¿Cuánto contribuirá al beneficio un kilo extra de azúcar? ¿Y uno de mantequilla?

Solución: Si el pastelero recibe un kilo extra de harina, la frontera de harina será $3x_1 + 6x_2 = 151$. Se ve en la Figura 19.2 que el conjunto factible S se expandirá ligeramente y que el punto B subirá un poco a lo largo de la frontera de mantequilla. El nuevo punto óptimo B' será el de intersección de las rectas $3x_1 + 6x_2 = 151$ y $x_1 + x_2 = 27{,}5$. Resolviendo esas tres ecuaciones se obtiene $x_1 = 14/3$ y $x_2 = 137/6$. Así el valor de la función objetivo será de $20(14/3) + 30(137/6) = 2.335/3 = 775 + 10/3$. Por tanto, el beneficio crecerá en 10/3.

Si el pastelero recibe un kilo extra de azúcar, el conjunto factible se expandirá, pero el punto óptimo seguirá en B. Recuérdese que en el problema original le sobraban al pastelero 5,75 kilos de azúcar. No hay beneficio extra.

Un kilo extra de mantequilla dará un nuevo punto óptimo en la intersección de las rectas $3x_1+6x_2 = 150$ y $x_1+x_2 = 28{,}5$. Resolviendo esas ecuaciones se obtiene $x_1 = 7$ y $x_2 = 21{,}5$ con $20x_1 + 30x_2 = 775 + 10$. El beneficio aumenta en 10.

Se pueden resumir estos resultados así:

(**a**) Un kilo extra de harina aumentará la z óptima en 10/3.

(**b**) Un kilo extra de azúcar aumentará la z óptima en 0.

(**c**) Un kilo extra de mantequilla aumentará la z óptima en 10.

Los tres números $u_1^* = 10/3$, $u_2^* = 0$ y $u_3^* = 10$ están ligados a las restricciones de harina, azúcar y mantequilla respectivamente. Son los beneficios *marginales* de un kilo extra de cada ingrediente. De hecho, esos números tienen muchas propiedades interesantes.

Supongamos que (x_1, x_2) es un par factible en el problema, esto es, que satisface las restricciones (1), (2), (3) del Ejemplo 19.1. Multiplíquese (1) por 10/3, (2) por 0 y (3) por 10. Como los multiplicadores son todos ≥ 0, las desigualdades se conservan. Esto es,

$$\begin{aligned}(10/3)(3x_1 + 6x_2) &\leq (10/3) \cdot 150\\ 0(x_1 + 0{,}5x_2) &\leq 0 \cdot 22\\ 10(x_1 + x_2) &\leq 10 \cdot 27{,}5\end{aligned}$$

Súmense ahora esas desigualdades usando el hecho obvio de que, si $A \leq B$, $C \leq D$ y $E \leq F$, entonces $A + C + E \leq B + D + F$. El resultado es

$$10x_1 + 20x_2 + 10x_1 + 10x_2 \leq \frac{10}{3} \cdot 150 + 10 \cdot 27{,}5$$

o sea

$$20x_1 + 30x_2 \leq 775$$

Así, usando los números "mágicos" u_1^*, u_2^* y u_3^* definidos anteriormente, hemos demostrado que, si (x_1, x_2) es cualquier par factible, la función objetivo tiene que tomar en él un valor

menor o igual que 775. Como $x_1 = 5$ y $x_2 = 22{,}5$ dan para z el valor 775, hemos *probado algebraicamente* de esta manera que (5 , 22,5) *es* la solución.

El patrón que aparece en este ejemplo aparece también en todos los problemas de programación lineal. De hecho, los números u_1^*, u_2^* y u_3^* son soluciones de un nuevo problema PL que se llama el *dual* del problema original.

El problema dual

Consideremos una vez más el problema del pastelero, que es

$$\max\ 20x_1 + 30x_2 \ \text{ sujeta a} \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 150 \\ x_1 + 0{,}5x_2 \leq 22 \\ x_1 + x_2 \leq 27{,}5 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0 \tag{1}$$

Supongamos que el pastelero se cansa de su negocio, probablemente porque tenga muchas quejas por la poca originalidad de sus pasteles. Alguien quiere tomar su negocio y comprarle todos los ingredientes. El pastelero quiere poner un precio de u_1 por kilo de harina, u_2 por kilo de azúcar y u_3 por kilo de mantequilla.

Como una docena de pasteles de tipo A requiere 3 kilos de harina y 1 kilo de azúcar y otro de mantequilla, el pastelero pondrá el precio de $3u_1 + u_2 + u_3$ a los ingredientes necesarios para producir una docena de pasteles A. Como originariamente una docena de pasteles A le reportaba un beneficio de 20, quiere ganar eso por lo menos si deja el negocio. Por tanto, el pastelero requiere que los precios (u_1, u_2, u_3) sean tales que

$$3u_1 + u_2 + u_3 \geq 20$$

De otro modo le sería más rentable usar él mismo los ingredientes para producir pasteles de tipo A. Si quiere ganar al menos lo mismo que antes por los ingredientes necesarios para producir una docena de pasteles del tipo B, requerirá

$$6u_1 + 0{,}5u_2 + u_3 \geq 30$$

Probablemente, la persona que tome el negocio quiera comprar los recursos del pastelero lo más baratos posible. El coste total de 150 kilos de harina, 22 de azúcar y 27,5 de mantequilla es $150u_1 + 22u_2 + 27{,}5u_3$. Para pagar lo menos posible y que el pastelero acepte la oferta, el tomador debería ofrecer pagar precios $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$ que resuelvan

$$\min\ 150u_1 + 22u_2 + 27{,}5u_3 \quad \text{sujeta a} \begin{cases} 3u_1 + u_2 + u_3 \geq 20 \\ 6u_1 + 0{,}5u_2 + u_3 \geq 30 \end{cases} \tag{2}$$

con $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ y $u_3 \geq 0$.

Una pregunta interesante es ésta: si el pastelero deja el negocio al comprador y resuelve el problema (2), ¿ganará lo mismo que antes? La respuesta es afirmativa. La solución de (2) es $u_1^* = 10/3$, $u_2^* = 0$ y $u_3^* = 10$, y lo que gana el pastelero por vender sus recursos es $150u_1^* + 22u_2^* + 27{,}5u_3^* = 775$, que es justamente el máximo valor de la función objetivo en el problema (1). El comprador paga por cada ingrediente exactamente el mismo beneficio marginal que habíamos calculado previamente. En particular, el precio del azúcar es cero, porque el pastelero tiene más azúcar de la que puede usar óptimamente.

El problema (2) se llama el *dual* del problema (1). Los dos problemas están estrechamente relacionados. Vamos a explicar en general cómo construir el dual de un problema PL.

El caso general

Consideremos el problema PL general

$$\max\ c_1x_1+\cdots+c_nx_n \text{ sujeta a } \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{19.4}$$

con las restricciones de no negatividad $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

El **dual** de (19.4) es el problema PL

$$\min b_1u_1+\cdots+b_mu_m \text{ sujeta a } \begin{cases} a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m \ge c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m \ge c_n \end{cases} \tag{19.5}$$

con las restricciones de no negatividad $u_1 \geq 0, \ldots, u_m \geq 0$. Nótese que se construye el problema (19.5) usando exactamente los mismos coeficientes $c_1, \ldots, c_n, a_{11}, \ldots, a_{mn}$ y $b_1, \ldots, b_m$ que en (19.4).

En el problema (19.4), al que llamaremos de ahora en adelante el **problema primal**, hay n variables, $x_1, \ldots, x_n$, y m restricciones (sin contar las de no negatividad). En el dual (19.5) hay m variables $u_1, \ldots, u_m$ y n restricciones. El problema primal es de maximización; el dual de minimización. Todas las variables son no negativas en ambos. Las m restricciones del problema primal son del tipo "menor o igual", mientras que las n restricciones del dual son del tipo "mayor o igual". Los coeficientes de la función objetivo de cada problema son los miembros de la derecha de las restricciones del otro problema. Finalmente, las matrices de los coeficientes de las restricciones en ambos problemas son traspuestas una de la otra porque son de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{19.6}$$

Compruébese que el problema (2) es el dual del problema (1) en el sentido que acabamos de explicar. Debido a la simetría entre los dos problemas se les llama a cada uno el dual del otro.

Formulación matricial

Vamos a introducir los vectores columna siguientes:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{19.7}$$

El problema primal se puede escribir como a continuación (con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ dadas por (19.6)):

$$\max\ \mathbf{c}'\mathbf{x} \ \text{ sujeta a } \ \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \tag{19.8}$$

El dual se puede escribir como min $\mathbf{b}'\mathbf{u}$ sujeta a $\mathbf{A}'\mathbf{u} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$. Sin embargo, es más conveniente escribir el dual de una forma ligeramente distinta. Trasponiendo $\mathbf{A}'\mathbf{u} \geq \mathbf{c}$, por las reglas (12.44) de la Sección 12.9, obtenemos $\mathbf{u}'\mathbf{A} \geq \mathbf{c}'$ y, más aún, $\mathbf{b}'\mathbf{u} = \mathbf{u}'\mathbf{b}$. Así se puede escribir el dual como

$$\min\ \mathbf{u}'\mathbf{b} \ \text{ sujeta a } \ \mathbf{u}'\mathbf{A} \ge \mathbf{c}',\ \mathbf{u} \ge \mathbf{0} \tag{19.9}$$

Problemas

1 Consideremos el Problema 1 (a), Sección 19.1.

(a) Sustituir la restricción $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ por $3x_1 + 2x_2 \leq 7$. Hallar la nueva solución óptima y calcular el aumento u_1^* de la función objetivo.

(b) Sustituir la restricción $x_1 + 4x_2 \leq 4$ por $x_1 + 4x_2 \leq 5$. Hallar la nueva solución óptima y calcular el aumento u_2^* de la función objetivo.

(c) Por el mismo razonamiento del Ejemplo 19.3 demostrar que, si (x_1, x_2) es factible en el problema original, la función objetivo no puede ser nunca mayor que 36/5.

2 Escribir los duales de los Problemas 1 (a) y (b) de la Sección 19.1.

3 Escribir el dual del Problema 1 (d), Sección 19.1.

19.3 EL TEOREMA DE DUALIDAD

Esta sección estudia los resultados que relacionan la solución de un problema PL con la de su dual. Empezamos por considerar el problema del pastelero otra vez.

Ejemplo 19.4

Consideremos los problemas (1) y (2) de la Sección 19.2. Supongamos que (x_1, x_2) es un par arbitrario factible en (1), lo que significa que $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y se verifican las tres desigualdades $\leq$ de (1). Sea (u_1, u_2, u_3) una terna factible arbitraria en (2). Multipliquemos las desigualdades $\leq$ de (1) por los números no negativos u_1, u_2, u_3, respectivamente, y sumemos después miembro a miembro. El resultado es la nueva desigualdad

$$(3x_1 + 6x_2)u_1 + (x_1 + 0{,}5x_2)u_2 + (x_1 + x_2)u_3 \leq 150u_1 + 22u_2 + 27{,}5u_3$$

Reordenando los términos de la izquierda se tiene

$$(3u_1 + u_2 + u_3)x_1 + (6u_1 + 0{,}5u_2 + u_3)x_2 \leq 150u_1 + 22u_2 + 27{,}5u_3 \qquad (*)$$

Análogamente multiplicamos las desigualdades $\geq$ de (2) por los números no negativos x_1 y x_2 respectivamente, y sumamos los resultados; se obtiene

$$(3u_1 + u_2 + u_3)x_1 + (6u_1 + 0{,}5u_2 + u_3)x_2 \geq 20x_1 + 30x_2 \qquad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ conjuntamente se deduce que

$$150u_1 + 22u_2 + 27{,}5u_3 \geq 20x_1 + 30x_2 \qquad (***)$$

para todos los (x_1, x_2) factibles del problema (1) y todos los (u_1, u_2, u_3) factibles del problema (2). De este ejemplo deducimos que la función objetivo del problema dual es siempre mayor o igual que la función objetivo del problema primal, para cualesquiera puntos factibles (x_1, x_2) y (u_1, u_2, u_3).

La desigualdad $(***)$ es válida en particular para el par factible $(x_1, x_2) = (5\,, 22{,}5)$. Para cada terna factible (u_1, u_2, u_3) tenemos, por tanto, que

$$150u_1 + 22u_2 + 27{,}5u_3 \geq 20 \cdot 5 + 30 \cdot 22{,}5 = 775$$

Se deduce que si podemos hallar una terna (u_1^*, u_2^*, u_3^*), factible para el problema (2), tal que $150u_1^* + 22u_2^* + 27{,}5u_3^* = 775$, entonces (u_1^*, u_2^*, u_3^*) debe resolver el problema (2) porque no se puede obtener un valor más pequeño de la función objetivo. En la Sección 19.2 vimos que, para $(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = (10/3, 0, 10)$, la función objetivo en el dual tomaba el valor 775. Por tanto, $(10/3, 0, 10)$ resuelve el problema dual.

El primer resultado general que vamos a probar es el siguiente:

Teorema 19.1

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ es factible en el problema primal (19.4) y $(u_1, \ldots, u_m)$ es factible en el problema dual (19.5), entonces

$$b_1u_1 + \cdots + b_mu_m \geq c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \tag{19.10}$$

En otras palabras, la función objetivo dual tiene un valor que es siempre mayor o igual que la del primal.

Demostración: Multiplíquense las m desigualdades de (19.4) por los números no negativos $u_1, \ldots, u_m$ y súmense los resultados. Multiplíquense también las n desigualdades de (19.5) por los números no negativos $x_1, \ldots, x_n$ y súmense los resultados. Se tienen entonces las dos desigualdades

$$(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)u_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)u_m \leq b_1u_1 + \cdots + b_mu_m$$
$$(a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m)x_1 + \cdots + (a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m)x_n \geq c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

Reordenando los términos de la izquierda de cada desigualdad se ve que cada uno es igual a la doble suma $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_ix_j$. Entonces (19.10) está ya claro.

Se obtiene del Teorema 19.1 otro resultado interesante:

Teorema 19.2

Supongamos que $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ y $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ son factibles en los problemas (19.4) y (19.5) respectivamente y que

$$c_1x_1^* + \cdots + c_nx_n^* = b_1u_1^* + \cdots + b_mu_m^* \tag{19.11}$$

Entonces $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ resuelve el problema (19.4), y $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ resuelve a su vez el problema (19.5).

Demostración: Sea $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-vector factible arbitrario para el problema (19.4). Usando (19.10) con $u_1 = u_1^*, \ldots, u_m = u_m^*$, así como (19.11), obtenemos

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \leq b_1u_1^* + \cdots + b_mu_m^* = c_1x_1^* + \cdots + c_nx_n^*$$

Esto prueba que $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ resuelve (19.4).

Supongamos que $(u_1, \ldots, u_m)$ es factible para el problema (19.5). Entonces (19.10) y (19.11) implican conjuntamente que

$$b_1u_1 + \cdots + b_mu_m \geq c_1x_1^* + \cdots + c_nx_n^* = b_1u_1^* + \cdots + b_mu_m^*$$

Esto prueba que $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ resuelve (19.5).

El Teorema 19.2 prueba que, si encontramos soluciones *factibles* para los problemas (19.4) y (19.5) que dan el mismo valor a la función objetivo en cada uno de los dos problemas, entonces esas dos soluciones factibles son, de hecho, soluciones *óptimas*.

El resultado más importante en teoría de la dualidad es el siguiente:

Teorema 19.3 (El teorema de dualidad)

Supongamos que el problema primal (19.4) tiene una solución óptima (finita). Entonces el problema dual (19.5) tiene también una solución óptima (finita), y los correspondientes valores de las funciones objetivo son iguales. Si el primal no tiene óptimo acotado, entonces el dual no tiene solución factible.

Las demostraciones de los Teoremas 19.1 y 19.2 eran muy sencillas. Es mucho más difícil demostrar la primera afirmación del Teorema 19.3 sobre la existencia de una solución del dual, y no vamos a hacerlo aquí. Sin embargo, la última afirmación del Teorema 19.3 se deduce rápidamente de la desigualdad (19.10). En efecto, si $(u_1, \dots, u_n)$ es una solución factible cualquiera del problema dual, entonces $b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n$ es un número mayor o igual que *cualquier* número $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$, para $(x_1, \dots, x_n)$ factible en el primal. Esto acota superiormente los valores posibles de $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$.

Nota: Es un ejercicio útil enunciar y demostrar los Teoremas 19.1 y 19.2 usando álgebra matricial. Vamos a hacerlo para el Teorema 19.1. Supongamos que $\mathbf{x}$ es factible en (19.8) y que $\mathbf{u}$ es factible en (19.9). Entonces

$$\mathbf{u}'\mathbf{b} \geq \mathbf{u}'(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{u}'\mathbf{A})\mathbf{x} \geq \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

Se debe ver atentamente que esas desigualdades corresponden a las que dimos en la demostración del Teorema 19.1.

Problemas

1 Consideremos el problema

$$\max\ 2x + 7y \ \text{ sujeta a} \begin{cases} 4x + 5y \leq 20 \\ 3x + 7y \leq 21 \end{cases} \qquad x \geq 0\,,\ y \geq 0$$

(a) Resolverlo por un razonamiento geométrico.

(b) Escribir el dual y resolverlo por un razonamiento geométrico .

(c) ¿Son iguales los valores de las funciones objetivo? Si no, entonces, por el Teorema 19.3, se ha cometido un error.

2 Enunciar el dual del problema del Ejemplo 19.2 y resolverlo. Comprobar que los valores óptimos de las funciones objetivo son iguales.

3 Una empresa produce televisores pequeños y medianos. El beneficio es 400 por cada uno de los pequeños y 500 por cada uno de los medianos. El proceso de fabricación de cada televisor requiere que éste pase por tres divisiones distintas de la factoría. Los pequeños necesitan, respectivamente, 2, 1 y 1 horas en las divisiones 1, 2 y 3. Las correspondientes cifras para los medianos son 1, 4 y 2. Supongamos que las divisiones 1 y 2 son capaces de suministrar 16 horas diarias de trabajo a lo más, y la 3 puede dar 11 horas diarias como máximo. Designemos por x_1 y x_2 al número de televisores pequeños y medianos que la empresa produce cada día.

(a) Probar que, para maximizar los beneficios diarios hay que resolver el problema siguiente:

$$\max\ 400x_1 + 500x_2 \ \text{ sujeta a} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \leq 11 \end{cases} \qquad x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0$$

(b) Resolver gráficamente este problema.

(c) Si la empresa pudiera aumentar su capacidad en una hora diaria en sólo una de las tres divisiones, ¿en cuál debería hacerlo?

19.4 UNA INTERPRETACIÓN ECONÓMICA GENERAL

En esta sección se da una interpretación económica general del problema PL (19.4) y su dual (19.5). Imaginemos una empresa que produce uno o varios outputs usando m recursos distintos como inputs. Supongamos que hay n actividades o procesos de producción distintos. Una actividad típica se caracteriza por el hecho de que, para realizarla a nivel unitario, se necesita una cierta cantidad de cada recurso. Si a_{ij} es la cifra de unidades del recurso i-ésimo que se necesitan para realizar la actividad j-ésima a nivel unitario, el vector de componentes $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ representa los requerimientos totales de los m recursos distintos para realizar la actividad j-ésima a nivel unitario. Si realizamos las actividades a niveles $x_1, \ldots, x_n$, las necesidades totales de recursos se pueden expresar por el vector columna

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si los recursos disponibles son $b_1, \ldots, b_m$, entonces los niveles factibles de actividad son los que satisfacen las m restricciones de (19.4). Las restricciones de no negatividad significan que no podemos realizar las actividades a nivel negativo.

Cada actividad conlleva una cierta “retribución”. Sea c_j una medida de la retribución (o valor) que se obtiene al realizar la actividad j-ésima a nivel unitario. El valor total de realizar las actividades a niveles $x_1, \ldots, x_n$ es $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$. La empresa tiene, por tanto, que resolver el siguiente problema PL: *Hallar los niveles de las n actividades que maximizan el valor total, sujetos a las restricciones de recursos dadas.*

Se puede interpretar de esta forma el problema del Ejemplo 19.1. Hay dos actividades (producir dos tipos de pasteles) y tres recursos (harina, azúcar y mantequilla).

Vamos a considerar ahora el problema dual (19.5). Para realizar su trabajo, la empresa necesita emplear algunos recursos. Cada recurso tiene un valor o precio. Sea u_j el precio unitario del recurso j-ésimo. No se debe pensar que u_j es el precio de mercado del recurso j-ésimo, sino que debemos imaginarlo como algo que mide de alguna manera la contribución relativa que una unidad del recurso j-ésimo hace al resultado económico total. Como estos precios no son reales se les llama **precios sombra**.

Como $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ son los números de unidades de cada uno de los m recursos que se necesitan para realizar la actividad j-ésima a nivel unitario, $a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m$ es el coste sombra total de realizar la actividad j-ésima a nivel unitario. Como c_j es el valor de realizar la actividad j-ésima a nivel unitario,

$$c_j - (a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m)$$

es el *beneficio sombra* de realizar la actividad j-ésima a nivel unitario. Nótese que la restricción j-ésima del problema dual (19.5) dice que el beneficio sombra de realizar la actividad j-ésima a nivel unitario es ≤ 0.

La función objetivo $Z = b_1u_1 + \cdots + b_mu_m$ del problema PL dual mide el valor sombra de la reserva inicial de todos los recursos. El problema dual es, por tanto, el siguiente: *De entre todas las posibles elecciones de precios sombra $u_1, \ldots, u_m$ no negativos tales que el beneficio de realizar cada actividad a nivel unitario es ≤ 0, hallar una que minimice el valor sombra de los recursos iniciales.*

Las variables duales óptimas como precios sombra

Consideremos de nuevo el problema primal

$$\max\ c_1x_1+\cdots+c_nx_n \text{ sujeta a } \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \qquad (*)$$

con $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$. ¿Qué le ocurre al valor óptimo de la función objetivo si cambian los números $b_1, \ldots, b_m$? Si las variaciones $\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m$ son positivas, entonces el conjunto factible se agranda y el valor óptimo de la función objetivo no puede disminuir. Lo normal es que crezca. El análisis siguiente es válido también cuando algunas o todas las variaciones $\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m$ son negativas.

¿Cuál es la cuantía del cambio del valor óptimo? Supongamos que $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ y $(x_1^* + \Delta x_1, \ldots, x_n^* + \Delta x_n)$ son soluciones óptimas del primal cuando los miembros de la derecha son, respectivamente, $(b_1, \ldots, b_m)$ y $(b_1 + \Delta b_1, \ldots, b_m + \Delta b_m)$. Si $\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m$ son suficientemente pequeños, los duales de los dos problemas tienen la misma solución óptima $u_1^*, \ldots, u_m^*$. Entonces, en virtud del Teorema 19.3, se tiene

$$c_1x_1^* + \cdots + c_nx_n^* = b_1u_1^* + \cdots + b_mu_m^*$$
$$c_1(x_1^* + \triangle x_1) + \cdots + c_n(x_n^* + \triangle x_n) = (b_1 + \triangle b_1)u_1^* + \cdots + (b_m + \triangle b_m)u_m^*$$

Restando obtenemos

$$c_1\Delta x_1 + \cdots + c_n\Delta x_n = u_1^*\Delta b_1 + \cdots + u_m^*\Delta b_m$$

El miembro de la izquierda es la variación de la función objetivo de $(*)$ cuando $b_1, \ldots, b_m$ varían en $\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m$, respectivamente. Si se designa este cambio en z por Δz^*, obtenemos

$$\Delta z^* = u_1^*\Delta b_1 + \cdots + u_m^*\Delta b_m \qquad (19.12)$$

Nota: La suposición subyacente a (19.12) es que los cambios de las b_i no provocan variaciones de las variables duales óptimas.

Problemas

1 Consideremos el Problema 1 de la Sección 19.3,

$$\max\ 2x + 7y \text{ sujeta a } \begin{cases} 4x + 5y \leq 20 \\ 3x + 7y \leq 21 \end{cases} \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$$

Hallamos que la solución óptima de este problema era $x^* = 0$, $y^* = 3$, $z^* = 2x^* + 7y^* = 21$. La solución óptima del dual era $u_1^* = 0$, $u_2^* = 1$. Supongamos que variamos 20 a 20,1 y 21 a 20,8. Hallar el cambio correspondiente de la función objetivo.

19.5 HOLGURA COMPLEMENTARIA

Consideremos otra vez el problema (1) del pastelero, de la Sección 19.2, y su dual (2). La solución de (1) era $x_1^* = 5$ y $x_2^* = 22{,}5$, donde las desigualdades primera y tercera se verifican con el signo $=$. La solución del dual era $u_1^* = 10/3$, $u_2^* = 0$ y $u_3^* = 10$, donde las dos desigualdades se

satisfacen con $=$. Así, en este ejemplo,

$$x_1^* > 0,\ x_2^* > 0 \Longrightarrow \text{las desigualdades primera y segunda del dual son igualdades} \quad (1)$$

$$u_1^* > 0,\ u_3^* > 0 \Longrightarrow \text{las desigualdades primera y tercera del primal son igualdades} \quad (2)$$

Interpretamos (2) de esta manera: como los precios sombra de la harina y la mantequilla son positivos en la solución óptima, se usa todo lo que se dispone de esos recursos. No se usa todo el azúcar, luego su precio sombra es cero, es decir, no se trata de un recurso escaso. Estos resultados se verifican con más generalidad.

En efecto, consideremos primero el problema

$$\max\ c_1x_1 + c_2x_2 \quad \text{sujeta a} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3 \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \quad (3)$$

y su dual

$$\min\ b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 \text{ sujeta a} \begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 \ge c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 \ge c_2 \end{cases} \quad (4)$$

con u_1, u_2, $u_3 \ge 0$. Supongamos que (x_1^*, x_2^*) resuelve (3) mientras que (u_1^*, u_2^*, u_3^*) resuelve (4). Entonces

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{l} a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* \le b_1 \\ a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* \le b_2 \\ a_{31}x_1^* + a_{32}x_2^* \le b_3 \end{array} \qquad \text{(b)} \quad \begin{array}{l} a_{11}u_1^* + a_{21}u_2^* + a_{31}u_3^* \ge c_1 \\ a_{12}u_1^* + a_{22}u_2^* + a_{32}u_3^* \ge c_2 \end{array} \quad (5)$$

Si se multiplican las tres desigualdades de (5)(a) por los tres números no negativos u_1^*, u_2^* y u_3^*, respectivamente, y luego se suman los resultados, se obtiene la desigualdad

$$(a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^*)u_1^* + (a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^*)u_2^* + (a_{31}x_1^* + a_{32}x_2^*)u_3^* \le b_1u_1^* + b_2u_2^* + b_3u_3^* \quad (6)$$

Si se multiplican las dos desigualdades de (5)(b) por x_1^* y x_2^*, respectivamente, y luego se suman los resultados se obtiene la desigualdad

$$(a_{11}u_1^* + a_{21}u_2^* + a_{31}u_3^*)x_1^* + (a_{12}u_1^* + a_{22}u_2^* + a_{32}u_3^*)x_2^* \ge c_1x_1^* + c_2x_2^* \quad (7)$$

Los miembros de la izquierda de las desigualdades (6) y (7) son iguales. Más aún, por el teorema de dualidad de la PL (Teorema 19.3), los miembros de la derecha de (6) y (7) son iguales. Por tanto, las dos desigualdades (6) y (7) son *igualdades*. Sustituyendo $\le$ por $=$ en (6) y reordenando, tenemos

$$(a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* - b_1)u_1^* + (a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* - b_2)u_2^* + (a_{31}x_1^* + a_{32}x_2^* - b_3)u_3^* = 0 \quad (8)$$

Cada término de (8) entre paréntesis es ≤ 0 porque (x_1^*, x_2^*) es factible. Así, como u_1^*, u_2^* y u_3^* son todos ≥ 0, los tres términos en (8) son ≤ 0. Si alguno fuera < 0, su suma sería < 0. Como la suma e4s 0, cada uno debe ser 0. Así,

$$(a_{j1}x_1^* + a_{j2}x_2^* - b_j)u_j^* = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Deducimos que

$$a_{j1}x_1^* + a_{j2}x_2^* \le b_j \ (= b_j \text{ si } u_j^* > 0), \qquad (j = 1, 2, 3) \quad (9)$$

Usando que el $\ge$ de (7) se puede sustituir por $=$, y razonando como antes, obtenemos también

$$a_{1i}u_1^* + a_{2i}u_2^* + a_{3i}u_3^* \ge c_i \ (= c_i \text{ si } x_i^* > 0), \qquad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

Los resultados (9) y (10) se llaman las **condiciones de holgura complementaria**. Los razonamientos que se han usado para demostrar que esas condiciones son necesarias se extienden de manera automática al caso general. Además, las mismas condiciones de holgura complementaria son también suficientes para óptimo. Damos un enunciado general y una demostración:

Teorema 19.4 (Holgura complementaria)

Supongamos que el problema primal (19.4) de la Sección 19.2 tiene una solución óptima $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, y el dual (19.5) tiene la solución óptima $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$. Entonces, para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$,

$$a_{1i}u_1^* + \cdots + a_{mi}u_m^* \geq c_i \ (= c_i \text{ si } x_i^* > 0) \tag{19.13}$$

$$a_{j1}x_1^* + \cdots + a_{jn}x_n^* \leq b_j \ (= b_j \text{ si } u_j^* > 0) \tag{19.14}$$

Recíprocamente, si $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{u}^*$ tienen todas sus componentes no negativas y verifican (19.13) y (19.14), entonces $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{u}^*$ resuelven el problema primal (19.4) y el dual (19.5), respectivamente.

Demostración: Supongamos que $\mathbf{x}^*$ resuelve (19.4) y $\mathbf{u}^*$ resuelve (19.5). Entonces, en particular (véase (19.8) y (19.9)),

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leq \mathbf{b} \quad \text{y} \quad (\mathbf{u}^*)'\mathbf{A} \geq \mathbf{c}' \tag{1}$$

Multiplicando a la izquierda la primera desigualdad de (1) por $(\mathbf{u}^*)' \geq \mathbf{0}$ y la segunda a la derecha por $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ tenemos

$$(\mathbf{u}^*)'\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leq (\mathbf{u}^*)'\mathbf{b} \quad \text{y} \quad (\mathbf{u}^*)'\mathbf{A}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}'\mathbf{x}^* \tag{2}$$

En virtud del Teorema 19.3, $(\mathbf{u}^*)'\mathbf{b} = \mathbf{c}'\mathbf{x}^*$. Así, las dos desigualdades de (2) deben ser igualdades. Se pueden escribir en la forma

$$(\mathbf{u}^*)'(\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) = 0 \quad \text{y} \quad ((\mathbf{u}^*)'\mathbf{A} - \mathbf{c}')\mathbf{x}^* = 0 \tag{3}$$

Pero esas dos ecuaciones son equivalentes a

$$\sum_{j=1}^{m} u_j^*(a_{j1}x_1^* + \cdots + a_{jn}x_n^* - b_j) = 0 \tag{4}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{1i}u_1^* + \cdots + a_{mi}u_m^* - c_i)x_i^* = 0 \tag{5}$$

Para $j = 1, \ldots, m$ se tiene a la vez $u_j^* \geq 0$ y $a_{j1}x_1^* + \cdots + a_{jn}x_n^* - b_j \leq 0$. Por tanto, cada término de la suma (4) es ≤ 0. La suma de todos los términos es 0, luego no puede haber términos negativos porque no hay términos positivos para cancelarlos. En consecuencia, cada término de la suma (4) debe ser 0. Así,

$$u_j^*(a_{j1}x_1^* + \cdots + a_{jn}x_n^* - b_j) = 0, \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{6}$$

y se deduce inmediatamente (19.14). La propiedad (19.13) se demuestra de la misma manera, observando que (5) implica que

$$x_i^*(a_{1i}u_1^* + \cdots + a_{mi}u_m^* - c_i) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

Supongamos de otro lado que $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{u}^*$ tienen todas sus componentes no negativas y verifican (19.13) y (19.14). Se deduce inmediatamente que se verifican (6) y (7). Por tanto, sumando para j e i, respectivamente,

obtenemos (4) y (5). Se deduce de esas igualdades que $\sum_{j=1}^{m} b_j u_j^* = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* u_j^*$ y también que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji} u_j^* x_i^*$. Pero las dobles sumas son iguales, luego $\sum_{j=1}^{m} b_j u_j^* = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*$. Así, en virtud del Teorema 19.2, el vector $(x_1^*, \cdots, x_n^*)$ resuelve el problema (1) y $(u_1^*, \cdots, u_m^*)$ resuelve el dual.

Nota: Usando las interpretaciones generales económicas que dimos en la Sección 19.4, las condiciones (19.13) y (19.14) se pueden interpretar como sigue:

Si la solución óptima del problema primal implica que la actividad i-ésima está en operación $(x_i^* > 0)$, entonces el beneficio sombra de realizar esta actividad a nivel unitario es 0.

Si el precio sombra del recurso j-ésimo es positivo $(u_j^* > 0)$, se deben usar todas las reservas disponibles de él en cualquier óptimo

Cómo la holgura complementaria puede ayudar a resolver problemas PL

Si se conoce la solución del problema primal o del dual, entonces las condiciones de holgura complementaria pueden ayudar a encontrar la solución del otro, determinando qué restricciones están saturadas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 19.5

Consideremos el problema

$$\max\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \ \text{ sujeta a} \begin{cases} 3x_1 \ + \ \ x_2 + \ \ x_3 \ \le \ 2 \\ \ \ x_1 \ + \ 2x_2 + \ 6x_3 \ \le \ 1 \end{cases} \tag{1}$$

con $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ y $x_3 \ge 0$. Enunciar el problema dual y resolverlo por un razonamiento geométrico. Usar luego holgura complementaria para resolver (1).

Solución: El problema dual es

$$\min\ 2u_1 + u_2 \quad \text{sujeta a} \begin{cases} 3u_1 + u_2 & \ge 3 \\ u_1 + 2u_2 & \ge 4 \\ u_1 + 6u_2 & \ge 6 \end{cases} \qquad u_1, u_2 \ge 0 \tag{2}$$

Usando la técnica geométrica utilizada en la solución del Ejemplo 19.2, hallamos la solución $u_1^* = 2/5$ y $u_2^* = 9/5$. Entonces $3u_1^* + u_2^* = 3$, $u_1^* + 2u_2^* = 4$ y $u_1^* + 6u_2^* > 6$.

¿Qué sabemos de la solución (x_1^*, x_2^*, x_3^*) de (1)? Según (19.14), como $u_1^* > 0$ y $u_2^* > 0$, las dos desigualdades de (1) se verifican con el signo $=$. Así

$$3x_1^* + x_2^* + x_3^* = 2 \qquad \text{y} \qquad x_1^* + 2x_2^* + 6x_3^* = 1 \tag{3}$$

Más aún, x_3^* no puede ser > 0 porque entonces (19.13) implicaría que $u_1^* + 6u_2^* = 6$. Por tanto, $x_3^* = 0$. Poniendo $x_3^* = 0$ en (3) y despejando x_1^* y x_2^* obtenemos

$$x_1^* = 3/5, \qquad x_2^* = 1/5, \qquad x_3^* = 0$$

Ésta es la solución al problema (1). Nótese que los valores óptimos de las funciones objetivo en los dos problemas son iguales: $2u_1^* + u_2^* = 13/5$ y $3x_1^* + 4x_2^* + 6x_3^* = 13/5$, justo como deben ser según el teorema de dualidad.

El teorema de Kuhn–Tucker aplicado a programas lineales

Consideremos el problema general de programación lineal

$$\max\ c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \ \text{ sujeto a} \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}, \quad x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \tag{1}$$

Este problema es evidentemente un caso particular del problema general de programación no lineal

$$\max f(x_1,\dots,x_n) \text{ sujeto a } \begin{cases} g_1(x_1,\dots,x_n) \le c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,\dots,x_n) \le c_m \end{cases}, \qquad x_1 \ge 0,\ \dots,\ x_n \ge 0 \qquad (2)$$

que se estudió en la Sección 18.9. Nótese que las funciones f y g_j de (1) son todas lineales, luego son a la vez cóncavas y convexas. Así, las condiciones de Kuhn–Tucker (18.42) y (18.43) son suficientes para que un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ que verifica las restricciones (1) sea óptimo (véase la nota que sigue al Teorema 18.4 de la Sección 18.10.) Veamos qué forma toman esas condiciones en el caso lineal.

Si hacemos $\lambda_j = u_j$ para $j = 1,\dots,m$, las condiciones (18.42) y (18.43) se convierten en

$$c_i - (a_{1i}u_1 + \cdots + a_{mi}u_m) \le 0 \quad (= 0 \text{ si } x_i > 0)\,, \qquad (i = 1,\dots,n) \qquad (3)$$

$$u_j \ge 0 \quad (= 0 \text{ si } a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n < b_j)\,, \qquad (j = 1,\dots,m) \qquad (4)$$

Estas condiciones son precisamente las condiciones de holgura complementaria del Teorema 19.4 cuando se exige que $\mathbf{x}$ verifique las restricciones del problema (1).

Dualidad cuando algunas restricciones son igualdades

Supongamos que una de las restricciones del problema primal es la igualdad

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad (*)$$

Entonces la podemos sustituir por las dos desigualdades

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i\,, \qquad \text{y} \qquad -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \le -b_i \qquad (**)$$

para poner el problema en forma estándar. La restricción $(*)$ da lugar a dos variables duales u_i' y u_i''. En la matriz que describe las restricciones duales, las dos columnas asociadas con u_i' y u_i'' son iguales excepto porque tienen signos opuestos. Por tanto, podemos sustituir las dos variables u_i' y u_i'' por $u_i = u_i' - u_i''$, pero entonces no hay restricción en el signo de u_i. Vemos que *si la restricción i-ésima del primal es una igualdad, entonces la i-ésima variable dual no tiene restricción de signo.* Esto es coherente con la interpretación económica que hemos dado. Si nos vemos forzados a usar todo el i-ésimo recurso, no puede causar sorpresa que se pueda generar un precio sombra negativo, es decir se trata de algo cuyo exceso es perjudicial. Por ejemplo, si el pastelero del Ejemplo 19.1 estuviera forzado a gastar todas las reservas de azúcar, el mejor punto en la Figura 19.2 sería B, no C. Se perderían beneficios.

De la simetría entre el primal y el dual, vemos ahora que *si una de las variables del primal no tiene restricción de signo, entonces la restricción correspondiente del dual es una igualdad.*

Problemas

1 Consideremos el Problema 1 de la Sección 19.3. La solución óptima del primal era $x^* = 0$ e $y^* = 3$, mientras que $u_1^* = 0$, $u_2^* = 1$ era la solución óptima del dual. Comprobar que se verifican (19.13) y (19.14) en este caso.

2 (a) Resolver geométricamente el problema siguiente:

$$\min\ y_1 + 2y_2 \text{ sujeta a } \begin{cases} y_1 + 6y_2 \ge 15 \\ y_1 + y_2 \ge 5 \\ -y_1 + y_2 \ge -5 \\ y_1 - 2y_2 \ge -20 \end{cases} \qquad y_1 \ge 0\,,\ y_2 \ge 0$$

(b) Enunciar el problema dual y resolverlo.

(c) ¿Qué ocurre con las variables duales óptimas si la restricción $y_1 + 6y_2 \geq 15$ se cambia a $y_1 + 6y_2 \geq 15{,}1$?

3 Una empresa produce dos bienes A y B. La empresa tiene tres factorías que producen conjuntamente ambos bienes en las cantidades por hora dadas en la tabla siguiente:

	Factoría 1	*Factoría 2*	*Factoría 3*
Bien A	*10*	*20*	*20*
Bien B	*20*	*10*	*20*

La empresa recibe un pedido de 300 unidades de A y 500 de B. El coste operativo por hora de las factorías 1, 2 y 3 es, respectivamente, 10.000, 8.000 y 11.000.

(a) Designemos por y_1, y_2, y_3, respectivamente, al número de horas de funcionamiento de cada una de las factorías. Enunciar el problema de programación lineal de minimizar los costes de servir el pedido.

(b) Probar que el problema dual del anterior es

$$\max\ 300x_1 + 500x_2 \ \text{ sujeta a} \begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \leq 10.000 \\ 20x_1 + 10x_2 \leq 8.000 \\ 20x_1 + 20x_2 \leq 11.000 \end{cases} \qquad x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0$$

Resolver este problema y hallar después la solución del problema de la primera parte.

(c) ¿Cuánto aumentará el coste mínimo de producción si el coste por hora de la factoría 1 aumenta en 100?

Problemas avanzados

4 El problema siguiente ha surgido en teoría de la producción:

$$\max\ x^1 + x^2 + \cdots + x^N \ \text{ sujeta a} \begin{cases} \xi_1^1 x^1 + \xi_1^2 x^2 + \cdots + \xi_1^N x^N \leq V_1 \\ \xi_2^1 x^1 + \xi_2^2 x^2 + \cdots + \xi_2^N x^N \leq V_2 \\ x^1 \leq \bar{x}^1 \\ x^2 \leq \bar{x}^2 \\ \quad \ddots \qquad \vdots \\ x^N \leq \bar{x}^N \end{cases} \tag{1}$$

donde las variables $x^1, x^2, \ldots, x^N$ son todas ≥ 0 y ξ_i^j, V_1, V_2, $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N$ son constantes fijas. Las letras con superíndices $i = 1, \ldots, N$ se refieren a unidades de producción; V_1 y V_2 son cantidades disponibles de dos recursos; cada $\bar{x}^j$ es una restricción de capacidad sobre la producción de la unidad j. Enunciar el dual del problema (1), designando por q_1 y q_2 a los precios duales asociados con las dos primeras restricciones en (1), y por $r^1, r^2, \ldots, r^N$ a las variables duales asociadas a las últimas N restricciones. Designemos por un acento circunflejo a los valores de las variables que resuelven los dos problemas. Probar que, si (1) tiene un óptimo finito, entonces

$$\hat{x}^i > 0 \implies \xi_1^i \hat{q}_1 + \xi_2^i \hat{q}_2 + r^i = 1 \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{i}$$

$$\xi_1^i \hat{q}_1 + \xi_2^i \hat{q}_2 + r^i > 1 \implies x^i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{ii}$$

$$\hat{q}_j > 0 \implies \xi_j^1 \hat{x}^1 + \cdots + \xi_j^N \hat{x}^N = V_j \qquad (j = 1, 2) \tag{iii}$$

$$\xi_j^1 \hat{x}^1 + \cdots + \xi_j^N \hat{x}^N < V_j \implies \hat{q}_j = 0 \qquad (j = 1, 2) \tag{iv}$$

$$\hat{r}^i > 0 \implies \hat{x}^i = \bar{x}^i \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{v}$$

$$\hat{x}^i < \bar{x}^i \implies \hat{r}^i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{vi}$$

5 Consideremos el problema PL

$$\max\ 3x_1 + 2x_2 \ \text{ sujeta a } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 1 \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

(a) Supongamos que x_3 es un número fijo. Resolver el problema si $x_3 = 0$ y si $x_3 = 3$.

(b) Resolver el problema para cualquier valor de x_3 en el intervalo $[0, \infty)$. El valor máximo de $3x_1+2x_2$ es una función de x_3. Hallar esta función y maximizarla.

(c) ¿Dicen algo los resultados de la parte (b) sobre la solución del problema original, en el cual se puede elegir también x_3?

20

Ecuaciones en diferencias

Las matemáticas no son un recorrido prudente
por una autopista despejada, sino
un viaje a un terreno salvaje y extraño, en el
cual los exploradores se pierden a menudo.
—*W. S. Anglin* (1992)

Los economistas estudian frecuentemente la evolución temporal de variables económicas, como el producto nacional, el tipo de interés, la oferta monetaria, la producción de petróleo, el precio del trigo, etcétera. Las leyes que gobiernan el comportamiento de esas variables se expresan usualmente como una o más ecuaciones.

Si se toma el tiempo como una variable discreta, es decir que toma valores enteros, y las ecuaciones relacionan los valores de esas variables en instantes de tiempo distintos, nos encontramos con las *ecuaciones en diferencias* o *relaciones de recurrencia.* En este caso, el tiempo se mide contando el número de periodos que han transcurrido después del instante inicial $t = 0$. A veces consideramos también tiempos negativos, en cuyo caso el instante $t = 0$ debe considerarse como el origen de la coordenada tiempo.

Si se considera al tiempo como una variable continua y las ecuaciones contienen funciones incógnitas y sus derivadas, nos encontramos con las *ecuaciones diferenciales.*

Este capítulo trata de ecuaciones en diferencias de primer y segundo orden. El próximo tratará de teoría elemental de ecuaciones diferenciales.

20.1 ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE PRIMER ORDEN

Los economistas suelen observar los cambios de muchas de las cantidades que estudian a intervalos fijos de tiempo. Las cantidades pueden ser renta, consumo y ahorro, por ejemplo, y los intervalos pueden ser de un día, una semana o un año. Esas cantidades se datan en el período a que se refieren, y su comportamiento se estudia en momentos discretos de tiempo. Las ecuaciones que relacionan tales cantidades en momentos distintos de tiempo se llaman **ecuaciones en diferencias**. Por ejemplo, una ecuación de este tipo puede relacionar el producto nacional bruto en un período con el producto nacional bruto en otro período, o en varios otros.

Sea $f(t, x)$ una función definida para todos los enteros positivos t y todos los números reales x. Una ecuación en diferencias de *primer orden* es[1]

$$x_t = f(t, x_{t-1}) \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{20.1}$$

Ésta es una ecuación de primer orden porque relaciona el valor de una función en cada período t solamente con su valor en el período anterior, $t - 1$. Cuando tratamos con funciones definidas en periodos discretos de tiempo usamos normalmente la notación x_t, para distinguirlas de las definidas en periodos continuos, para las que se usa $x(t)$.

Nota: Algunos autores prefieren llamar **relaciones de recurrencia** a las ecuaciones del tipo (20.1), haciendo notar que una ecuación en diferencias es aquélla en la que aparecen las diferencias $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ en función de t y x_{t-1}. Pero la ecuación (20.1) equivale, evidentemente, a la ecuación en diferencias $\Delta x_t = f(t, x_{t-1}) - x_{t-1}$. Recíprocamente, dada una ecuación en diferencias $\Delta x_t = g(t, x_{t-1})$, hay una relación de recurrencia $x_t = x_{t-1} + g(t, x_{t-1})$. Por esta correspondencia entre relaciones de recurrencia y ecuaciones en diferencias, no parece razonable mantener las distinciones entre las dos. Así llamaremos siempre a (20.1) una ecuación en diferencias.

Supongamos que se fija x_0. Por sustituciones sucesivas en (20.1) se tiene

$$x_1 = f(1, x_0), \quad x_2 = f(2, x_1) = f(2, f(1, x_0)), \quad x_3 = f(3, x_2) = f(3, f(2, f(1, x_0)))$$

y así sucesivamente. *Para un valor dado de x_0, se puede calcular x_t para cualquier valor de t.* Enunciamos formalmente como un teorema este sencillo resultado:

Teorema 20.1 (Teorema de existencia y unicidad)

Consideremos la ecuación en diferencias $x_t = f(t, x_{t-1})$, $t = 1, 2, \ldots$, donde f está definida para todos los valores de las variables. Si x_0 es un número arbitrario pero fijo, existe entonces una función unívocamente determinada x_t que es una solución de la ecuación y que vale x_0 en $t = 0$.

En general, para cada x_0, hay una diferente solución única de (20.1). Por tanto, la ecuación tiene un número infinito de soluciones.

El teorema de existencia y unicidad de (20.1) es casi trivial. Implica que, dado x_0, se pueden calcular los valores sucesivos de x_t para cualquier número natural t. ¿No basta con esto? ¿Por qué necesitamos más?

De hecho, necesitamos saber bastante más. En aplicaciones económicas nos interesa frecuentemente establecer resultados cualitativos sobre las soluciones. Por ejemplo, nos podría interesar el comportamiento de la solución cuando t crece mucho. Nos podría interesar el ver cómo las variaciones de eventuales parámetros de la ecuación en diferencias afectan a la solución, y así sucesivamente.

Estas cuestiones son difíciles o imposibles de dilucidar si todo nuestro estudio se reduce al método de "sustitución sucesiva". Además, adolece de otro defecto, en relación a los cálculos numéricos. Por ejemplo, supongamos que tenemos una ecuación en diferencias del tipo (20.1) y queremos calcular x_{100}. El método de "sustitución sucesiva" es en este caso un proceso demasiado largo para ser práctico. Además, en un proceso tan largo, se pueden acumular los errores resultantes de operar con números aproximados, como hacemos normalmente en aplicaciones serias.

[1] La ecuación en diferencias *general* de primer orden es $F(t, x_{t-1}, x_t) = 0$. Si se puede despejar x_t de esta ecuación en función de t y de x_{t-1}, se tiene la ecuación (20.1).

Esta acumulación de errores puede dar lugar a soluciones muy lejanas a la realidad. Por tanto, hay una necesidad real de una teoría más sistemática de las ecuaciones en diferencias. Si se puede, las soluciones deberían expresarse en términos de las funciones elementales.

Desgraciadamente, esto sólo es posible para tipos particulares de ecuaciones.

Ecuaciones de primer orden con coeficientes constantes

Estudiamos primero la *ecuación en diferencias lineal*

$$x_t = ax_{t-1} + b_t \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{20.2}$$

Fijando el valor inicial x_0, es posible calcular algebraicamente x_t para t pequeño. En efecto,

$$x_1 = ax_0 + b_1$$

$$x_2 = ax_1 + b_2 = a(ax_0 + b_1) + b_2 = a^2x_0 + ab_1 + b_2$$

$$x_3 = ax_2 + b_3 = a(a^2x_0 + ab_1 + b_2) + b_3 = a^3x_0 + a^2b_1 + ab_2 + b_3$$

Damos dos valores más de x_t sin detallar los pasos intermedios:

$$x_4 = a^4x_0 + a^3b_1 + a^2b_2 + ab_3 + b_4$$

$$x_5 = a^5x_0 + a^4b_1 + a^3b_2 + a^2b_3 + ab_4 + b_5$$

Así se ve la regla de formación. En cada caso, la fórmula de x_t empieza con el término a^tx_0 y los otros son $a^{t-1}b_1, a^{t-2}b_2, \ldots, ab_{t-1}, b_t$. Por tanto, $x_t = a^tx_0 + \sum_{k=1}^{t} a^{t-k}b_k$. Esto nos lleva a la siguiente hipótesis para la ecuación en diferencias, que es cierta para $t = 1, 2, 3, 4, 5$:

La ecuación en diferencias

$$x_t = ax_{t-1} + b_t \qquad (t = 1, 2, \ldots)$$

tiene la solución

$$x_t = a^tx_0 + \sum_{k=1}^{t} a^{t-k}b_k \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{20.3}$$

Obsérvese que, para $t = k$, es $a^{t-k} = a^0 = 1$. Se puede comprobar directamente que (20.3) es realmente una solución de (20.2). Sustituyendo t por $t-1$ en (20.3) se obtiene la fórmula de x_{t-1}. Sustituyendo en (20.2) x_t y x_{t-1} por estos valores vemos que se verifica la ecuación, pues

$$ax_{t-1} + b_t = a\Big(a^{t-1}x_0 + \sum_{k=1}^{t-1} a^{t-1-k}b_k\Big) + b_t = a^tx_0 + \sum_{k=1}^{t-1} a^{t-k}b_k + b_t$$

$$= a^tx_0 + \sum_{k=1}^{t} a^{t-k}b_k$$

Así la fórmula (20.3) nos da una solución de la ecuación en diferencias.

Consideremos el caso particular en que $b_k = b$ para todo $k = 1, 2, \ldots$, es decir, que b_k es constante. Entonces

$$\sum_{k=1}^{t} a^{t-k} b_k = b \sum_{k=1}^{t} a^{t-k} = b(a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1)$$

En virtud de la fórmula (6.10), Sección 6.5, de la suma de los términos de una serie geométrica finita, tenemos que $1 + a + a^2 + \cdots + a^{t-1} = (1 - a^t)/(1 - a)$, para $a \neq 1$. Así, para $t = 1, 2, \ldots$,

$$x_t = a x_{t-1} + b \iff x_t = a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}, \quad (a \neq 1) \tag{20.4}$$

Para $a = 1$ tenemos $1 + a + \cdots + a^{t-1} = t$ y así $x_t = x_0 + tb$ para $t = 1, 2, \ldots$.

Ejemplo 20.1

Resolver las ecuaciones en diferencias:

$$\textbf{(a)} \quad x_t = \tfrac{1}{2} x_{t-1} + 3 \qquad \textbf{(b)} \quad x_t = -3 x_{t-1} + 4$$

Solución: En virtud de (20.4), con $a = 1/2$ y $b = 3$ tenemos la siguiente solución de (**a**):

$$x_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t (x_0 - 6) + 6$$

Para resolver (**b**), usamos de nuevo (20.4) con $a = -3$ y $b = 4$, obteniendo

$$x_t = (-3)^t (x_0 - 1) + 1$$

Ejemplo 20.2 (Un modelo de crecimiento)

Sea Y_t la renta nacional, I_t la inversión total y S_t el ahorro total, todo en el período t. Supongamos que el ahorro es proporcional a la renta nacional y que la inversión es proporcional a la variación de la renta. Entonces, para $t = 1, 2, \ldots$,

$$S_t = \alpha Y_t \tag{1}$$
$$I_t = \beta (Y_t - Y_{t-1}) \tag{2}$$
$$S_t = I_t \tag{3}$$

La ecuación (3) es la familiar condición de equilibrio y α, β son constantes positivas. Supongamos que $\beta > \alpha > 0$. Escribir una ecuación en diferencias que describa la evolución de Y_t a partir del dato inicial Y_0, y resolverla.

Solución: De (3) y (1) se obtiene que $I_t = \alpha Y_t$. Sustituyendo en (2), tenemos $\alpha Y_t = \beta (Y_t - Y_{t-1})$ ó $(\alpha - \beta) Y_t = -\beta Y_{t-1}$. Así,

$$Y_t = \frac{\beta}{\beta - \alpha} Y_{t-1} \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

Usando (20.4) se obtiene la solución

$$Y_t = \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha} \right)^t Y_0 \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

La ecuación en diferencias (4) es un caso particular de la ecuación

$$Y_t = \left(1 + \frac{p}{100}\right)Y_{t-1} = (1+g)Y_{t-1} \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

La solución de (6) es $Y_t = (1+g)^t Y_0$. Nótese que g $(= p\%)$ es la tasa proporcional de crecimiento constante, porque $g = (Y_{t+1} - Y_t)/Y_t$. En (5), esta tasa vale $g = \alpha/(\beta - \alpha)$.

Estados de equilibrio y estabilidad

Consideremos la solución de $x_t = ax_{t-1} + b$ dada por (20.4). Si $x_0 = b/(1-a)$, entonces $x_t = b/(1-a)$ para todo t. En efecto, si $x_s = b/(1-a)$ para un $s \geq 0$, entonces

$$x_{s+1} = a\frac{b}{1-a} + b = \frac{b}{1-a}$$

y de nuevo $x_{s+2} = b/(1-a)$, y así sucesivamente. Deducimos que, si x_s se hace igual a $b/(1-a)$ en un cierto período s, entonces x_t permanecerá constante a partir de ese nivel, es decir, para $t \geq s$. La constante

$$x^* = \frac{b}{1-a} \tag{20.5}$$

se llama un **estado de equilibrio** (o un **estado estacionario**) para $x_t = ax_{t-1} + b$ cuando $a \neq 1$.

Nota: Una manera alternativa de hallar x^* es buscar una solución de $x_t = ax_{t-1} + b$ con $x_t = x^*$ para todo t. Esta solución debe verificar $x_t = x_{t-1} = x^*$ y así $x^* = ax^* + b$. Por tanto, para $a \neq 1$, obtenemos $x^* = b/(1-a)$ otra vez.

La definición (20.5) nos permite escribir (20.4) en la forma

$$x_t - x^* = a(x_{t-1} - x^*) \quad \Longleftrightarrow \quad x_t - x^* = a^t(x_0 - x^*) \tag{20.6}$$

Nótese que $x_t - x^*$ es la desviación de x_t de su valor de equilibrio. Por tanto, (20.6) prueba que esta desviación crece (o disminuye) a la tasa proporcional constante $a - 1$.

Supongamos que la constante a es menor que 1 en valor absoluto, esto es $|a| < 1$, ó $-1 < a < 1$. Entonces $a^t \to 0$ cuando $t \to \infty$, luego (20.4) implica que

$$x_t \to x^* = \frac{b}{1-a} \qquad \text{cuando} \qquad t \to \infty$$

Por tanto, si $|a| < 1$, la solución (20.4) converge hacia el estado de equilibrio cuando $t \to \infty$. La ecuación se llama entonces **estable**. En las Figuras 20.1 (a) y (b) se representan dos casos de estabilidad. En el primero, x_t converge monótonamente hacia abajo, hacia el estado de equilibrio. En el segundo, x_t tiene fluctuaciones de amplitud decreciente hacia el estado de equilibrio. En este caso tenemos lo que se llaman **oscilaciones amortiguadas**.

Si $|a| > 1$, el valor absoluto de a^t tiende a ∞ cuando $t \to \infty$. Deducimos entonces de (20.4) que x_t se aleja cada vez más del estado de equilibrio, excepto cuando $x_0 = b/(1-a)$. En las Figuras 20.1 (c) y (d) se representan dos casos de este fenómeno. En el primero, x_t tiende a $-\infty$ y en el segundo, x_t tiene fluctuaciones de amplitud creciente alrededor del estado de equilibrio. En el último caso decimos que hay **oscilaciones explosivas**.

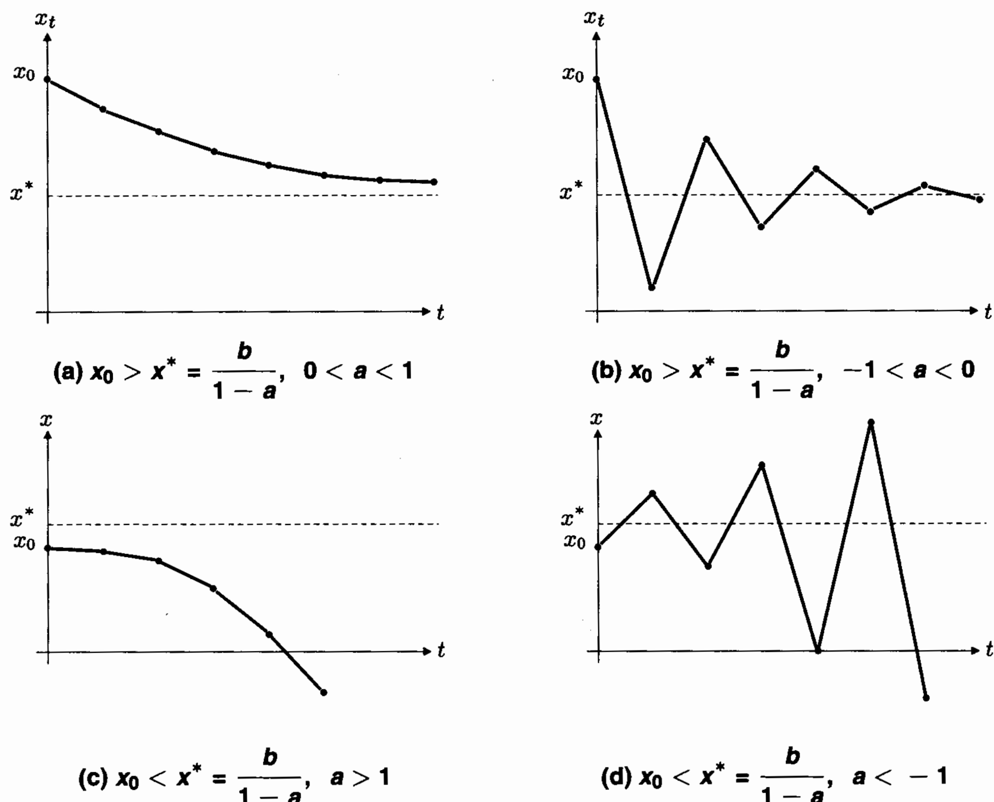


FIGURA 20.1

Ejemplo 20.3

La ecuación (**a**) del Ejemplo 20.1 es estable porque $a = 1/2$. El estado de equilibrio es $b/(1-a) = 3/(1-1/2) = 6$. En la solución que dimos en ese ejemplo vemos que $x_t \to 6$ cuando $t \to \infty$.

La ecuación (**b**) del Ejemplo 20.1 no es estable porque $|a| = |-3| = 3 > 1$. La solución *no* converge al estado de equilibrio $x^* = 1$ cuando $t \to \infty$, excepto si $x_0 = 1$. De hecho, tiene oscilaciones explosivas.

Ejemplo 20.4 (El ciclo del cerdo: Un modelo de telaraña)

Supongamos que el coste total de criar q cerdos es $C(q) = \alpha q + \beta q^2$. Supongamos que se dispone de N criaderos iguales. Sea $D(p) = \gamma - \delta p$ la curva de demanda, en función del precio p, con las constantes α, β, γ, δ positivas. Supongamos además que cada criadero se comporta competitivamente, tomando el precio p como fijado y maximizando los beneficios $\pi(q) = pq - C(q) = pq - \alpha q - \beta q^2$.

La cantidad $q > 0$ puede maximizar beneficios sólo si

$$\pi'(q) = p - \alpha - 2\beta q = 0 \qquad \text{luego} \qquad q = \frac{p-\alpha}{2\beta} \tag{1}$$

Vemos de (1) que $\pi'(q) > 0$ para $q < (p-\alpha)/2\beta$ y $\pi'(q) < 0$ para $q > (p-\alpha)/2\beta$. Así, $q = (p-\alpha)/2\beta$ maximiza beneficios siempre que $p > \alpha$. La oferta agregada de cerdos de las

N granjas es

$$S = \frac{N(p-\alpha)}{2\beta} \qquad (p > \alpha)$$

Ahora bien, supongamos que cada cerdo se cría en un período y que, al decidir cuántos cerdos hay que criar para venderlos al tiempo t, cada granjero recuerda el precio p_{t-1} en el instante $t-1$ y espera que p_t sea igual a p_{t-1}. La oferta agregada en el instante t será $S_t = N(p_{t-1} - \alpha)/2\beta$.

El equilibrio entre oferta y demanda en todos los periodos exige que $S_t = D(p_t)$, luego

$$\frac{N(p_{t-1}-\alpha)}{2\beta} = \gamma - \delta p_t \qquad (t = 1, 2, \ldots)$$

Despejando p_t en función de p_{t-1} y los parámetros se obtiene la ecuación en diferencias

$$p_t = -\frac{N}{2\beta\delta} p_{t-1} + \frac{\alpha N + 2\beta\gamma}{2\beta\delta} \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

El estado estacionario ocurre cuando el precio p^* verifica

$$p_t = p_{t-1} = p^* = \frac{\alpha N + 2\beta\gamma}{2\beta\delta + N}$$

La solución a (2) es

$$p_t = p^* + (-a)^t (p_0 - p^*) \qquad (a = N/2\beta\delta) \tag{3}$$

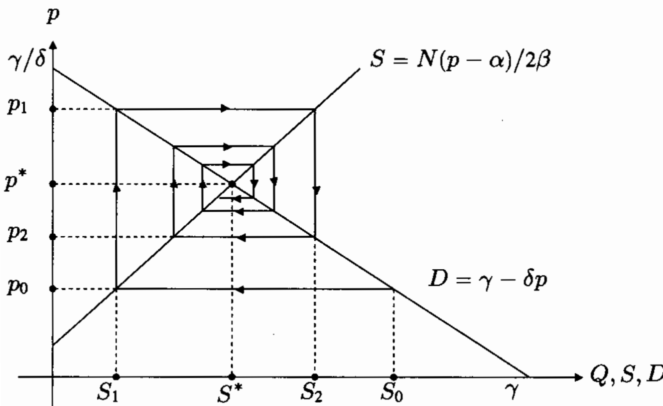


FIGURA 20.2 El modelo de telaraña del Ejemplo 20.4—el caso convergente.

La ecuación (2) es estable si $|-a| < 1$, lo que ocurre cuando $N < 2\beta\delta$. En este caso, $p_t \to p^*$ cuando $t \to \infty$. Se representa en la Figura 20.2 la solución en este caso. En ella S_0 es la oferta de cerdos en el instante 0. El precio de venta es entonces p_0. Esto determina la oferta S_1 en el período siguiente, la cual a su vez determina p_1, y así sucesivamente. Los ciclos sucesivos se amortiguan y precios y cantidades convergen a un cierto estado de equilibrio estable en (S^*, p^*). Éste es también un equilibrio de oferta y demanda. Sin embargo, si $N > 2\beta\delta$ las oscilaciones explotan y eventualmente p_t se hace inferior a α. Entonces los criaderos se arruinan y hay que buscar otra solución. En este caso no hay convergencia hacia un estado

estable. Un tercer caso intermedio ocurre cuando $N = 2\beta\delta$ y $a = 1$. Entonces el par (S_t, p_t) oscila indefinidamente entre los dos valores $(\gamma - \delta p_0, p_0)$ y $(\delta(p_0 - \alpha), \alpha + \gamma/\delta - p_0)$.

Problemas

1 Hallar las soluciones a las ecuaciones en diferencias siguientes, para los valores dados de x_0:

(a) $x_t = 2x_{t-1} + 4, \quad x_0 = 1$ (b) $3x_t = x_{t-1} + 2, \quad x_0 = 2$

(c) $2x_t + 3x_{t-1} + 2 = 0, \quad x_0 = -1$ (d) $x_t - x_{t-1} + 3 = 0, \quad x_0 = 3$

2 Considérese la ecuación en diferencias de (20.4) y explíquese el comportamiento de su solución en cada uno de los casos siguientes, con $x^* = b/(1-a)$ $(a \neq 1)$:

(a) $0 < a < 1, \quad x_0 < x^*$ (b) $-1 < a < 0, \quad x_0 < x^*$ (c) $a > 1, \quad x_0 > x^*$

(d) $a < -1, \quad x_0 > x^*$ (e) $a \neq 1, \quad x_0 = x^*$ (f) $a = -1, \quad x_0 \neq x^*$

(g) $a = 1, \quad b > 0$ (h) $a = 1, \quad b < 0$ (i) $a = 1, \quad b = 0$

3 Probar que si A_t es una función dada de t, la ecuación en diferencias

$$x_t = ax_{t-1} + A_t \qquad (t = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

tiene la solución

$$x_t = a^t x_0 + (a^{t-1}A_1 + a^{t-2}A_2 + \cdots + A_t) \tag{2}$$

En particular, sea $A_t = bc^t$ para $t = 0, 1, \ldots$, usar la fórmula de la suma de una serie geométrica para hallar la suma entre paréntesis de (2). Hallar la solución de la ecuación en diferencias para $a \neq c$ y $a = c$.

4 Consideremos la ecuación en diferencias

$$y_{t+1}(a + by_t) = cy_t \qquad (t = 0, 1, \ldots)$$

donde a, b, c son constantes positivas e $y_0 > 0$.

(a) Probar que $y_t > 0$ para todo $t = 0, 1, \ldots$.

(b) Sea $x_t = 1/y_t$; probar que, con esta sustitución, la nueva ecuación en diferencias es del tipo de la de (20.4). Resolver después la ecuación en diferencias

$$y_{t+1}(2 + 3y_t) = 4y_t$$

suponiendo que $y_0 = 1/2$. ¿Cuál es el límite de y_t cuando $t \to \infty$?

5 Consideremos la ecuación en diferencias $x_t = \sqrt{x_{t-1} - 1}$ con $x_0 = 5$. Calcular x_1, x_2 y x_3. ¿Qué pasa con x_4? (Este problema ilustra la necesidad de tener cuidado si el dominio de la función f en (20.1) se restringe de alguna forma.)

Problemas avanzados

6 Los autores Frisch, Haavelmo, Norregaard-Rasmussen y Zeuthen, en su estudio de la "espiral precios–salarios" de la inflación, consideraron el siguiente sistema para $t = 0, 1, \ldots$:

$$\frac{W_{t+2} - W_{t+1}}{W_{t+1}} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \qquad \text{y} \qquad P_t = \gamma + \beta W_t \tag{1}$$

donde W_t designa el nivel salarial, P_t el índice de precios en el instante t, y γ y β son constantes. La primera ecuación dice que el aumento proporcional de los salarios es igual al aumento proporcional del índice de precios en el período anterior, mientras que la segunda ecuación relaciona los precios con los salarios en el mismo tiempo.

(a) Deducir de (1) la siguiente ecuación para W_t:

$$\frac{W_{t+2}}{\gamma + \beta W_{t+1}} = \frac{W_{t+1}}{\gamma + \beta W_t} \qquad (t = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

(b) Usar (2) para probar que

$$W_{t+1} = c(\gamma + \beta W_t) \qquad (t = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

donde $c = W_1/P_0$, y hallar una expresión general para W_t cuando $c\beta \neq 1$.

(c) ¿Bajo qué condiciones será estable (3) y cuál es el límite de W_t cuando $t \to \infty$ en este caso?

20.2 INTERÉS COMPUESTO Y VALOR ACTUAL DESCONTADO

La teoría de la sección anterior se puede aplicar a describir el efecto del interés compuesto de una cuenta con depósitos y reintegros. Sea w_t el saldo de la cuenta en el período t, c_t la cantidad retirada para consumo e y_t el depósito en el período t. Si la tasa de interés por período es una constante r, la ecuación en diferencias que describe la evolución es

$$w_t = (1 + r)w_{t-1} + (y_t - c_t) \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{20.7}$$

Entonces (20.3) implica que la solución de (20.7) es

$$w_t = (1 + r)^t w_0 + \sum_{k=1}^{t} (1 + r)^{t-k}(y_k - c_k) \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{20.8}$$

porque $a = 1 + r$ y $b_t = y_t - c_t$.

Multipliquemos cada término de (20.8) por $(1 + r)^{-t}$. Éste es un multiplicador de gran importancia económica, que se llama el **factor de descuento**. El resultado es

$$(1 + r)^{-t} w_t = w_0 + \sum_{k=1}^{t} (1 + r)^{-k}(y_k - c_k) \tag{20.9}$$

Si $t = 0$ representa el día de hoy, el miembro de la izquierda es el **valor actual descontado** (VAD) de los fondos en el instante t. La ecuación (20.9) dice que es igual a la suma de

(**a**) la disponibilidad inicial w_0

(**b**) el VAD de todos los depósitos futuros, $\sum_{k=1}^{t}(1 + r)^{-k} y_k$

(**c**) el opuesto del VAD de todos los reintegros futuros $\sum_{k=1}^{t}(1 + r)^{-k} c_k$

En el caso en que $w_0 = w_t = 0$, en que el primer depósito abre la cuenta en el instante 0 y el último reintegro la cierra en el instante t, tenemos

$$\sum_{k=1}^{t} (1 + r)^{-k} c_k = \sum_{k=1}^{t} (1 + r)^{-k} y_k$$

Esto exige que el VAD de todos los reintegros sea igual al VAD de todos los depósitos.

Si el tiempo t es hoy, la formula de w_t en (20.8) se puede interpretar así: *Las disponibilidades actuales w_t reflejan el interés percibido por el depósito inicial w_0, con los ajustes del interés percibido por los sucesivos depósitos y el perdido en los sucesivos reintegros.*

Ejemplo 20.5 (**Amortización de una hipoteca**)

Un caso particular de la ecuación en diferencias (20.7) es el de una familia que toma un préstamo hipotecario B sobre su casa en el instante 0. Supongamos que hay una tasa de interés fijo

de r por período y que todos los vencimientos son iguales, de una cuantía z en cada período, hasta la cancelación de la hipoteca en T periodos (por ejemplo, 30 años o 360 meses). El principal es el capital que se tiene efectivamente prestado en cada instante. Así el principal b_t en el período t verifica la ecuación en diferencias

$$b_t = (1+r)b_{t-1} - z, \qquad \text{con} \qquad b_0 = B \qquad \text{y} \qquad b_T = 0 \tag{1}$$

Se puede resolver esta ecuación en diferencias usando (20.4) con $x_t = b_t$, $a = 1 + r$, $b = -z$ y $b_0 = B$. Obtenemos

$$b_t = (1+r)^t \left(B - \frac{z}{r}\right) + \frac{z}{r} \tag{2}$$

Pero $b_t = 0$ cuando $t = T$, luego $0 = (1+r)^T(B - z/r) + z/r$. Despejando B se tiene

$$B = \frac{z}{r}[1 - (1+r)^{-T}] = z\sum_{t=1}^{T}(1+r)^{-t} \tag{3}$$

Por tanto, el préstamo original es igual al VAD de T plazos iguales a z cada período, comenzando en el período 1.

Despejando z en (3) obtenemos

$$z = \frac{rB}{1-(1+r)^{-T}} = rB + \frac{(1+r)^{-T}rB}{1-(1+r)^{-T}} \tag{4}$$

Por tanto, la amortización en cada período es ligeramente superior al interés rB del préstamo original B. Hay principal en cada período, además de intereses. Esta distinción tiene cierta importancia para temas de impuestos en ciertos países como EEUU, donde la parte de interés rb_{t-1} de cada plazo de amortización hipotecaria es deducible, mientras que los pagos del principal no lo son.

Nótese que de (3) se deduce que $B - z/r = -(z/r)(1+r)^{-T}$. Llevando este valor a (2) obtenemos

$$b_t = \frac{z}{r}[1 - (1+r)^{t-T}] \tag{5}$$

Esto representa el principal en el período t. Así, en el instante t, el interés del principal en el período $t - 1$ es

$$rb_{t-1} = z[1 - (1+r)^{t-1-T}]$$

Puesto que z es el total del plazo de amortización, se deduce que la parte del principal en el período t es

$$z - rb_{t-1} = z(1+r)^{t-1-T}$$

Esta cantidad comienza siendo muy pequeña, pero crece exponencialmente a la tasa $1 + r$. En el último período, es decir cuando $t = T$, el interés es

$$z\left(1 - \frac{1}{1+r}\right) = \frac{rz}{1+r}$$

mientras que el principal es $z/(1+r)$. Cuando hay que pagar el primer vencimiento, es decir, cuando $t = 1$, se paga solamente $z(1+r)^{-T}$ del principal; el resto es interés.

Problemas

1 Hallar la solución de (20.7) para $r = 0{,}2$, $w_0 = 1.000$, $y_t = 100$ y $x_t = 50$.

2 Consideremos un préstamo hipotecario de cien mil dólares tomado en el instante $t = 0$, a la tasa de interés fijo del $r = 0{,}07$ anual. Hay que amortizarlo en 30 pagos anuales iguales. ¿Cuál es la cuantía de cada plazo? Calcular cuánto se paga de interés y cuánto de principal: (a) en el primer año y (b) en el último año.

3 Se toma un préstamo de $L\$$ el uno de enero del año cero. Se pagan las amortizaciones anualmente, incluyendo principal e interés, empezando el uno de enero del año 1. Supongamos que la tasa de interés es $r < 2$. Así, el interés es de rL en el primer pago. El contrato estipula que la parte de principal de cada plazo de amortización sea la mitad de la parte de interés.

(a) Demostrar que la deuda después del primero de enero del año n es $(1 - r/2)^n L$.

(b) Hallar r sabiendo que después de 10 años se ha pagado exactamente la mitad del préstamo original.

(c) ¿De cuánto serán los sucesivos pagos anuales si no se cambia el contrato?

20.3 ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES VARIABLES

A veces los economistas tienen que trabajar con un tipo más general de ecuación en diferencias lineal (20.2) en el que el coeficiente a puede ser una función del tiempo. Éste será el caso del Ejemplo 20.6 que trata del VAD de una línea de renta cuando el interés varía.

La ecuación en diferencias lineal general de primer orden, tiene la forma

$$x_t = a_t x_{t-1} + b_t \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{20.10}$$

donde a_t depende de t. Procediendo como antes, calculamos explícitamente x_t para unos pocos valores de t, empezando en un x_0 para $t = 0$. Tenemos

$$x_1 = a_1 x_0 + b_1$$
$$x_2 = a_2 x_1 + b_2 = a_2(a_1 x_0 + b_1) + b_2 = a_2 a_1 x_0 + a_2 b_1 + b_2$$

Omitiendo los detalles de los dos pasos siguientes, tenemos

$$x_3 = a_3 a_2 a_1 x_0 + a_3 a_2 b_1 + a_3 b_2 + b_3$$
$$x_4 = a_4 a_3 a_2 a_1 x_0 + a_4 a_3 a_2 b_1 + a_4 a_3 b_2 + a_4 b_3 + b_4$$

Este caso es mucho más complicado que cuando a_t no dependía de t, pero se puede descubrir un patrón. En efecto, los sucesivos coeficientes de x_0 son

$$a_1, \quad a_1 a_2, \quad a_1 a_2 a_3, \quad a_1 a_2 a_3 a_4$$

que se pueden escribir en la forma

$$\prod_{s=1}^{t} a_s \qquad \text{para} \qquad t = 1, 2, 3, 4 \tag{20.11}$$

(véase la Sección B.4 para una explicación de la notación del producto). De hecho, la fórmula general de x_t es

$$x_t = \left(\prod_{s=1}^{t} a_s\right) x_0 + \left(\prod_{s=2}^{t} a_s\right) b_1 + \left(\prod_{s=3}^{t} a_s\right) b_2 + \cdots + \left(\prod_{s=t}^{t} a_s\right) b_{t-1} + b_t$$

que se puede escribir en la forma

$$x_t = \left(\prod_{s=1}^{t} a_s\right) x_0 + \sum_{k=1}^{t} \left(\prod_{s=k+1}^{t} a_s\right) b_k \tag{20.12}$$

con el convenio de que el producto $\prod_{s=t+1}^{t} a_s$ de cero términos es 1. Se puede demostrar (20.12) por inducción matemática.

Ejemplo 20.6 (**Interés compuesto y VAD a Interés Variable**)

Vamos a modificar nuestros cálculos anteriores sobre interés compuesto y VAD de la Sección 20.2 considerando tasas de interés r_t variables de un período a otro. La ecuación en diferencias correspondiente es

$$w_t = (1 + r_t)w_{t-1} + y_t - c_t \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

La fórmula (20.12) da

$$w_t = \left[\prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)\right] w_0 + \sum_{k=1}^{t}\left[\prod_{s=k+1}^{t}(1 + r_s)\right](y_k - c_k) \tag{2}$$

Definimos el **factor de descuento** D_t por la relación

$$D_t = \frac{1}{\prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)} = \prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)^{-1} \tag{3}$$

Nótese que cuando $r_s = r$ para todo s, entonces $D_t = (1 + r)^{-t}$, el factor de descuento que usamos en la Sección 20.2 (véase (20.9)). Multiplicando cada término de (2) por D_t obtenemos

$$D_t w_t = w_0 + \sum_{k=1}^{t}\left[\frac{\prod_{s=k+1}^{t}(1 + r_s)}{\prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)}\right](y_k - c_k)$$

Pero

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{s=k+1}^{t}(1 + r_s)}{\prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)} &= \frac{(1 + r_{k+1})\cdots(1 + r_t)}{(1 + r_1)\cdots(1 + r_k)(1 + r_{k+1})\cdots(1 + r_t)} \\ &= \frac{1}{(1 + r_1)\cdots(1 + r_k)} = D_k\end{aligned}$$

luego

$$D_t w_t = w_0 + \sum_{k=1}^{t} D_k(y_k - c_k) \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

La interpretación en términos de VAD es la misma que antes (véase fórmula (20.9)). En el caso particular de que no haya depósitos ni reintegros se tiene

$$w_t = w_0 / D_t = w_0 \prod_{k=1}^{t}(1 + r_k)$$

como cabría esperar. En efecto, una inversión inicial de w_0 se convierte en $w_0(1 + r_1)$ después de un período, en $w_0(1 + r_1)(1 + r_2)$ después de dos periodos, y así sucesivamente. Por tanto, los factores de descuento tienen la forma apropiada. Si se define el **factor de interés** R_k por la relación

$$R_k = \frac{D_k}{D_t} = \prod_{s=k+1}^{t}(1 + r_s) \tag{5}$$

la fórmula (2) puede escribirse

$$w_t = R_0 w_0 + \sum_{k=1}^{t} R_k(y_k - c_k) \tag{6}$$

que es la generalización de la fórmula (20.8).

Problemas

1 Rehacer el Ejemplo 20.5 de la hipoteca para interés variable. Nótese que, en la práctica, las hipotecas de interés variable tienen plazos de amortización que crecen cuando crece el tipo de interés y decrece cuando lo hace el interés. ¿Por qué ocurre esto? ¿Qué ocurriría si hubiera un gran aumento imprevisto del tipo de interés sin que crecieran los plazos de amortización?

20.4 ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

Hasta ahora hemos considerado ecuaciones en diferencias de primer orden, en las cuales cada valor x_t de una función se expresa en función de x_{t-1}, el valor en el período anterior. Vamos a dar un ejemplo tomado de la economía, en el que hay que considerar ecuaciones en diferencias de segundo orden.

Ejemplo 20.7 (**Modelo de crecimiento del multiplicador–acelerador**)

Sea Y_t la renta nacional, C_t el consumo total e I_t la inversión total en un país en el instante t. Supongamos que, para $t = 0, 1, \dots,$

$$Y_t = C_t + I_t \tag{1}$$

$$C_{t+1} = aY_t + b \tag{2}$$

$$I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t) \tag{3}$$

donde a, b y c son constantes.

La ecuación (1) dice simplemente que la renta nacional se divide entre consumo e inversión. La ecuación (2) refleja la hipótesis de que el consumo en el período $t + 1$ es una función lineal de la renta nacional en el período anterior. Ésta es la parte de "multiplicador" del modelo. Finalmente, la ecuación (3) dice que la inversión en el período $t + 1$ es proporcional a la variación del consumo en el período anterior. La idea es que el stock de capital existente proporciona suficiente capacidad a la producción para satisfacer el consumo. Por tanto, la inversión es necesaria sólo cuando el consumo aumenta. Ésta es la parte de "acelerador" del modelo. Este modelo combinado "multiplicador-acelerador" ha sido estudiado por varios economistas, principalmente por P. A. Samuelson.

Suponemos conocidos el consumo C_0 y la inversión I_0 en el período inicial $t = 0$. Entonces, por (1), $Y_0 = C_0 + I_0$, y por (2), $C_1 = aY_0 + b$. Se deduce de (3) que $I_1 = c(C_1 - C_0)$ y (1) da $Y_1 = C_1 + I_1$. Por consiguiente se conocen Y_1, C_1 e I_1. Volviendo de nuevo a (2) calculamos C_2; después (3) nos da el valor de I_2 y (1) nos da el de Y_2. Siguiendo así podemos obtener las expresiones de C_t, Y_t e I_t para todo t en función de C_0, Y_0 y las constantes a, b y c. Las expresiones resultantes crecen en complejidad.

Hay otro método de estudiar el sistema que es más instructivo. Consiste en eliminar dos de las funciones incógnitas para obtener una ecuación en diferencias en una sola incógnita. Vamos a aplicar el método para obtener una ecuación en diferencias en Y_t. Para lograrlo, nótese que las ecuaciones (1) a (3) son válidas para $t = 0, 1, \dots$. Si se sustituye t por $t + 1$ en (2) y (3), y t por $t + 2$ en (1) tenemos

$$C_{t+2} = aY_{t+1} + b \tag{4}$$

$$I_{t+2} = c(C_{t+2} - C_{t+1}) \tag{5}$$

$$Y_{t+2} = C_{t+2} + I_{t+2} \tag{6}$$

Sustituyendo (4) y (2) en (5) se obtiene $I_{t+2} = ac(Y_{t+1} - Y_t)$. Llevando (4) y este resultado a (6) obtenemos $Y_{t+2} = aY_{t+1} + b + ac(Y_{t+1} - Y_t)$. Reordenando tenemos

$$Y_{t+2} - a(1+c)Y_{t+1} + acY_t = b \qquad (t = 0, 1, \ldots) \tag{7}$$

Esta es una ecuación en diferencias de segundo orden en la función incógnita Y_t. En la próxima sección damos un método general para resolver estas ecuaciones.

La mayoría de las ecuaciones en diferencias de segundo orden se pueden escribir en la forma

$$x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1}) \qquad (t = 0, 1, \ldots) \tag{20.13}$$

Supongamos que f está definida para todos los valores posibles de las variables (t, x_t, x_{t+1}) y que x_0 y x_1 están fijados. Haciendo $t = 0$ en (20.13) vemos que $x_2 = f(0, x_0, x_1)$. Haciendo ahora $t = 1$ en (20.13) obtenemos $x_3 = f(1, x_1, f(0, x_0, x_1))$. Si seguimos poniendo sucesivamente $t = 2$, $t = 3$, ... en (20.13), vemos que x_0 y x_1 determinan unívocamente los valores de x_t para *todo* t. Tenemos por tanto el resultado siguiente, que es semejante al Teorema 20.1.

Teorema 20.2 (Teorema de existencia y unicidad)

Consideremos la ecuación en diferencias $x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1})$, $t = 0, 1, \ldots$, donde f está definida para todos los valores de las variables. Si x_0 y x_1 son números arbitrarios pero fijos, existe una función x_t unívocamente determinada que es una solución de la ecuación y tiene los valores dados para $t = 0$ y $t = 1$.

En general, para cada valor de x_0 y de x_1 hay una solución única distinta de la ecuación (20.13). Consiguientemente hay un número infinito de soluciones. Como hemos explicado ya, podemos calcular cualquier valor de x_t sustituyendo sucesivamente valores de t. Aun así, los razonamientos que dimos inmediatamente después del Teorema 20.1 para desarrollar una teoría de las ecuaciones en diferencias de primer orden son igualmente válidos para ecuaciones en diferencias de segundo orden.

Consideremos de nuevo la ecuación (20.13) y supongamos que f está definida sobre todo $\mathbb{R}^3$. Una solución está unívocamente determinada por sus valores en los dos primeros periodos. Por definición, la **solución general** o **solución completa** de (20.13) es una función

$$x_t = g(t, A, B) \tag{20.14}$$

que depende de dos constantes arbitrarias y tiene la propiedad de que toda otra solución de (20.13) se puede obtener de (20.14) dando valores apropiados a A y B. Así (20.14) es la solución general de (20.13) si y sólo si, dados valores arbitrarios de x_0 y x_1, el sistema

$$g(0, A, B) = x_0, \qquad g(1, A, B) = x_1 \tag{20.15}$$

tiene soluciones únicas en A y B.

Ejemplo 20.8

La ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - \tfrac{1}{6}x_{t+1} - \tfrac{1}{6}x_t = 0$$

es de segundo orden. Es fácil deducir por sustitución directa que la función $x_t = A\,(1/2)^t + B\,(-1/3)^t$ satisface la ecuación para todo valor de A y B. En la próxima sección explicamos cómo hallar esta función particular. Sean x_0 y x_1 números arbitrarios. En este caso, el sistema

(20.15) es

$$A + B = x_0, \qquad \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{3}B = x_1$$

Se deduce que $A = \frac{2}{5}x_0 + \frac{6}{5}x_1$ y $B = \frac{3}{5}x_0 - \frac{6}{5}x_1$. Por tanto, $x_t = A(1/2)^t + B(-1/3)^t$ es la solución general de la ecuación.

Supusimos en el Teorema 20.2 que la función f de (20.13) estaba definida sobre todo $\mathbb{R}^3$. Si esto no es cierto para una ecuación en diferencias particular, se debe estudiar separadamente si existe solución (ver, por ejemplo, el Problema 5 de la Sección 20.1).

Ecuaciones lineales

La ecuación en diferencias lineal general de segundo orden es

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t \tag{20.16}$$

donde a_t, b_t y c_t son funciones de t dadas. La **ecuación homogénea asociada**

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = 0 \tag{20.17}$$

es la que se obtiene de (20.16) sustituyendo c_t por 0. Veamos que, si las dos funciones $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ de t satisfacen (20.17), entonces $x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ también satisface (20.17) para cualesquiera A y B. En efecto, $x_{t+1} = Au_{t+1}^{(1)} + Bu_{t+1}^{(2)}$ y $x_{t+2} = Au_{t+2}^{(1)} + Bu_{t+2}^{(2)}$. Llevando estas expresiones de x_{t+1} y x_{t+2} a la izquierda de (20.17) obtenemos

$$\begin{aligned} Au_{t+2}^{(1)} + Bu_{t+2}^{(2)} + a_t\left[Au_{t+1}^{(1)} + Bu_{t+1}^{(2)}\right] + b_t\left[Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}\right] \\ = A\left[u_{t+2}^{(1)} + a_t u_{t+1}^{(1)} + b_t u_t^{(1)}\right] + B\left[u_{t+2}^{(2)} + a_t u_{t+1}^{(2)} + b_t u_t^{(2)}\right] \end{aligned}$$

Como $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ verifican (20.17), las dos expresiones entre corchetes a la derecha de la última ecuación deben ser 0, luego debe anularse el miembro de la derecha. Hemos probado así que la función $x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ verifica (20.17) para todos los valores de las constantes A y B.

Supongamos que nos ingeniamos de alguna forma para hallar soluciones $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ de (20.17). Entonces $x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ verifica (20.17) para todos los valores de A y B. ¿Es ésta la solución general? La respuesta es negativa. Para afirmar que $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ es realmente la solución general de (20.17) debemos exigir que $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ sean linealmente independientes, esto es, que no son proporcionales. Así

La ecuación en diferencias homogénea

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = 0$$

tiene como **solución general** (20.18)

$$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$$

donde $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ son dos soluciones linealmente independientes y A, B son constantes arbitrarias.

Demostración: A la vista del razonamiento posterior al Teorema 20.2, basta probar que, para valores de x_0 y x_1 dados, existen constantes A y B que verifican

$$Au_0^{(1)} + Bu_0^{(2)} = x_0, \qquad Au_1^{(1)} + Bu_1^{(2)} = x_1$$

Según la regla de Cramer, este sistema tiene solución única en A y B si el determinante

$$W = \begin{vmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} \end{vmatrix} \tag{1}$$

es distinto de 0. Para demostrar que $W \neq 0$ vemos que la hipótesis $W = 0$ lleva a contradicción.

Si $W = 0$, las columnas de W son linealmente dependientes. Así, existen λ_1, λ_2, no nulos simultáneamente, tales que

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_0^{(1)} + \lambda_2 u_0^{(2)} &= 0 \\ \lambda_1 u_1^{(1)} + \lambda_2 u_1^{(2)} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Pongamos $\bar{x}_t = \lambda_1 u_t^{(1)} + \lambda_2 u_t^{(2)}$; entonces $\bar{x}_t$ verifica (20.17) porque $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ son soluciones y, además, (2) nos dice que $\bar{x}_0 = 0$ y $\bar{x}_1 = 0$. Por el Teorema 20.2, hay sólo una función $\bar{x}_t$ que verifica (20.17) y es tal que $\bar{x}_0 = 0$ y $\bar{x}_1 = 0$. Es evidente que ésta debe ser $\bar{x}_t \equiv 0$ para todo t. Por tanto, $\lambda_1 u_t^{(1)} + \lambda_2 u_t^{(2)} \equiv 0$. Pero esto contradice la hipótesis de que $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ son linealmente independientes. Esto prueba que $W \neq 0$.

Nuestro próximo resultado versa sobre la estructura de la solución general de la ecuación no homogénea (20.16). Supongamos que podemos hallar una **solución particular** u_t^* de (20.16). Si x_t es una solución arbitraria de (20.16), es fácil ver que la diferencia $x_t - u_t^*$ es una solución de la ecuación homogénea asociada (20.17). Por tanto, en virtud de (20.18), tenemos $x_t - u_t^* = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$, donde $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ son dos soluciones linealmente independientes de (20.17) y A y B son constantes. Por tanto,

La **solución general** de la ecuación en diferencias no homogénea

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t$$

es

$$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^* \tag{20.19}$$

donde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada (es decir, la misma sustituyendo c_t por cero), y u_t^* es una solución particular de la no homogénea.

Nota: Para poder utilizar (20.18) y (20.19) tenemos que poder decir cuándo dos funciones son linealmente independientes. La condición suficiente siguiente es fácil de aplicar y se generaliza bien al caso de n funciones:

$$\begin{vmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \; u_t^{(1)} \text{ y } u_t^{(2)} \text{ son linealmente independientes} \tag{20.20}$$

Demostración: Supongamos que $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ son linealmente dependientes. Existen números A y B, no nulos simultáneamente, tales que $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} = 0$ para todo $t = 0, 1, \ldots$. En particular, haciendo $t = 0$ y $t = 1$ se obtiene

$$Au_0^{(1)} + Bu_0^{(2)} = 0, \qquad Au_1^{(1)} + Bu_1^{(2)} = 0$$

En virtud del Teorema 13.7 de la Sección 13.8, este sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante del sistema es 0. Este determinante es precisamente el de (20.20). Así hemos demostrado que, si $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ son linealmente dependientes, el determinante (20.20) es 0. Deducimos que, si el determinante no es 0, $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ son linealmente independientes.

Ejemplo 20.9

Hallar la solución general de

$$x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 2t - 3 \qquad (t = 0, 1, \dots) \tag{1}$$

Solución: Ésta es una ecuación de la forma (20.16). La ecuación homogénea asociada es

$$x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 0 \tag{2}$$

Es fácil ver que $u_t^{(1)} = 2^t$ y $u_t^{(2)} = 3^t$ verifican (2). En la próxima sección veremos cómo se genera esta idea feliz. Las funciones 2^t y 3^t son linealmente independientes porque el determinante de (20.20) es $3 - 2 = 1$, luego $x_t = A\,2^t + B\,3^t$ es la solución general de (2).

La forma del miembro de la derecha de (1) sugiere que una posible solución es una función del tipo $u_t^* = at + b$. Se puede usar el método de los coeficientes indeterminados para calcular a y b. De hecho, $u_{t+1}^* = a(t+1) + b$ y $u_{t+2}^* = a(t+2) + b$. Llevando estos valores a (1) se obtiene

$$a(t+2) + b - 5[a(t+1) + b] + 6(at + b) = 2t - 3$$

para todo $t = 0, 1, \dots$. Simplificando a la izquierda tenemos que

$$2at - 3a + 2b = 2t - 3 \qquad \text{para todo } t = 0, 1, \dots$$

Igualando los coeficientes de t y el término independiente deducimos que $2a = 2$ y que $-3a + 2b = -3$. Así $a = 1$ y $b = 0$, luego $u_t^* = t$ es una solución de (1). En virtud de (20.19), la solución general de (1) es

$$x_t = A\,2^t + B\,3^t + t$$

No hay un método universalmente válido para hallar las dos soluciones linealmente independientes de (20.17) que necesitamos para hallar la solución general de la ecuación. Sin embargo, en el caso particular en que los coeficientes a_t y b_t son constantes, es siempre posible hallar las dos soluciones deseadas. En la próxima sección se explica cómo hacerlo.

Problemas

1 Probar por sustitución directa que las funciones de t siguientes son soluciones de la ecuación en diferencias correspondiente (A y B son constantes):

(a) $x_t = A + 2t, \qquad x_{t+1} = x_t + 2$

(b) $x_t = A\,3^t + B\,4^t, \qquad x_{t+2} - 7x_{t+1} + 12x_t = 0$

2 Probar que $x_t = A + Bt$ es la solución general de $x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 0$.

3 Probar que $x_t = A\,3^t + B\,4^t$ es la solución general de $x_{t+2} - 7x_{t+1} + 12x_t = 0$. (Véase Problema 1(b)).

4 Probar que $x_t = A\,2^t + B\,t2^t + 1$ es la solución general de $x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4x_t = 1$.

Problemas avanzados

5 Consideremos la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} - e^{-2at}x_t = e^{-at^2} \qquad (t = 0, 1, \dots,\ a \neq 0)$$

(a) Hallar la solución general $\tilde{x}_t$ de la ecuación homogénea asociada como función de t y $\tilde{x}_0$.

(b) Probar que

$$u_t^* = \frac{1}{1-e^{-a}} e^{-a(t-1)^2}$$

es una solución particular de la ecuación no homogénea y hallar la solución general de la ecuación dada.

20.5 ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos la ecuación homogénea

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0 \tag{20.21}$$

donde a y b son constantes arbitrarias, $b \neq 0$ y x_t es la función incógnita. En virtud de (20.18), el hallar la solución general de (20.21) exige encontrar dos soluciones $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ que sean linealmente independientes. Sobre la base de la experiencia adquirida en algunos de los problemas y ejemplos anteriores, no debe sorprender que tratemos de buscar soluciones de (20.21) que sean de la forma $x_t = m^t$. Entonces $x_{t+1} = m^{t+1} = m \cdot m^t$ y $x_{t+2} = m^{t+2} = m^2 \cdot m^t$. Llevando estas expresiones a (20.21) obtenemos $m^t(m^2 + am + b) = 0$. Si $m \neq 0$, entonces m^t verifica (20.21) siempre que m verifique la ecuación

$$m^2 + am + b = 0 \tag{20.22}$$

Esta ecuación se llama la **ecuación característica** de la ecuación en diferencias. Sus soluciones son

$$m_1 = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}\,, \qquad m_2 = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b} \tag{20.23}$$

Hay tres casos distintos a considerar, que se resumen en el cuadro siguiente:

La **solución general** de

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0$$

(con $b \neq 0$) se calcula así:

1. Si $\frac{1}{4}a^2 - b > 0$, es decir, si la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas, la solución es

$$x_t = Am_1^t + Bm_2^t, \qquad m_{1,2} = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}$$

2. Si $\frac{1}{4}a^2 - b = 0$, es decir, si la ecuación característica tiene una raíz real doble, la solución es

$$x_t = (A + Bt)m^t, \qquad m = -\tfrac{1}{2}a$$

3. Si $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$, es decir, si la ecuación característica no tiene raíces reales, la solución es

$$x_t = Ar^t \cos(\theta t + \omega), \qquad r = \sqrt{b}, \qquad \cos\theta = -a/(2\sqrt{b})$$

donde $\theta \in [0, \pi]$.

El caso $\frac{1}{4}a^2 - b > 0$ es el más sencillo. En él m_1 y m_2 son reales y distintas, luego m_1^t y m_2^t son soluciones de (20.21). El determinante de (20.20) es

$$\begin{vmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1 \neq 0$$

luego las dos soluciones son linealmente independientes y, por tanto, la solución general viene dada por (1).

Si $\frac{1}{4}a^2 - b = 0$, entonces $m = -\frac{1}{2}a$ es una raíz real doble de (20.22). Esto significa que $m^2 + am + b = (m + \frac{1}{2}a)^2$. Además de m^t, la función $t\,m^t$ verifica también (20.21) (véase Problema 6). Más aún, esas dos funciones son linealmente independientes porque el determinante de (20.20) es igual a m. La solución general es la de (2).

Si $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$, las raíces de (20.22) son complejas. La posible solución se puede expresar de otra forma. En virtud del Problema 3 de la Sección C.1,

$$Ar^t \cos(\theta t + \omega) = C_1 r^t \cos(\theta t) + C_2 r^t \operatorname{sen}(\theta t) \qquad (*)$$

donde hemos puesto $C_1 = A\cos\omega$ y $C_2 = -A\operatorname{sen}\omega$. Las dos funciones $u_t^{(1)} = r^t\cos(\theta t)$ y $u_t^{(2)} = r^t\operatorname{sen}(\theta t)$ son linealmente independientes. En efecto, el determinante (20.20) es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r\cos\theta & r\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = r\operatorname{sen}\theta = \sqrt{b}\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{b}\sqrt{1 - a^2/4b} = \sqrt{b - \tfrac{1}{4}a^2} > 0$$

Además, se puede probar que las funciones verifican (20.21) por simple sustitución, aunque los cálculos algebraicos son largos.

Vemos que, cuando la ecuación característica tiene raíces complejas, la solución de (20.21) tiene oscilaciones. La cantidad Ar^t es la **amplitud** en el instante t y r se llama el **factor de crecimiento**. El número $\theta/2pi$ se llama la **frecuencia** de la oscilación y ω la **fase**. Nótese que cuando $|r| < 1$, entonces $|Ar^t| \to 0$ cuando $t \to \infty$ y las oscilaciones se llaman **oscilaciones amortiguadas**. Si $|r| > 1$, las oscilaciones se llaman **oscilaciones explosivas**, y si $|r| = 1$ tenemos oscilaciones no amortiguadas. Nótese también que la amplitud y la fase dependen en general de las condiciones iniciales (los valores de x_0 y x_1), mientras que la frecuencia y el factor de crecimiento son independientes de las condiciones iniciales, dependiendo solamente de los coeficientes a y b de la ecuación original.

Vamos a estudiar varios ejemplos de ecuaciones en diferencias de la forma (20.21).

Ejemplo 20.10

Hallar las soluciones generales de

$$\textbf{(a)}\ x_{t+2} - 3{,}9x_{t+1} + 3{,}78x_t = 0$$

$$\textbf{(b)}\ x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 0$$

$$\textbf{(c)}\ x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 0$$

Solución: (**a**) La ecuación característica es $m^2 - 3{,}9m + 3{,}78 = 0$, con soluciones $m_1 = 1{,}8$ y $m_2 = 2{,}1$, luego la solución general es

$$x_t = A(1{,}8)^t + B(2{,}1)^t$$

(**b**) La ecuación característica es $m^2 - 6m + 9 = (m-3)^2 = 0$, luego $m = 3$ es una raíz doble. La solución general es

$$x_t = (A + Bt)3^t$$

(**c**) La ecuación característica es $m^2 - m + 1 = 0$, que tiene raíces complejas. En ella, $r = \sqrt{b} = 1$ y $\cos\theta = 1/2$, luego $\theta = \frac{1}{3}\pi$. La solución general es

$$x_t = A\cos(\tfrac{1}{3}\pi t + \omega)$$

La frecuencia es $(\pi/3)/2\pi = 1/6$. El factor de crecimiento es 1, luego las oscilaciones son no amortiguadas.

El caso no homogéneo

Consideremos ahora la ecuación no homogénea

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c_t \qquad (b \neq 0) \tag{20.24}$$

En virtud de (20.19), la solución general de (20.24) es

$$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^* \tag{20.25}$$

donde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada (20.21), y u_t^* es una solución particular de (20.24). Sabemos hallar $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$. ¿Cómo hallamos u_t^*? En algunos casos es fácil. Por ejemplo, consideremos el caso en el cual $c_t = c$, donde c es una constante. Así tenemos la ecuación (20.24) en la forma

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c \qquad (c \text{ es constante}) \tag{20.26}$$

Vamos a tratar de hallar una solución de la forma $x_t = C$, donde C es constante. Entonces $x_{t+1} = x_{t+2} = C$, luego sustituyendo en la ecuación se tiene $C + aC + bC = c$, esto es, $C = c/(1 + a + b)$. Se deduce que, si $1 + a + b \neq 0$, entonces $c/(1 + a + b)$ es una solución de (20.26). Si $1 + a + b = 0$, no hay solución constante de (20.26). Para tratar este caso, véase el Problema 5.

Consideremos más generalmente el caso en que c_t en (20.24) es una combinación lineal de términos de la forma

$$a^t, \qquad t^m, \qquad \cos(bt), \quad \operatorname{sen}(bt)$$

o producto de esos términos. Entonces podemos usar el método de los coeficientes indeterminados para obtener una solución particular de (20.24). Si la función c_t de (20.24) verifica la ecuación homogénea, hay que buscar otra función para probar.[2]

Ejemplo 20.11

Resolver la ecuación $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 4^t + t^2 + 3$.

Solución: Consideremos primero la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica es $m^2 - 5m + 6 = 0$, que tiene dos raíces reales: $m_1 = 2$ y $m_2 = 3$. La solución general es, pues, $A\,2^t + B\,3^t$. Para hallar una solución particular de la ecuación completa intentamos hallar constantes C, D, E y F tales que

$$u_t^* = C\,4^t + D\,t^2 + E\,t + F$$

sea una solución. No se puede suponer que $E = 0$. Haciendo los cálculos tenemos

$$C4^{t+2} + D(t+2)^2 + E(t+2) + F - 5[C4^{t+1} + D(t+1)^2 + E(t+1) + F]$$
$$+ 6(C4^t + Dt^2 + Et + F) = 4^t + t^2 + 3$$

[2] Para mayor detalle véase S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations*, John Wiley, New York, 1961, Sec. 3.4, o F. B. Hildebrand, *Finite-Difference Equations and Simulations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968, Sec. 1.8.

Desarrollando y ordenando tenemos

$$2C4^t + 2Dt^2 + (-6D + 2E)t + (-D - 3E + 2F) = 4^t + t^2 + 3$$

Como las funciones 4^t, t^2, t, 1 son linealmente independientes, eso se puede verificar para todo $t = 0, 1, \ldots$ sólo si $2C = 1$, $2D = 1$, $-6D + 2E = 0$, y $-D - 3E + 2F = 3$ y así $C = 1/2$, $D = 1/2$, $E = 3/2$ y $F = 4$. La solución general de la ecuación es, por tanto,

$$x_t = A\,2^t + B\,3^t + \tfrac{1}{2}4^t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{2}t + 4$$

El método para hallar una solución particular de (20.24) que acabamos de usar en este ejemplo no funcionará a menos que el término independiente de la ecuación sea de la forma que hemos indicado.

Estabilidad

Supongamos que una economía evoluciona según una cierta ecuación en diferencias, o según un sistema de ecuaciones en diferencias. Si se impone el número adecuado de condiciones iniciales, hay una única solución del sistema. Si se cambian una o más de las condiciones iniciales, la solución cambia. Una cuestión importante es ésta: ¿Tendrán influencia en el comportamiento de la solución para valores grandes de t unos cambios pequeños en las condiciones iniciales o, por el contrario, el efecto "se disipará" cuando $t \to \infty$? En este último caso, se tiene un **sistema estable**. Por otra parte, si cambios pequeños de las condiciones iniciales conllevan diferencias significativas en el comportamiento de la solución a largo término, se tiene un **sistema inestable**. Como en general no se pueden determinar exactamente las condiciones iniciales, sino sólo aproximadamente, la estabilidad en el sentido de arriba es un requerimiento mínimo para que un modelo pueda dar lugar a predicciones a largo plazo.

Consideremos en particular la ecuación en diferencias de segundo orden no homogénea

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c_t \qquad (b \neq 0) \tag{$*$}$$

La solución general es de la forma

$$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^* \tag{$**$}$$

La ecuación $(*)$ se llama **globalmente asintóticamente estable**, o más brevemente **estable** si la solución general $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ de la ecuación homogénea asociada tiende a cero cuando $t \to \infty$, para todos los valores de A y B. Entonces, toda solución de la ecuación tiende a la solución particular u_t^*, que es independiente de las condiciones iniciales. Así el efecto de las condiciones iniciales "se disipa" cuando $t \to \infty$.

Si $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$, para todos los valores de A y B, entonces, en particular, $u_t^{(1)} \to 0$ cuando $t \to \infty$ (póngase $A = 1$, $B = 0$), y $u_t^{(2)} \to 0$ cuando $t \to \infty$ (póngase $A = 0$, $B = 1$). Por otra parte, esas dos condiciones son suficientes para que $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ tienda a 0 cuando $t \to \infty$.

Vamos a ver que $u_t^{(1)} \to 0$ y $u_t^{(2)} \to 0$ cuando $t \to \infty$ si y sólo si los módulos de las raíces de $m^2 + am + b = 0$ son menores que 1. (La Sección C.3. estudia una breve introducción a los números complejos, incluyendo la definición de módulo. Nótese que, para un número real, su módulo es igual a su valor absoluto). Supongamos que la ecuación característica tiene raíces complejas $m = \alpha \pm i\beta$. Entonces $\alpha = -a/2$ y $\beta = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$. Así las dos raíces tienen el mismo módulo, que es $|m| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{b}$. Hemos visto anteriormente que las

soluciones $r^t \cos(\theta t)$ y $r^t \operatorname{sen}(\theta t)$ tienden a 0 cuando t tiende a infinito si y sólo si $r = \sqrt{b} < 1$, esto es, $b < 1$.

Si la ecuación característica tiene dos raíces reales $m_1 \neq m_2$, las dos soluciones son $u_t^{(1)} = m_1^t$ y $u_t^{(2)} = m_2^t$. En este caso vemos que $u_t^{(1)} \to 0$ y $u_t^{(2)} \to 0$ cuando $t \to \infty$ si y sólo si $|m_1| < 1$ y $|m_2| < 1$. Finalmente, si la ecuación característica tiene una raíz real doble $m = -a/2$, las dos soluciones linealmente independientes son m^t y $t\,m^t$. De nuevo $|m| < 1$ es la condición necesaria y suficiente para que esas dos soluciones tiendan a 0 cuando $t \to \infty$. En efecto, si $|m| \geq 1$, entonces $t\,m^t$ no tiende a cero cuando $t \to \infty$. Por otra parte, escribamos $|m| = 1/\delta$, con $\delta > 1$. Entonces $|tm^t| = t|m|^t = t/\delta^t \to 0$ cuando $t \to \infty$ por (8.18), Sección 8.3. Así:

> La ecuación $(*)$ es estable si y sólo si las dos raíces de la ecuación característica $m^2+am+b = 0$ tienen módulos estrictamente menores que 1. (20.27)

Para determinar la estabilidad de $(*)$ sólo hay que comprobar los módulos de las raíces características. Se puede dar también un criterio en términos de los coeficientes de $(*)$:

> $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c_t$ es estable $\iff$ $|a| < 1 + b$ y $b < 1$ (20.28)

En efecto, consideremos primero el caso de las raíces complejas. Vimos que $(*)$ es estable si y sólo si $b < 1$. Así las desigualdades de (20.28) son suficientes. En el caso complejo, la gráfica de la parábola $f(m) = m^2 + am + b$ no corta al eje m. En particular, $f(1) = 1 + a + b$ y $f(-1) = 1 - a + b$ deben ser positivos. Pero $1 + a + b > 0$ y $1 - a + b > 0$ son equivalentes a $|a| < 1 + b$, luego las desigualdades son también necesarias. En el Problema 10 se analizará el caso de raíces reales, demostrando (20.28) en él.

Ejemplo 20.12

Comprobar la estabilidad de la ecuación:

$$x_{t+2} - \tfrac{1}{6}x_{t+1} - \tfrac{1}{6}x_t = c_t$$

Solución: En este caso, $a = -1/6$ y $b = -1/6$, luego $|a| = 1/6$ y $1 + b = 5/6$. En virtud de (20.28) la ecuación es estable. Se puede confirmar esta conclusión considerando la solución general de la ecuación homogénea asociada, que es $x_t = A(1/2)^t + B(-1/3)^t$ (véase Ejemplo 20.8, Sección 20.4). Es claro que $x_t \to 0$ independientemente de los valores de A y B, luego la ecuación dada es estable.

Ejemplo 20.13

Comprobar la estabilidad del modelo del Ejemplo 20.7 de la Sección 20.4,

$$Y_{t+2} - a(1 + c)Y_{t+1} + acY_t = b$$

con a y c positivos.

Solución: En virtud de (20.28), se deduce que la ecuación es estable si y sólo si $a(1 + c) < 1 + ac$ y $ac < 1$, esto es, si y sólo si $a < 1$ y $ac < 1$ (véase también el Problema 3).

Problemas

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones en diferencias de los Problemas 1 y 2.

1 (a) $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 8x_t = 0$ (b) $x_{t+2} - 8x_{t+1} + 16x_t = 0$

(c) $x_{t+2} + 2x_{t+1} + 3x_t = 0$ (d) $3x_{t+2} + 2x_t = 4$

2 (a) $x_{t+2} + 2x_{t+1} + x_t = 9 \cdot 2^t$ (b) $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 3 \cdot 5^t + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

3 En el Ejemplo 20.13 estudiamos la ecuación en diferencias

$$Y_{t+2} - a(1+c)Y_{t+1} + acY_t = b$$

Supongamos que $a > 0$, $c > 0$ y $a \neq 1$.

(a) Hallar una solución particular de la ecuación.

(b) Hallar la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada y determinar cuándo tiene dos raíces reales distintas, una raíz real doble y dos raíces complejas.

4 En un modelo de teoría de la localización aparece la siguiente ecuación en diferencias

$$D_{n+2} - 4(ab+1)D_{n+1} + 4a^2b^2D_n = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

donde a y b son constantes y D_n es la función incógnita. Hallar la solución de esta ecuación suponiendo que $1 + 2ab > 0$.

5 Consideremos la ecuación (20.26) y supongamos que $1 + a + b = 0$. Si $a \neq -2$, hallar una constante D tal que Dt satisface (20.26). Si $a = -2$, hallar una constante D tal que Dt^2 satisface (20.26).

6 Consideremos la ecuación (20.21) suponiendo que $\frac{1}{4}a^2 - b = 0$, de tal manera que la ecuación característica tiene una raíz real doble $m = -a/2$. Sea $x_t = u_t(-a/2)^t$; demostrar que x_t satisface (20.21) siempre que u_t satisfaga la ecuación $u_{t+2} - 2u_{t+1} + u_t = 0$. Usar el resultado del Problema 2, Sección 20.4, para hallar x_t.

7 Comprobar la estabilidad de las ecuaciones siguientes usando (20.28).

(a) $x_{t+2} - \frac{1}{3}x_t = \operatorname{sen} t$ (b) $x_{t+2} - x_{t+1} - x_t = 0$

(c) $x_{t+2} - \frac{1}{8}x_{t+1} + \frac{1}{6}x_t = t^2e^t$ (d) $x_{t+2} + 3x_{t+1} - 4x_t = t - 1$

8 (a) Un modelo de B. J. Ball y E. Smolensky se basa en el sistema siguiente:

$$C_t = cY_{t-1}, \qquad K_t = \sigma Y_{t-1}, \qquad Y_t = C_t + K_t - K_{t-1}$$

donde C_t designa consumo, K_t stock de capital, Y_t producto nacional neto y c y σ son constantes positivas. Dar una interpretación económica de las ecuaciones.

(b) Deducir una ecuación en diferencias de segundo orden para Y_t. Hallar condiciones necesarias y suficientes para que la solución de esta ecuación tenga oscilaciones explosivas.

9 (a) Un modelo de J. R. Hicks usa la siguiente ecuación en diferencias:

$$Y_{t+2} - (b+k)Y_{t+1} + kY_t = a(1+g)^t \qquad (t = 0, 1, \ldots)$$

donde a, b, g, k son constantes. Hallar una solución particular Y_t^* de la ecuación.

(b) Dar condiciones para que la ecuación característica tenga dos raíces complejas.

(c) Hallar el factor de crecimiento r de las oscilaciones cuando las condiciones del punto anterior se verifiquen, y determinar cuándo las oscilaciones son amortiguadas.

Problemas avanzados

10 Demostrar (20.28) para el caso en que la ecuación característica tiene soluciones reales estudiando la parábola $f(m) = m^2 + am + b$. (*Indicación:* Considerar los valores de $f(-1)$, $f(1)$, $f'(-1)$ y $f'(1)$.).

11 La ecuación siguiente aparece en un artículo de Akerlof y Stiglitz:

$$K_{t+2} + \left(\frac{\sigma\beta}{\alpha} - 2\right)K_{t+1} + (1 - \sigma\beta)K_t = d$$

donde las constantes α, β y σ son positivas.

(a) Hallar una condición para que las raíces de la ecuación característica sean complejas.

(b) Hallar la condición necesaria y suficiente de estabilidad.

12 (a) Consideremos la ecuación

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots) \tag{$*$}$$

Supongamos que $u_t^{(1)}$ y $u_t^{(2)}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente y sea

$$D_{i+1} = u_{i+1}^{(1)} u_{i+2}^{(2)} - u_{i+2}^{(1)} u_{i+1}^{(2)}$$

Demostrar que la solución general de $(*)$ es

$$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} - u_t^{(1)} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{c_i u_{i+1}^{(2)}}{D_{i+1}} + u_t^{(2)} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{c_i u_{i+1}^{(1)}}{D_{i+1}} \tag{$**$}$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

(b) La siguiente ecuación en diferencias aparece en un modelo estocástico de L. R. Klein y R. S. Preston:

$$p_t + \lambda_1 p_{t-1} + \lambda_2 p_{t-2} = u_t \qquad (t = 2, 3, \ldots)$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes, y u_t es una función dada. Usar $(**)$ para hallar p_t para el caso en que $r_1 \neq r_2$ son las raíces reales de la ecuación característica.

21

Ecuaciones diferenciales

. . . la misión de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias es reconstruir el pasado y predecir el futuro de un proceso a partir de un conocimiento de su ley local de evolución.
—*V. I. Arnold* (1973)

La teoría de las ecuaciones diferenciales es uno de los campos más fascinantes de las matemáticas, y también de enorme importancia práctica. Las ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental en física porque con ellas se pueden describir muchas leyes de la naturaleza. Ésta es la razón por la que Newton y Leibniz comenzaron a estudiar sistemáticamente las ecuaciones diferenciales, ya en el siglo XVII. También los economistas utilizan las ecuaciones diferenciales.

21.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

¿Qué es una ecuación diferencial? Como su nombre indica, es una ecuación. A diferencia de las ecuaciones algebraicas, en una ecuación diferencial ocurre que:

[**1.**] La incógnita es una función (a veces del tiempo), no un número

[**2.**] La ecuación contiene a una o más derivadas de la función

Una ecuación diferencial *ordinaria* es una en la cual la incógnita es una función de una única variable. Un ejemplo de ecuación de este tipo es $dx/dt = f(x,t)$, donde $x = x(t)$ es la función incógnita. En una *ecuación diferencial en derivadas parciales* la incógnita es una función de dos o más variables, y la ecuación contiene a una o más derivadas parciales de la función. Un ejemplo de ecuación de este tipo es $x\,\partial z/\partial x + y\,\partial z/\partial y = kz$ donde la función incógnita es $z = z(x,y)$.[1]

En la primera parte de este capítulo consideramos sólo ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden —esto es, ecuaciones en una función de una variable y su derivada primera. Algunos ejemplos son

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + t \qquad \text{(a)}$$

[1] En (16.19), Sección 16.5, resolvimos esta ecuación diferencial en derivadas parciales; sus soluciones son todas las funciones homogéneas de grado k.

$$\frac{dK(t)}{dt} = \alpha\sigma K(t) + H_0 e^{\mu t} \tag{b}$$

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - \lambda k \tag{c}$$

Más adelante, en los Ejemplos 21.13, Sección 21.5, y Ejercicio 21.17, Sección 21.7, daremos unas interpretaciones económicas interesantes de estas ecuaciones, relativas a la evolución del stock de capital de una economía.

Resolver la ecuación (a) es hallar todas las funciones $x(t)$, tales que para todo valor de t, la derivada $\dot{x}(t)$ de $x(t)$ sea igual a $x(t) + t$. Recuérdese que a veces usamos para la derivada la notación $\dot{x} = dx/dt$, poniendo un punto encima de ella, especialmente cuando la variable independiente es el tiempo. La función incógnita de la ecuación (b) es $K(t)$, mientras que α, σ, H_0 y μ son constantes. En la ecuación (c), $f(k)$ es una función fija pero no especificada, mientras que s y λ son constantes; la función incógnita es $k = k(t)$.

Nota: Usamos a menudo la letra t para designar a la variable independiente. La razón es que en la mayoría de las ecuaciones diferenciales que aparecen en economía las funciones dependen del tiempo. Por supuesto, la teoría es válida cualquiera que sea el significado atribuido a la variable independiente.

Ejemplo 21.1

El tipo más sencillo de ecuación diferencial es el siguiente:

$$\dot{x} = f(t) \tag{$*$}$$

Esta ecuación se puede resolver por integración ordinaria porque

$$\dot{x} = f(t) \iff x = \int f(t)\,dt + C$$

donde C es una constante arbitraria. Por ejemplo, si $f(t) = t^2 - 1$,

$$\dot{x} = t^2 - 1 \iff x = \int (t^2 - 1)\,dt + C = \tfrac{1}{3}t^3 - t + C$$

En general, una ecuación diferencial de primer orden se puede escribir en la forma

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{21.1}$$

donde F es una función dada de dos variables y $x = x(t)$ es la función incógnita. Una **solución de la ecuación diferencial** (21.1) en un intervalo I es una función $x = x(t)$ diferenciable en I que verifica (21.1) para todo $t \in I$. Una **curva integral de la ecuación diferencial** es la gráfica de una solución.

Las ecuaciones (a), (b) y (c) son de la forma (21.1). Por ejemplo, si ponemos $x = x(t)$, entonces (a) se puede escribir $dx/dt = F(t, x)$ donde $F(t, x) = x + t$.

Ejemplo 21.2

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = x + t \tag{$*$}$$

(a) Demostrar que $x = -t - 1$ y $x = e^t - t - 1$ son dos soluciones particulares de la ecuación sobre toda la recta real.

(b) Más generalmente, demostrar que $x = Ce^t - t - 1$ es solución de $(*)$ para todo t, cualquiera que sea la constante C. Para comprender de dónde se saca esta solución, véase la Sección 21.5 y el Problema 1 de ella.

(c) Probar que $x = e^t - 1$ no es solución de $(*)$.

Solución:

(a) Si $x = -t-1$, entonces $\dot{x} = -1$ y $x+t = (-t-1)+t = -1$. Por tanto, $\dot{x} = x+t$ para todo t en este caso. Si $x = e^t-t-1$, entonces $\dot{x} = e^t-1$ y $x+t = (e^t-t-1)+t = e^t-1$. Vemos de nuevo que $(*)$ se verifica para todo t.

(b) Si $x = Ce^t - t - 1$, tenemos que $\dot{x} = Ce^t - 1 = x + t$ para todo t.

(c) Si $x = e^t - 1$, tenemos que $\dot{x} = e^t$ y $x + t = e^t + t - 1$. En este caso, $\dot{x}$ es igual a $x + t$ solamente para $t = 1$, luego $x = e^t - 1$ *no* es una solución de la ecuación $(*)$ en ningún intervalo abierto.

Los Ejemplos 21.1 y 21.2 ponen de relieve el hecho de que una ecuación diferencial tiene en general infinitas soluciones. Vimos en el Ejemplo 21.2 que $x = Ce^t - t - 1$ era solución de $\dot{x} = x + t$ cualquiera que sea la constante C y veremos el recíproco en el Problema 1 de la Sección 21.5, es decir, que toda función que verifica la ecuación es de esa forma.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial se llama la **solución general de la ecuación diferencial** o la **solución completa de la ecuación diferencial** de la ecuación. Una ecuación diferencial de primer orden tiene una solución general que "usualmente" depende de *una* constante.[2] Si exigimos que la solución pase por un punto dado del plano tx, la constante está unívocamente determinada, excepto en algunos casos especiales.

Ejemplo 21.3

Hallar la solución de $\dot{x} = x + t$ que pasa por el punto $(t, x) = (0, 1)$.

Solución: La solución general es $x(t) = Ce^t - t - 1$. Si queremos que pase por $(t, x) = (0, 1)$, debe ser $x(0) = 1$. Por tanto, $1 = Ce^0 - 0 - 1$, lo que implica que $C = 2$. La solución que se busca es, por tanto, $x(t) = 2e^t - t - 1$.

El problema del Ejemplo 21.3 se puede formular de otra manera: hallar la única función $x(t)$ tal que

$$\dot{x}(t) = x(t) + t \qquad \text{y} \qquad x(0) = 1 \tag{$*$}$$

Si $t = 0$ designa al instante inicial, se llama a $x(0) = 1$ una **condición inicial** y a $(*)$ un **problema de valores iniciales**.

Los problemas de valores iniciales surgen naturalmente en muchos modelos económicos. Por ejemplo, supongamos que un modelo de crecimiento económico necesita una ecuación diferencial de primer orden para describir la acumulación de capital a lo largo del tiempo. El stock inicial de capital es normalmente un dato, y así se determina una única solución de la ecuación.

Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Cuando comenzó a desarrollarse la teoría de las ecuaciones diferenciales, los matemáticos trataron de hallar soluciones explícitas de tipos especiales de ecuaciones. Pronto se vio que sólo unas pocas ecuaciones se podían resolver de esta manera. Sin embargo, en muchos casos no es necesario obtener fórmulas explícitas para las soluciones. Basta poner de relieve, en su lugar, propiedades importantes de la solución. La teoría de las ecuaciones diferenciales comprende muchos resultados sobre el comportamiento general de las soluciones. Esto es lo que se llama *teoría cualitativa.* Sus resultados principales son los teoremas de existencia y unicidad, análisis de sensibilidad e investigaciones de estabilidad de equilibrios. Estos temas tienen interés teórico así como una importancia práctica grande.

[2] En el Problema 5 veremos por qué hay que incluir la palabra "usualmente" en este enunciado.

Además de la teoría cualitativa, se ha trabajado enormemente en desarrollar métodos numéricos para el tratamiento aproximado de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Los computadores han jugado un papel crucial en este aspecto, pero no lo tratamos en este libro.

Problemas

1 Demostrar que $x(t) = Ce^{-t} + (1/2)e^t$ es una solución de la ecuación $\dot{x}(t) + x(t) = e^t$ para todo valor de C.

2 Consideremos la ecuación diferencial $t\dot{x} = 2x$.

(a) Demostrar que $x = Ct^2$ es una solución de ella para todo valor de C.

(b) Hallar la curva integral que pasa por $(1, 2)$.

3 Probar que cualquier función $x = x(t)$ que verifica la ecuación $xe^{tx} = C$ es solución de la ecuación diferencial $(1 + tx)\dot{x} = -x^2$. (*Indicación:* Derivar $xe^{tx} = C$ implícitamente con respecto a t.)

4 En cada uno de los casos siguientes, demostrar que toda función $x = x(t)$ que verifica la ecuación de la izquierda es solución de la ecuación diferencial correspondiente a la derecha.

(a) $x^2 + 2\sqrt{1 - t^2} = 0, \qquad \dot{x} = \dfrac{t}{x\sqrt{1 - t^2}}$

(b) $\frac{1}{2}e^{t^2} + e^{-x}(x + 1) + C = 0, \qquad x\dot{x} = te^{t^2 + x}$

(c) $(1 - t)x^2 = t^3, \qquad 2t^3\dot{x} = x(x^2 + 3t^2)$

5 Probar que $x = Ct - C^2$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{x}^2 = t\dot{x} - x$ para todo valor de C. Demostrar posteriormente que no es la solución general porque $x = \frac{1}{4}t^2$ es también solución.

6 Supongamos que la función $x = x(t)$ verifica que $x(0) = 0$ y también la ecuación diferencial $\dot{x} = (1 + x^2)t$, para todo t. Demostrar que $t = 0$ es un mínimo global de $x(t)$, y que la función función $x(t)$ es convexa para todo t. (*Indicación:* No es necesario resolver la ecuación.)

21.2 HALLAR EL CAMINO CONOCIENDO LA DIRECCIÓN

Consideremos de nuevo la ecuación diferencial $\dot{x} = x + t$ del Ejemplo 21.2. Si $x = x(t)$ es una solución, la pendiente de la tangente a la gráfica (o curva integral) en el punto (t, x) es igual a $x + t$. La pendiente en el punto $(t, x) = (0, 0)$ es igual a $0 + 0 = 0$, en el punto $(1, 2)$ es $1 + 2 = 3$, y así sucesivamente. En la Figura 21.1 hemos dibujado unos pequeños segmentos rectilíneos de pendientes $x + t$ sobre cada punto (t, x) del plano. Esto es lo que se llama un **diagrama de direcciones** o un **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $\dot{x} = x + t$. Si una curva integral pasa por uno de esos puntos, será tangente al correspondiente segmento rectilíneo. Podemos, por tanto, dibujar curvas que sigan la dirección de esos segmentos en cada uno de sus puntos, lo que nos permite ver cómo es una curva integral de $\dot{x} = x + t$.

Se puede dibujar un campo de pendientes para toda ecuación diferencial de la forma $\dot{x} = F(t, x)$. En los casos en que es imposible resolver explícitamente la ecuación, un campo de pendientes puede dar una idea del comportamiento de las curvas integrales. Dicho en una frase, el problema de resolver la ecuación diferencial $\dot{x} = F(t, x)$ es: dada la dirección, hallar el camino.

Problemas

1 Dibujar un campo de pendientes para la ecuación diferencial $\dot{x} = x/t$ y representar algunas curvas integrales.

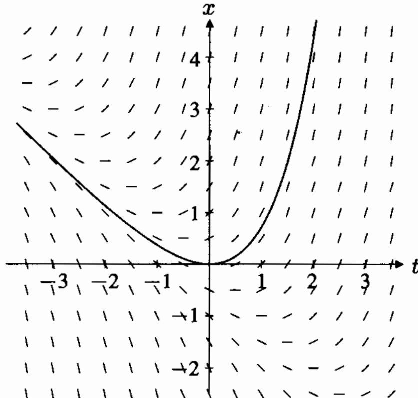


FIGURA 21.1 Un campo de pendientes de $\dot{x} = x + t$. Se representa la curva integral que pasa por (0, 0).

2 Dibujar un campo de pendientes para la ecuación diferencial $\dot{x} = -t/x$ y representar la curva integral que pasa por $(2, 0)$.

21.3 ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES I

Supongamos que se puede escribir $F(t, x)$ como producto $f(t)g(x)$ de dos funciones, una de las cuales depende sólo de t y la otra sólo de x. Entonces la ecuación diferencial $\dot{x} = F(t, x)$ toma la forma

$$\dot{x} = f(t)g(x) \tag{21.2}$$

Decimos en este caso que tenemos una **ecuación diferencial de variables separables**. Por ejemplo, la ecuación $\dot{x} = -2tx^2$ es evidentemente de variables separables.

Es importante aprender a distinguir entre ecuaciones de variables separables y las que no lo son. La razón es que las primeras se pueden resolver por integración directa.

Ejemplo 21.4

Decir cuáles de las ecuaciones diferenciales siguientes son de variables separables:

(**a**) $\dot{x} = t^2 - 1$ (**b**) $\dot{x} = xt + t$ (**c**) $\dot{x} = xt + t^2$

(**d**) $x\dot{x} = e^{x+t}\sqrt{1+t^2}$ (**e**) $\dot{x} = \sqrt[4]{t^2 + x}$ (**f**) $\dot{x} = F(t) + G(x)$

Solución:

(**a**) De variables separables, con $f(t) = t^2 - 1$ y $g(x) = 1$.

(**b**) De variables separables porque $xt + t = t(x + 1)$.

(**c**) No es de variables separables. Es imposible escribir la suma $xt + t^2$ en la forma $f(t)g(x)$. Nótese que $t(x + t)$ no significa variables separables porque ambos factores dependen de t.

(**d**) De variables separables. Como $e^{x+t} = e^x e^t$, podemos escribir $f(t) = e^t\sqrt{1+t^2}$ y $g(x) = e^x/x$.

(**e**) No es de variables separables. Es imposible escribir $\sqrt[4]{t^2 + x}$ en la forma $f(t)g(x)$.

(**f**) No es de variables separables en general. Aunque la ecuación parece bastante sencilla, no se conoce un método para resolverla, excepto numéricamente o en casos particulares, como el que G sea una función lineal de x.

Antes de explicar cómo resolver en general la ecuación $\dot{x} = f(t)g(x)$ de variables separables, observamos que aparece una solución especial si $g(x)$ tiene un cero en $x = a$, esto es, si $g(a) = 0$. En este caso, $x(t) \equiv a$ será una solución de la ecuación porque anula a ambos miembros para todo t.

Supongamos que $x = \varphi(t)$ es una función definida en un intervalo I tal que $g(\varphi(t)) \neq 0$ sobre I. Entonces $x = \varphi(t)$ será una solución de (21.2) si y sólo si

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{g(\varphi(t))} = f(t)$$

para todo $t \in I$. Pero esas dos funciones son iguales sobre I si y sólo si

$$\int \frac{\dot{\varphi}(t)}{g(\varphi(t))}\, dt = \int f(t)\, dt + C \qquad (*)$$

para una constante C. Como $dx = \dot{\varphi}(t)\, dt$ en el lado izquierdo, según la regla de integración por sustitución (véase Sección 11.2), la ecuación $(*)$ es equivalente a

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt + C$$

Así,

$$G(x) = F(t) + C \qquad (**)$$

donde $G(x)$ es una primitiva de $1/g(x)$ y $F(t)$ es una primitiva de $f(t)$. Esto vale para cualquier intervalo I en que $g(x) \neq 0$. Si g es continua en I, no puede cambiar de signo, luego $G'(x) = 1/g(x)$ es estrictamente creciente o decreciente, luego invertible. Así $(**)$ tiene una solución $x = G^{-1}(F(t) + C)$.

Usando notación diferencial, el método anterior se puede escribir como:

Método para resolver ecuaciones diferenciales de variables separables

1. La ecuación (21.2) se puede escribir en la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \qquad (*)$$

2. Separar las variables:

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt$$

3. Integrar:

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt + C$$

4. Calcular las dos integrales si se puede, con lo que obtiene una solución de $(*)$, posiblemente en forma implícita.
5. Además de lo expuesto anteriormente, todo cero $x = a$ de $g(x)$ da lugar a la solución constante $x(t) \equiv a$.

Ejemplo 21.5
Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^6 + 1}$$

Solución: Usamos el método anterior con $f(t) = t^3$ y $g(x) = 1/(x^6 + 1)$. Como $g(x)$ no se anula, no hay soluciones constantes. Procedemos así:

Separación: $$(x^6 + 1)\,dx = t^3\,dt$$

Integración: $$\int (x^6 + 1)\,dx = \int t^3\,dt + C$$

Respuesta: $$\tfrac{1}{7}x^7 + x = \tfrac{1}{4}t^4 + C$$

Las funciones $x = x(t)$ que se buscan son las que verifican la última ecuación para todo t.

Nota: Normalmente decimos que se ha resuelto una ecuación diferencial aun cuando la función incógnita no se pueda expresar explícitamente, como la del Ejemplo 21.5. El punto importante es que hemos encontrado una ecuación que contiene a la función incógnita sin su derivada.

Ejemplo 21.6 (Interés compuesto)
Supongamos que $w = w(t) > 0$ representa el saldo de una cuenta en el instante t y que $r(t)$ es la tasa de interés continuo. Entonces

$$\dot{w} = r(t)w \tag{1}$$

que es una ecuación de variables separables. Separando las variables e integrando se obtiene

$$\int \frac{dw}{w} = \int r(t)\,dt + C_1$$

luego

$$\ln w = R(t) + C_1 \qquad \text{donde} \qquad R(t) = \int r(t)\,dt$$

Así la solución es

$$w(t) = e^{R(t)+C_1} = e^{C_1}e^{R(t)} = Ce^{R(t)} \tag{2}$$

donde se ha puesto $C = e^{C_1}$. Supongamos que el saldo inicial de la cuenta es $w(0)$; entonces (2) implica que $w(0) = Ce^{R(0)}$, luego $C = w(0)e^{-R(0)}$ y (2) se transforma en $w(t) = w(0)e^{R(t)-R(0)}$. Como $R(t) - R(0) = \int_0^t r(s)\,ds$, es

$$w(t) = w(0)e^{\int_0^t r(s)\,ds} = w(0)\exp\int_0^t r(s)\,ds \tag{3}$$

Ésta es la única solución de (1) con saldo inicial $w(0)$.

Ejemplo 21.7
Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -2x^2 t \tag{1}$$

y hallar la curva integral que pasa por $(t, x) = (0, -1/2)$.

Solución: Observamos primero que $x(t) \equiv 0$ es una solución trivial. Como no pasa por $(0, -1/2)$, seguimos la regla:

Separación: $$-\frac{dx}{x^2} = 2t\,dt$$

Integración: $$-\int \frac{dx}{x^2} = \int 2t\,dt + C$$

Respuesta: $$\frac{1}{x} = t^2 + C$$

Así la solución general es

$$x = \frac{1}{t^2 + C} \tag{2}$$

Para hallar la curva integral que pasa por $(0, -1/2)$ debemos hallar el valor de C correspondiente. Como debe ser $x = -1/2$ para $t = 0$, se sigue de (2) que $-1/2 = 1/C$, luego $C = -2$. Así la curva integral que pasa por $(0, -1/2)$ es $x = 1/(t^2 - 2)$.

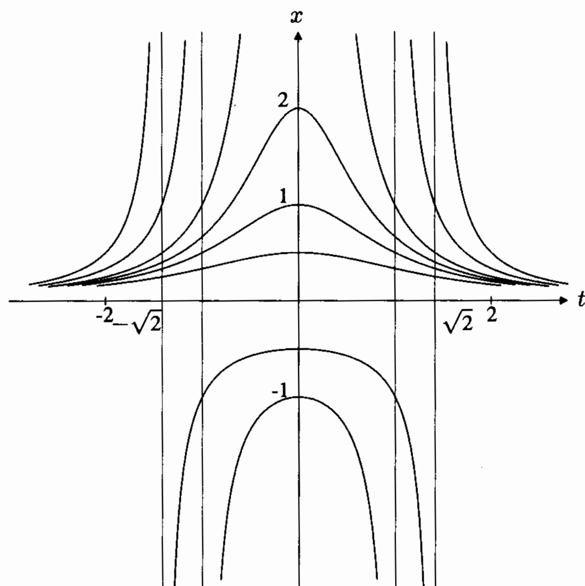


FIGURA 21.2

La Figura 21.2 muestra las curvas integrales de la forma (2) para $C = -2, -1, 0, 1/2, 1, 2$. Se puede deducir el valor C a partir del hecho de que cada curva pasa por el punto $(t, x) = (0, 1/C)$. La constante de integración afecta esencialmente a la forma de la curva y a su posición.

Supongamos que buscamos una solución diferenciable de (1) que sea válida sobre todo el intervalo $[0, \infty)$. Si se exige que $x(0) = 0$, la única solución es $x(t) \equiv 0$. Si $x(0) = x_0 > 0$, la constante C de la ecuación (2) es $C = 1/x_0 > 0$. Por tanto, la solución buscada es

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + 1/x_0} \tag{3}$$

Por ejemplo, si $x_0 = 1/2$, entonces $x(t) = 1/(t^2 + 2)$, cuya gráfica es la de la Figura 21.3. Por otra parte, si $x_0 < 0$, la función de (3) no está definida cuando $t^2 + 1/x_0 = 0$, o sea cuando $t = \pm\sqrt{-1/x_0}$. Por ejemplo, si $x_0 = -1/2$, entonces $x(t) = 1/(t^2 - 2)$, cuya gráfica sobre

$[0,\sqrt{2})$ es la de la Figura 21.4. Cuando $t \to (\sqrt{2})^-$, entonces $x(t) \to -\infty$. Para $t > \sqrt{2}$, la gráfica de $x(t) = 1/(t^2-2)$ se muestra también en la Figura 21.4. Ésta es una solución de (1) en el intervalo $(\sqrt{2},\infty)$. Nótese en particular que, si $x_0 < 0$, entonces no hay una función diferenciable que verifique (1) en el intervalo $[0,\infty)$ entero.

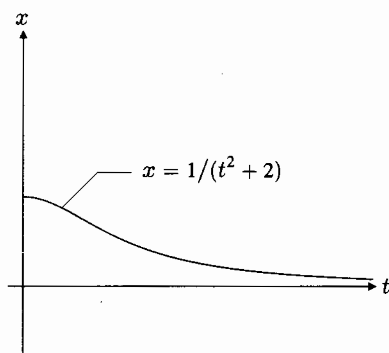


FIGURA 21.3

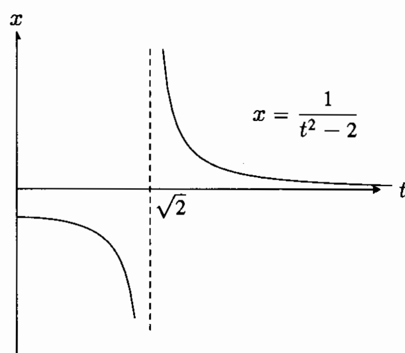


FIGURA 21.4

Problemas

1 Resolver la ecuación $x^2\dot{x} = t+1$. Hallar la curva integral que pasa por $(t,x) = (1,1)$.

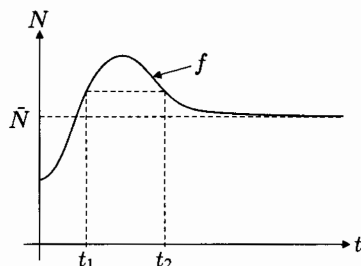
2 Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

(a) $\dot{x} = t^3 - t$ (b) $\dot{x} = te^t - t$ (c) $e^x\dot{x} = t+1$

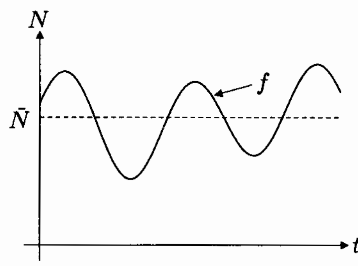
3 Hallar la solución de $\dot{x} = \frac{1}{2}x$. Hallar, en particular, la curva integral que pasa por $(0,1)$.

(a) Hallar la solución de $\dot{x} = ax$. Hallar, en particular, la curva integral que pasa por (t_0, x_0).

4 Explicar por qué las poblaciones biológicas que se desarrollan de la manera representada en las Figuras 21.5(a) o (b) *no se pueden* describir por ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{N}/N = f(N)$ para ninguna función f. ($N(t)$ es el tamaño de la población en el instante t.)



(a)



(b)

FIGURA 21.5

5 Hallar la solución completa de $\dot{x} + a(t)x = 0$. En particular, cuando $a(t) = a + bc^t$ (a, b, c positivos, $c \neq 1$), demostrar que la solución de la ecuación se puede escribir en la forma $x = Cp^tq^{c^t}$, donde p y q son constantes determinadas por a, b y c, mientras que C es una constante arbitraria. (Ésta es la ley de mortalidad de Gompertz–Makeham.)

6 Hallar $x = x(t)$ cuando la elasticidad $\text{El}_t\, x = t\dot{x}/x$ de $x(t)$ con respecto a t verifica las siguientes ecuaciones para todo t:

(a) $\text{El}_t\, x = a$ (b) $\text{El}_t\, x = at + b$ (c) $\text{El}_t\, x = ax + b$

7 Las ecuaciones diferenciales siguientes se han estudiado en economía. Resolverlas.

(a) $\dot{K} = (An_0^\alpha a^b)K^{b-c}e^{(\alpha v+\varepsilon)t}, \quad b - c \neq 1, \alpha v + \varepsilon \neq 0$

(b) $\dot{x} = \dfrac{(\beta - \alpha x)(x - a)}{x}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, a > 0, \alpha a \neq \beta$

(*Indicación:* Para (b): $\dfrac{x}{(\beta - \alpha x)(x-a)} = \dfrac{1}{\beta - \alpha a}\left(\dfrac{\beta}{\beta - \alpha x} + \dfrac{a}{x-a}\right)$.)

Problemas avanzados

8 Las ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{x} = g(x/t)$, donde el miembro de la derecha es una función del cociente x/t se llaman **ecuaciones diferenciales homogéneas**. Probar que, si se escribe $z = x/t$, una ecuación homogénea se convierte en una ecuación de variables separables, donde z es la función incógnita. Usar este método para resolver la ecuación $3tx^2\dot{x} = x^3 + t^3$.

21.4 ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES II

Consideremos otra vez la ecuación de variables separables $\dot{x} = f(t)g(x)$. Se puede hallar una solución de esta ecuación que pase por un punto particular por el método del Ejemplo 21.7: Primero se halla la solución general y luego se calcula el valor adecuado de la constante. De otra forma, podemos razonar como se indica: Supongamos que φ es una función definida en un intervalo $[t_0, t_1]$ tal que $g(\varphi(s)) \neq 0$ en ese intervalo. Entonces φ es una solución de la ecuación en ese intervalo si y sólo si

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\varphi}(s)}{g(\varphi(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$. Hagamos ahora la sustitución $\xi = \varphi(s)$, de donde $d\xi = \dot{\varphi}(s)\, ds$. Escribamos $x_0 = \varphi(t_0)$ y $x = \varphi(t)$. Se tiene el siguiente resultado:

La única solución del problema de valores iniciales

$$\dot{x} = f(t)g(x)\,, \qquad x(t_0) = x_0$$

se calcula resolviendo la ecuación siguiente en x:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds \tag{21.3}$$

Ejemplo 21.8

Hallar la única solución del problema de valores iniciales

$$\dot{x} = -2x^2 t\,, \qquad x(0) = -1/2$$

Solución: Sea $g(\xi) = -\xi^2$, $f(s) = 2s$, $t_0 = 0$ y $x_0 = -1/2$. Entonces (21.3) da

$$\int_{-1/2}^{x} \frac{d\xi}{-\xi^2} = \int_0^t 2s\,ds \qquad ó \qquad \Big|_{-1/2}^{x} \frac{1}{\xi} = \Big|_0^t s^2$$

Por tanto,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(-1/2)} = t^2 \qquad ó \qquad \frac{1}{x} = t^2 - 2$$

Se deduce que

$$x = \frac{1}{t^2 - 2}$$

que es el resultado que se halló en el Ejemplo 21.7.

Ejemplo 21.9

Designemos por $X = X(t)$ al producto nacional, por $K = K(t)$ al stock de capital, y por $L = L(t)$ al número de obreros de un país en el instante t. Supongamos que, para $t \geq 0$,

$$X = AK^{1-\alpha}L^{\alpha} \tag{a}$$
$$\dot{K} = sX \tag{b}$$
$$L = L_0 e^{\lambda t} \tag{c}$$

donde A, α, s, L_0 y λ son constantes positivas con $0 < \alpha < 1$. Deducir de esas ecuaciones una única ecuación diferencial que determine $K = K(t)$, y hallar la solución de esa ecuación cuando $K(0) = K_0 > 0$. Se generalizará este modelo en el Ejemplo 21.17 de la Sección 21.7. En (a) se tiene una función de producción de Cobb–Douglas, (b) dice que la inversión agregada es proporcional a la producción y (c) implica que la plantilla laboral crece exponencialmente.

Solución: Usando de (a) a (c) deducimos la única ecuación diferencial

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt} = sAK^{1-\alpha}L^{\alpha} = sAL_0^{\alpha}e^{\alpha\lambda t}K^{1-\alpha}$$

que es evidentemente de variables separables. Separando las variables se obtiene

$$K^{\alpha-1}\,dK = sAL_0^{\alpha}e^{\alpha\lambda t}\,dt$$

En virtud de (21.3) tenemos

$$\int_{K_0}^{K} \xi^{\alpha-1}\,d\xi = \int_0^t sAL_0^{\alpha}e^{\alpha\lambda\tau}\,d\tau$$

Calculando las integrales se obtiene

$$\Big|_{K_0}^{K} \frac{1}{\alpha}\xi^{\alpha} = \frac{1}{\alpha\lambda}sAL_0^{\alpha}\Big|_0^t e^{\alpha\lambda\tau}$$

ó

$$\frac{1}{\alpha}(K^{\alpha} - K_0^{\alpha}) = \frac{1}{\alpha\lambda}sAL_0^{\alpha}(e^{\alpha\lambda t} - 1)$$

Resolviendo esta ecuación en K se obtiene

$$K = \left[K_0^{\alpha} + (s/\lambda)AL_0^{\alpha}(e^{\alpha\lambda t} - 1)\right]^{1/\alpha}$$

Véase el Problema 5 para realizar un examen más detallado del modelo.

Concluimos esta sección con un ejemplo de "crecimiento logístico" que tiene muchas aplicaciones.

Ejemplo 21.10

Resolver la ecuación diferencial siguiente para $a \neq b$:

$$\frac{dx}{dt} = B(x-a)(x-b) \tag{1}$$

Hallar, en particular, la solución cuando $B = -1$, $a = -1$ y $b = 2$, y dibujar algunas curvas integrales en este caso.

Solución: Obsérvese que $x \equiv a$ y $x \equiv b$ son soluciones triviales de la ecuación. Para hallar las otras soluciones, sepárense las variables como sigue: Primero se pasan todos los términos que tienen x a la izquierda, y los que tienen t a la derecha. Así tenemos las integrales

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx = \int B\,dt$$

El paso siguiente es transformar el integrando de la izquierda. Vemos que

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)$$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\int \frac{1}{x-b}\,dx - \int \frac{1}{x-a}\,dx\right)$$

Salvo por una constante, el miembro de la derecha es igual a

$$\frac{1}{b-a}\big(\ln|x-b| - \ln|x-a|\big) = \frac{1}{b-a}\ln\frac{|x-b|}{|x-a|}$$

Luego, para una constante C_1, la solución es

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{|x-b|}{|x-a|} = Bt + C_1 \qquad \text{ó} \qquad \ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right| = B(b-a)t + C_2$$

con $C_2 = C_1(b-a)$. Así

$$\left|\frac{x-b}{x-a}\right| = e^{B(b-a)t+C_2} = e^{B(b-a)t}e^{C_2} \tag{2}$$

Poniendo $C = \pm e^{C_2}$ tenemos

$$\frac{x-b}{x-a} = \pm e^{C_2}e^{B(b-a)t} = Ce^{B(b-a)t} \tag{3}$$

Resolviendo la última ecuación en x obtenemos finalmente

$$x = \frac{b - aCe^{B(b-a)t}}{1 - Ce^{B(b-a)t}} = a + \frac{b-a}{1 - Ce^{B(b-a)t}} \tag{4}$$

Para $B = -1$, $a = -1$ y $b = 2$, la ecuación diferencial es $\dot{x} = -(x+1)(x-2)$. Nótese que $\dot{x}$ es positiva para x entre -1 y 2. Por tanto, las curvas integrales crecen con t en la banda horizontal entre las rectas $x = -1$ y $x = 2$. De la misma forma, podemos ver directamente de la ecuación diferencial que las curvas integrales decrecen arriba y abajo de esta banda. Además de las soluciones constantes $x = -1$ y $x = 2$ deducimos de (4) que la solución general de la

ecuación $\dot{x} = -(x+1)(x-2)$ es

$$x = -1 + \frac{3}{1 - Ce^{-3t}}$$

En la Figura 21.6 se representan algunas curvas integrales asociadas.

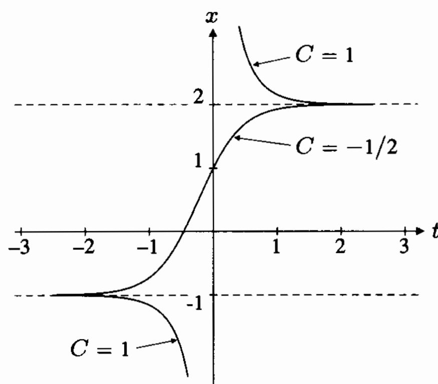


FIGURA 21.6

Nota: Se deduce de (2) que, sobre toda curva integral, $|(x-b)/(x-a)|$ no es cero para ningún t. Como la fracción es una función continua de t, no puede pasar de valores positivos a negativos, luego debe tener signo constante.

Problemas

Hallar las soluciones completas de las ecuaciones diferenciales de los Problemas 1 y 2. Hallar también las curvas integrales que pasan por los puntos que se indican usando (21.3).

1 (a) $t\dot{x} = x(1-t)$, $(t_0, x_0) = (1, 1/e)$

(b) $(1+t^3)\dot{x} = t^2 x$, $(t_0, x_0) = (0, 2)$

2 (a) $x\dot{x} = t$, $(t_0, x_0) = (\sqrt{2}, 1)$

(b) $e^{2t}(dx/dt) - x^2 - 2x - 1 = 0$, $(t_0, x_0) = (0, 0)$

3 Demostrar que la ecuación diferencial logística

$$f'(t) = rf(t)(1 - f(t)/K) \qquad (r,\ K \text{ constantes positivas})$$

es un caso particular de la ecuación (1) del Ejemplo 21.10, y usar (4) para hallar la solución no constante.

Problemas avanzados

4 Referente a un estudio de funciones de producción CES (elasticidad de sustitución constante), Arrow, Chenery, Minhas y Solow trataron la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-\alpha y^{\varrho})}{x} \qquad (\alpha,\ \varrho \text{ constantes; } \varrho \neq 0;\ x > 0;\ y > 0) \tag{1}$$

Usar la identidad

$$\frac{1}{y} + \frac{\alpha y^{\varrho-1}}{1-\alpha y^{\varrho}} = \frac{1}{y(1-\alpha y^{\varrho})}$$

para probar que la solución general de (1) es

$$y = (\beta x^{-\varrho} + \alpha)^{-1/\varrho} \tag{2}$$

Escribamos $x = K/L$, $y = Y/L$ y definamos las nuevas constantes A y a por las relaciones $A = (\alpha+\beta)^{-1/\varrho}$, $a = \beta/(\alpha+\beta)$. Entonces $1-a = \alpha/(\alpha+\beta)$ y $\alpha+\beta = A^{-\varrho}$, luego $\alpha = (1-a)A^{-\varrho}$ y $\beta = aA^{-\varrho}$. De (2) se deduce que $Y = A\left[aK^{-\varrho} + (1-a)L^{-\varrho}\right]^{-1/\varrho}$, que es una forma particular de función de producción CES (véase Ejemplo 16.20 en la Sección 16.4.)

5 (a) Con referencia al Ejemplo 21.9, probar que K/L tiende a $(sA/\lambda)^{1/\alpha}$ cuando $t \to \infty$. Hallar el límite de X/L cuando $t \to \infty$.

(b) Sustituir la ecuación (c) del Ejemplo 21.9 por (c′) $L = b(t+a)^p$, donde a, b y p son constantes positivas. De (a), (b), y (c′), deducir una ecuación diferencial para $K = K(t)$. Resolverla con $K(0) = K_0$ y estudiar el comportamiento de K/L cuando $t \to \infty$.

21.5 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN I

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es la que se puede escribir en la forma

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \tag{21.4}$$

donde a y b son funciones continuas de t en un cierto intervalo, y $x = x(t)$ es la función incógnita. La Ecuación (21.4) se llama "lineal" porque su miembro de la izquierda es una función lineal de x y $\dot{x}$.

Damos unos cuantos ejemplos de ecuaciones lineales de primer orden:

(a) $\dot{x} + x = t$ **(b)** $\dot{x} + 2tx = 4t$ **(c)** $(t^2+1)\dot{x} + e^t x = t\ln t$

Las dos primeras ecuaciones son evidentemente de la forma (21.4). La última se puede poner de esa forma dividiendo cada término por t^2+1, obteniendo

$$\dot{x} + \frac{e^t}{t^2+1}x = \frac{t\ln t}{t^2+1}$$

Un ejemplo interesante de ecuación lineal es la que rige una cuenta a interés continuo con depósitos y reintegros, análoga a la que estudiamos en la Sección 20.2 y Ejemplo 20.6 de la Sección 20.3. Consideremos primero el caso de una tasa constante r de interés. El saldo $w = w(t)$ de la cuenta evoluciona según la ecuación

$$\dot{w} = rw + y(t) - c(t) \tag{21.5}$$

donde $y(t)$ es el flujo de ahorros y $c(t)$ el de reintegros en función del tiempo t. Esto es claramente una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Si no hay depósitos ni reintegros, entonces $y(t) = c(t) = 0$, luego (21.5) se convierte en la ecuación de variables separables $\dot{w} = rw$. La solución general es $w = Ae^{rt}$ ó $e^{-rt}w(t) = A$. Cuando hay términos $y(t)$ y $c(t)$, la ecuación (21.5) no es de variables separables. Para resolverla multiplicamos por el factor de descuento e^{-rt} en tiempo continuo, obteniendo

$$e^{-rt}[\dot{w}(t) - rw(t)] = e^{-rt}[y(t) - c(t)] \tag{1}$$

Nótese que en la ecuación (20.8) de la Sección 20.2 tuvimos que multiplicar por el factor de descuento $(1+r)^{-t}$ en tiempo discreto para resolverla; la situación aquí es análoga. El paso clave es

darse cuenta de que el lado izquierdo es simplemente la derivada de $e^{-rt}w(t)$:

$$\frac{d}{dt}[e^{-rt}w(t)] = e^{-rt}\dot{w}(t) - re^{-rt}w(t)$$

Por tanto (1) se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dt}[e^{-rt}w(t)] = e^{-rt}[y(t) - c(t)] \tag{2}$$

de donde

$$e^{-rt}w(t) = \int e^{-rt}[y(t) - c(t)]\,dt + C$$

Multiplicando por e^{rt} obtenemos la solución

$$w(t) = Ce^{rt} + e^{rt}\int e^{-rt}[y(t) - c(t)]\,dt \tag{3}$$

Se puede escribir esta solución en forma de integral definida, que es más útil. En general, si $\dot{F}(t) = f(t)$, entonces $F(t) = F(0) + \int_0^t f(s)\,ds$. Como $e^{-r\cdot 0} = 1$, se deduce de la ecuación (2) que

$$e^{-rt}w(t) = w(0) + \int_0^t e^{-rs}[y(s) - c(s)]\,ds \tag{4}$$

donde se ha sustituido por s la variable de integración t para evitar confusiones. La ecuación (4) dice que $e^{-rt}w(t)$, el valor actual descontado de los saldos en el instante t, es la suma del saldo inicial $w(0)$ más $\int_0^t e^{-rs}y(s)\,ds$, el VAD del total de depósitos, menos $\int_0^t e^{-rs}c(s)\,ds$, el VAD del total de reintegros.

El factor de descuento e^{-rt} que ha hecho posible resolver (21.5) se llama un **factor integrante**. Si multiplicamos la ecuación (4) por e^{rt} y reordenamos, obtenemos la solución siguiente de (21.5):

$$w(t) = e^{rt}w(0) + e^{rt}\int_0^t e^{-rs}[y(s) - x(s)]\,ds \tag{21.6}$$

En general, cuando la función $a(t)$ de (21.4) es una constante a, la ecuación es equivalente a (21.5). Entonces (3) nos da la siguiente solución en este caso (donde e^{at} es el factor integrante):

$$\dot{x} + ax = b(t) \iff x = e^{-at}\Big[C + \int e^{at}b(t)\,dt\Big] \qquad (C \text{ es constante}) \tag{21.7}$$

En particular, si $b(t)$ es también una constante b, entonces $\int e^{at}b\,dt = (b/a)e^{at}$ y así

$$\dot{x} + ax = b \iff x = Ce^{-at} + \frac{b}{a} \qquad (C \text{ es constante}) \tag{21.8}$$

Si hacemos $C = 0$ en (21.8) obtenemos la solución $x(t) = b/a$. Entonces decimos que $x = b/a$ es un *estado de equilibrio*, o un *estado estacionario* para la ecuación. Obsérvese cómo se

puede obtener esta solución a partir de $\dot{x} + ax = b$, haciendo $\dot{x} = 0$ y despejando x de la ecuación resultante. Si la constante a es positiva, se deduce que la solución $x = Ce^{-at} + b/a$ en (21.8) converge a b/a cuando $t \to \infty$. En este caso, se dice que la ecuación es *estable*, porque toda solución converge a un equilibrio cuando t tiende a infinito.

Ejemplo 21.11

Hallar la solución general de

$$\dot{x} + 2x = 8$$

y averiguar si la ecuación es estable.

Solución: En virtud de (21.8), la solución es

$$x = Ce^{-2t} + 4$$

El estado de equilibrio es $x = 4$, y la ecuación es estable porque $a = 2 > 0$, luego $x \to 4$ cuando $t \to \infty$.

Las ecuaciones diferenciales lineales surgen en muchos modelos económicos. Ponemos dos ejemplos.

Ejemplo 21.12

Sea P el precio de un bien, $D(P) = a - bP$ la demanda y $S(P) = \alpha + \beta P$ la oferta, donde a, b, α y β son constantes positivas (véase Ejemplo 2.19 en la Sección 2.5). Supongamos que el precio $P = P(t)$ varía con el tiempo y que $\dot{P}$ es proporcional al exceso de demanda $D(P) - S(P)$. Así

$$\dot{P} = \lambda[D(P) - S(P)]$$

donde λ es una constante positiva. Sustituyendo en esta ecuación las expresiones de $D(P)$ y $S(P)$ obtenemos $\dot{P} = \lambda(a - bP - \alpha - \beta P)$. Reordenando se tiene

$$\dot{P} + \lambda(b + \beta)P = \lambda(a - \alpha)$$

Según (21.8), la solución es

$$P = Ce^{-\lambda(b+\beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta}$$

Como $\lambda(b + \beta)$ es positiva, P converge, cuando t tiende a infinito, al precio de equilibrio $P^e = (a - \alpha)/(b + \beta)$ para el cual $D(P^e) = S(P^e)$. Así la ecuación es estable.

Ejemplo 21.13

Consideremos el modelo siguiente de crecimiento económico de un país en vías de desarrollo:

$$X(t) = \sigma K(t) \tag{1}$$
$$\dot{K}(t) = \alpha X(t) + H(t) \tag{2}$$
$$N(t) = N_0 e^{\rho t} \tag{3}$$

donde $X(t)$ es la producción total anual, $K(t)$ el stock de capital, $H(t)$ el flujo anual de ayuda exterior y $N(t)$ el tamaño de la población, todo medido en el instante t. La ecuación (1) refleja la hipótesis de que el volumen de producción es proporcional al stock de capital; el factor de proporcionalidad σ se llama la *productividad media del capital*. En (2) decimos que el crecimiento total anual del capital es igual al ahorro interno más la ayuda exterior. Suponemos que el ahorro interno es proporcional a la producción; el factor de proporcionalidad α se llama la *tasa de ahorro*. Finalmente (3) nos dice que la población crece a una tasa proporcional constante igual a ρ.

Deducir de esas ecuaciones una ecuación diferencial para $K(t)$. Supongamos que $H(t) = H_0 e^{\mu t}$; hallar la solución de la ecuación diferencial en este caso, con $K(0) = K_0$ y $\alpha\sigma \neq \mu$. Hallar una expresión de $x(t) = X(t)/N(t)$, que es la producción per cápita.

Solución: Se deduce de (1) y (2) que $K(t)$ debe verificar la ecuación diferencial lineal

$$\dot{K}(t) = \alpha\sigma K(t) + H(t) \tag{4}$$

Poniendo $H(t) = H_0 e^{\mu t}$ y usando (21.7) tenemos

$$K(t) = Ce^{\alpha\sigma t} + e^{\alpha\sigma t}\int e^{-\alpha\sigma t} H_0 e^{\mu t}\,dt = Ce^{\alpha\sigma t} + e^{\alpha\sigma t}\int H_0 e^{(\mu-\alpha\sigma)t}\,dt$$

$$= Ce^{\alpha\sigma t} + e^{\alpha\sigma t}\frac{H_0}{\mu-\alpha\sigma}e^{(\mu-\alpha\sigma)t} = Ce^{\alpha\sigma t} + \frac{H_0}{\mu-\alpha\sigma}e^{\mu t}$$

Para $t = 0$ obtenemos $K(0) = K_0 = C + H_0/(\mu - \alpha\sigma)$, luego $C = K_0 - H_0/(\mu - \alpha\sigma)$. Así la solución es

$$K(t) = \left(K_0 - \frac{H_0}{\mu-\alpha\sigma}\right)e^{\alpha\sigma t} + \frac{H_0}{\mu-\alpha\sigma}e^{\mu t} \tag{5}$$

La producción per cápita es igual a $x(t) = X(t)/N(t) = \sigma K(t)/N_0 e^{\rho t}$. Si usamos la expresión de $K(t)$ en (5), se prueba con un cálculo fácil que

$$x(t) = x(0)e^{(\alpha\sigma-\rho)t} + \left(\frac{\sigma}{\alpha\sigma-\mu}\right)\frac{H_0}{N_0}e^{(\alpha\sigma-\rho)t}\left[1 - e^{(\mu-\alpha\sigma)t}\right] \tag{6}$$

En el Problema 7 se estudia este modelo con más detalle.

Problemas

1 Hallar la solución general de $\dot{x} = x + t$ (véase Ejemplo 21.2).

2 Usar la fórmula (21.8) para hallar la solución general de $\dot{x} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$. Determinar el estado de equilibrio de la ecuación y averiguar si es estable. Dibujar también algunas curvas integrales típicas.

3 En un modelo macroeconómico, $C(t)$, $I(t)$ e $Y(t)$ designan respectivamente consumo, inversión y renta nacional de un país en el instante t. Supongamos que:

$$(1)\quad C(t) + I(t) = Y(t) \qquad (2)\quad I(t) = k\dot{C}(t) \qquad (3)\quad C(t) = aY(t) + b$$

para todo t, donde a, b y k son constantes positivas, $a < 1$.

(a) Deducir la siguiente ecuación diferencial para $Y(t)$:

$$\dot{Y}(t) = \frac{1-a}{ka}Y(t) - \frac{b}{ka}$$

(b) Resolver esta ecuación con $Y(0) = Y_0 > b/(1-a)$, y hallar la función $I(t)$ correspondiente.

(c) Calcular $\lim_{t\to\infty}[Y(t)/I(t)]$.

4 La ecuación (21.8) es de variables separables. Resolverla como tal y demostrar que se obtiene la misma solución que la indicada en (21.8).

5 Hallar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales siguientes y, en cada caso, hallar la curva integral que pasa por $(t, x) = (0, 1)$:

(a) $\dot{x} - 3x = 5$ (b) $3\dot{x} + 2x + 16 = 0$ (c) $\dot{x} + 2x = t^2$

Problemas avanzados

6 Sea $N = N(t)$ el tamaño de una cierta población, $X = X(t)$ la producción total y $x(t) = X(t)/N(t)$ la producción per cápita en el instante t. T. Haavelmo[3] estudió el modelo descrito por las ecuaciones:

$$(1) \quad \frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{X} \qquad (2) \quad X = AN^a$$

donde α, β y a son constantes positivas, $a \neq 1$. Probar que este modelo da origen a una ecuación diferencial de la forma (21.8) en $x = x(t)$. Resolver esta ecuación y hallar las expresiones de $N = N(t)$ y $X = X(t)$. Estudiar los límites de $x(t)$, $N(t)$ y $X(t)$ cuando $t \to \infty$ si $0 < a < 1$.

7 Consideremos el modelo el Ejemplo 21.13.

(a) Poner $H_0 = 0$ y hallar la condición para que la producción per cápita crezca con el tiempo. Una estimación usual de σ es 0,3 para países en vías de desarrollo. Si la población crece al 3% anual ($\rho = 0{,}03$), ¿a cuánto debe ascender la tasa de ahorro α para que $x(t)$ crezca con el tiempo?

(b) Probar que, cuando $H_0 > 0$ y $\mu \neq \alpha\sigma$, la ecuación (6) implica que $x(t)$ es siempre mayor que $x(0)e^{(\alpha\sigma - \rho)t}$. (Considerar separadamente los dos casos $\alpha\sigma - \mu > 0$ y $\alpha\sigma - \mu < 0$). ¿Por qué esto era de esperar?

(c) Supongamos que $\alpha\sigma < \rho$. Hallar una condición necesaria y suficiente para obtener un crecimiento *sostenido* de la producción per cápita. Dar una interpretación económica.

21.6 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN II

En esta sección estudiamos la solución de la ecuación lineal general $\dot{x} + a(t)x = b(t)$ en la que el coeficiente $a(t)$ de x no es constante. Una motivación económica del procedimiento de solución que vamos a dar es la siguiente: Consideremos el interés compuesto del ejemplo de la ecuación (21.5), pero con tasa variable de interés $r(t)$:

$$\dot{w} = r(t)w + y(t) - c(t) \tag{21.9}$$

En el Ejemplo 21.6 de la Sección 21.3 vimos cómo resolver esta ecuación en el caso en que no hay depósitos ni reintegros. En efecto, para alguna constante C,

$$\dot{w} = r(t)w \iff w = Ce^{R(t)}, \quad \text{donde} \quad R(t) = \int r(t)\,dt$$

Esto apunta la idea de usar el factor de descuento variable $e^{-R(t)}$ como un factor integrante adecuado. Vemos que

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-R(t)}w\right] = e^{-R(t)}\dot{w} - \dot{R}(t)e^{-R(t)}w = e^{-R(t)}[\dot{w} - r(t)w]$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-R(t)}w\right] = e^{-R(t)}[y(t) - c(t)] \tag{$*$}$$

Integrando la ecuación $(*)$ obtenemos

$$e^{-R(t)}w(t) = \int e^{-R(t)}[y(t) - c(t)]\,dt + C$$

[3] T. Haavelmo, *A Study in the Theory of Economic Evolution*, North-Holland, Amsterdam, 1964.

y así

$$w(t) = Ce^{R(t)} + e^{R(t)} \int e^{-R(t)}[y(t) - c(t)]\, dt\,, \quad \text{con} \quad R(t) = \int r(t)\, dt \tag{21.10}$$

Esto se parece mucho a la ecuación (3) al principio de la Sección 21.5, excepto que e^{rt} se ha sustituido por $e^{R(t)} = \exp\left[\int r(t)\, dt\right]$.

La solución de la ecuación lineal general (21.4) se puede hallar a partir de (21.10) sustituyendo w por x, $r(t)$ por $-a(t)$ e $y(t) - c(t)$ por $b(t)$. El resultado es

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \iff x = e^{-\int a(t)\, dt}\left[C + \int e^{\int a(t)\, dt} b(t)\, dt\right] \tag{21.11}$$

Ejemplo 21.14

Hallar la solución general de

$$\dot{x} + 2tx = 4t$$

y la curva integral que pasa por $(t, x) = (0, -2)$.

Solución: Vemos que se puede aplicar la fórmula (21.11) con $a(t) = 2t$ y $b(t) = 4t$. Entonces $\int a(t)\, dt = \int 2t\, dt = t^2 + C_1$. Tomamos $C_1 = 0$, de donde $\int a(t)\, dt = t^2$ (tomando otro valor de C_1 daría la misma solución general). Así (21.11) da

$$x = e^{-t^2}(C + \int e^{t^2} 4t\, dt) = Ce^{-t^2} + e^{-t^2} 2e^{t^2} = Ce^{-t^2} + 2$$

Si $x = -2$ para $t = 0$, entonces $-2 = Ce^0 + 2$, luego $C = -4$. Por tanto, la curva integral que pasa por $(0, -2)$, tiene como ecuación $x = 2 - 4e^{-t^2}$.

La solución de la ecuación general lineal dado un valor inicial

Supongamos que se conoce el valor x_0 de $x(t)$ para $t = t_0$. Esto determina la constante C de (21.11). Como es útil tener una fórmula para la solución correspondiente de la ecuación, la damos aquí.

Sea F una función tal que $\dot{F}(t) = b(t)e^{A(t)}$, donde $A(t) = \int a(t)\, dt$ y así $A(t) - A(s) = \int_s^t a(\xi)\, d\xi$. Se puede escribir entonces la solución de (21.11) en la forma

$$x(t) = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)}F(t)$$

Si hacemos $t = t_0$ y despejamos C obtenemos $C = x(t_0)e^{A(t_0)} - F(t_0)$. Por tanto,

$$x(t) = x(t_0)e^{-[A(t) - A(t_0)]} + e^{-A(t)}\, [F(t) - F(t_0)]$$

De la definición de $F(t)$ obtenemos que $F(t) - F(t_0) = \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)}\, ds$. Así

$$e^{-A(t)}\, [F(t) - F(t_0)] = e^{-A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)}\, ds = \int_{t_0}^t b(s)e^{-[A(t) - A(s)]}\, ds$$

Podemos poner $e^{-A(t)}$ bajo el signo integral porque estamos integrando con respecto a s. Finalmente tenemos el resultado siguiente cuando $x(t_0) = x_0$:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \iff x = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\xi)\,d\xi} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{-\int_{s}^{t} a(\xi)\,d\xi}\,ds \tag{21.12}$$

Problemas

1 Hallar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales siguientes:

(a) $t\dot{x} + 2x + t = 0 \quad (t \neq 0)$ (b) $\dot{x} - \frac{1}{t}x = t \quad (t \neq 0)$

(c) $\dot{x} - \frac{t}{t^2 - 1}x = t \quad (t > 1)$ (d) $\dot{x} - \frac{2}{t}x + \frac{2a^2}{t^2} = 0 \quad (t > 0)$

2 Demostrar que la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = 2tx + t(1 + t^2)$$

que pasa por $(t, x) = (0, 0)$ tiene un mínimo local en $t = 0$. Averiguar si existe el límite $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

3 Resolver la ecuación diferencial lineal

$$\dot{p} + \frac{1}{t^2}p = \frac{1}{t^3} \qquad (t > 0)$$

Hallar, en particular, la solución que verifica la condición de que $p(1) = 0$. Comprobar la respuesta por sustitución directa.

4 Demostrar que las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = Q(t)x + R(t)x^n \qquad \textbf{(ecuación de Bernoulli)}$$

se pueden transformar en lineales haciendo la sustitución $z = x^{1-n}$.

5 Resolver los ejemplos siguientes de ecuación de Bernoulli:

(a) $\dot{x} = -tx + t^3x^3$ (b) $t\dot{x} + 2x = tx^2 \quad (t \neq 0)$ (c) $\dot{x} = 4x + 2e^t\sqrt{x} \quad (x > 0)$

6 Un modelo de crecimiento económico conduce a la ecuación de Bernoulli

$$\dot{K} = \alpha A(n_0)^a e^{(av+\varepsilon)t} K^b - \alpha\delta K \qquad (A,\ n_0,\ a,\ b,\ v,\ \alpha,\ \delta,\ \varepsilon \text{ son constantes positivas})$$

Hallar la solución general de la ecuación cuando $av + \varepsilon + \alpha\delta(1 - b) \neq 0$.

7 En general las ecuaciones diferenciales del tipo

$$\dot{x} = P(t) + Q(t)x + R(t)x^2 \qquad \textbf{(ecuación de Riccati)}$$

se pueden resolver únicamente en forma numérica. Pero si conocemos una solución particular $u = u(t)$ de la ecuación, la sustitución $x = u + 1/z$ la convertirá en una lineal con z como función de t. Comprobar esta afirmación y hallar la solución general de

$$t\dot{x} = x - (x - t)^2$$

(*Indicación:* $x = t$ es una solución particular.)

21.7 TEORÍA CUALITATIVA Y ESTABILIDAD

La mayoría de las ecuaciones diferenciales que hemos estudiado hasta ahora tenían soluciones explícitas en términos de funciones. En estos casos suele ser fácil estudiar las propiedades de la solución.

Cuando se trata de describir fenómenos económicos mediante ecuaciones diferenciales se busca, si es posible, un modelo cuyas ecuaciones diferenciales se puedan resolver explícitamente. Como la mayor parte de las ecuaciones diferenciales no gozan de esta propiedad, encontramos muchas aplicaciones cuyas soluciones no se pueden expresar en términos de funciones elementales.

La teoría que hemos expuesto es insuficiente por otra razón. En un modelo diseñado para describir un fenómeno económico especial hay que hacer un cierto número de hipótesis. Lo mejor es que esas hipótesis sean lo más débiles posible sin perder lo esencial del problema. Esto se traduce en que toda ecuación diferencial que aparezca contendrá con seguridad un cierto número de parámetros no especificados.

En consecuencia, cuando se emplea una ecuación diferencial para describir un fenómeno económico especial, la situación típica es la siguiente:

1. Es imposible obtener una solución explícita de la ecuación.
2. La ecuación contiene parámetros, o incluso funciones, sin especificar.

Estas observaciones plantean muchas preguntas. En esta sección discutimos simplemente el problema de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Estabilidad y diagramas de fase

Una de las propiedades más importantes de una ecuación diferencial es si tiene o no *estados de equilibrio*. Éstos corresponden a soluciones de la ecuación que no cambian con el tiempo. En muchas aplicaciones económicas es también muy importante saber si un estado de equilibrio es estable. Esto se puede averiguar normalmente aun sin tener soluciones explícitas de la ecuación. Es estable, por ejemplo, la posición de equilibrio de un péndulo, i.e., colgando inmóvil. Si se le perturba ligeramente se balanceará y gradualmente irá acercándose al estado de reposo, o de equilibrio, de nuevo. Por usar palabras del lenguaje ordinario, en problemas aplicados no es de esperar un equilibrio inestable por la misma razón que una hoja de afeitar no se balancea sobre su filo.

Demos una ojeada más de cerca a la estabilidad de la ecuación

$$\dot{x} = F(x) \tag{21.13}$$

Éste es un caso particular de la ecuación $\dot{x} = F(t, x)$ en el que t no aparece explícitamente en el miembro de la derecha. Por esta razón, la ecuación (21.13) se llama **ecuación diferencial autónoma**.

En general, decimos que un punto a representa un **estado de equilibrio** o un **estado estacionario** para la Ecuación (21.13) si $F(a) = 0$. En este caso, $x(t) = a$ (para todo t) es una solución de la ecuación. Si $x(t_0) = a$ para un valor t_0 de t, entonces $x(t)$ es igual a a para todo t.

Para estudiar las propiedades de estabilidad de los estados de equilibrio para (21.13), es útil estudiar su **diagrama de fase**, que es la gráfica de $\dot{x} = F(x)$ en el plano $x\dot{x}$. La Figura 21.7 contiene un ejemplo. Cualquier solución $x = x(t)$ de (21.13) tiene asociada una derivada $\dot{x} = \dot{x}(t)$. Para todo t, el par $(x(t), \dot{x}(t))$ es un punto de la curva del diagrama de fase*. ¿Qué se puede decir de este punto cuando t crece? Si consideramos un punto de la curva por encima del eje x, entonces $F(x(t)) > 0$ y, por tanto, $\dot{x}(t) = F(x(t)) > 0$, luego $x(t)$ crece cuando t lo hace. *Se deduce de esta observación que el punto $(x(t), \dot{x}(t))$ se mueve de izquierda a derecha en el diagrama si estamos por encima del eje x. Si, por otra parte, el punto del diagrama está por debajo del eje x, entonces $\dot{x}(t) < 0$ y $x(t)$ decrece cuando t lo hace, luego nos movemos de derecha a izquierda.*

En el ejemplo de la Figura 21.7 hemos indicado la dirección del movimiento por flechas. Hay dos estados de equilibrio, a_1 y a_2. Si estamos en uno de esos estados, permaneceremos en él. Sin embargo, hay una diferencia importante entre los dos. Si $x(t)$ está próxima a a_1, pero no coincide

---

* En lenguaje clásico español, la curva $\dot{x} = F(x)$ tiene como ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$ (*N. del T.*)

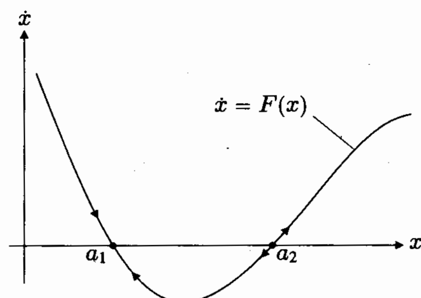


FIGURA 21.7 El punto a_1 es un estado de equilibrio estable, mientras que a_2 es inestable.

con a_1, entonces $x(t)$ se acercará a a_1 cuando t crece. Por otra parte, si $x(t)$ está próxima a a_2, pero no coincide con a_2, entonces $x(t)$ se alejará de a_2 cuando t crece. De hecho, $x(t)$ se alejará a velocidad creciente porque x cambia más rápidamente cuanto más se aleja el punto $(x, \dot{x})$ del eje x (porque $|\dot{x}|$ es mayor). Decimos que a_1 es un **estado de equilibrio estable** mientras que a_2 es un **estado de equilibrio inestable.**

Considérese de nuevo la Figura 21.7. Obsérvese que la curva $\dot{x} = F(x)$ tiene pendiente negativa en el punto estable a_1 mientras que en a_2 la pendiente es positiva. Supongamos que a es un estado de equilibrio para $\dot{x} = F(x)$, o sea que $F(a) = 0$. Si $F'(a) < 0$, entonces $F(x)$ es positiva a la izquierda de $x = a$ y negativa a la derecha. La situación en un entorno de a es entonces semejante a la situación alrededor de a_1 y así a es estable. Por otra parte, si $F'(a) > 0$, entonces la situación en un entorno de a es semejante a la situación alrededor de a_2 en la figura. Así a es inestable. Tenemos el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ F(a) = 0 \text{ y } F'(a) < 0 \implies a \text{ es un estado de equilibrio estable para } \dot{x} = F(x) \\ &\text{(b)}\ F(a) = 0 \text{ y } F'(a) > 0 \implies a \text{ es un estado de equilibrio inestable para } \dot{x} = F(x) \end{aligned} \tag{21.14}$$

Si a es un estado de equilibrio para $\dot{x} = F(x)$ en el cual $F'(a) = 0$, debemos estudiar la situación con más cuidado. El lector debe poder encontrar ejemplos en los cuales a pueda ser estable o inestable.

Ejemplo 21.15

Consideremos la ecuación

$$\dot{x} + ax = b \qquad (a \neq 0)$$

que estudiamos en (21.8), Sección 21.5. Si $F(x) = b - ax$ vemos que la ecuación es un caso particular de (21.13). En este caso hay *un* estado de equilibrio, que es $x = b/a$, en el que $F'(x) = -a$. Según (21.14), el estado de equilibrio $x = b/a$ será estable si $a > 0$, e inestable si $a < 0$. Comparar este resultado con la discusión que seguía a la ecuación (21.8).

Ejemplo 21.16

Generalizamos el Ejemplo 21.12 de la Sección 21.5 suponiendo que el precio $P = P(t)$ verifica la ecuación diferencial

$$\dot{P} = H(D(P) - S(P)) \tag{*}$$

Así $\dot{P}$ es una función del exceso de demanda $D(P) - S(P)$. Suponemos que la función H verifica que $H(0) = 0$ y $H' > 0$, luego H es estrictamente creciente. Si la demanda es mayor que la oferta cuando el precio es P, entonces $D(P) - S(P) > 0$, luego $\dot{P} > 0$ y el precio aumenta. Por otra parte, el precio disminuye cuando $D(P) - S(P) < 0$. La ecuación $(*)$ representa por tanto lo que se llama un *mecanismo de ajuste de precio.*

Sea P^e un precio de equilibrio para $(*)$, o sea $H(D(P^e) - S(P^e)) = 0$ y así $D(P^e) - S(P^e) = 0$. A este precio de equilibrio, la demanda es igual a la oferta. Si se pone $F(P) = H\left(D(P) - S(P)\right)$, entonces $F'(P) = H'\left(D(P) - S(P)\right)\left(D'(P) - S'(P)\right)$. Como $H' > 0$, vemos que $F'(P)$ tiene el mismo signo que $D'(P) - S'(P)$. Usando (21.14), llegamos a la siguiente conclusión: El precio de equilibrio P^e es *estable* si $D'(P^e) - S'(P^e) < 0$. Esta condición se satisface usualmente porque es de esperar que $D' < 0$ y $S' > 0$.

Ejemplo 21.17

El modelo de Solow de teoría "neoclásica" del crecimiento se basa en la ecuación diferencial

$$\dot{k} = sf(k) - \lambda k \tag{21.15}$$

La función incógnita $k = k(t)$ designa el capital por trabajador, s la tasa constante de ahorro, f la función de producción (producto nacional por trabajador como función del capital por trabajador), y λ la tasa proporcional constante de crecimiento del número de trabajadores.

Nótese que (21.15) es una ecuación de variables separables. Pero como f no está especificada no podemos encontrar una solución explícita de la ecuación. Supongamos que el diagrama de fase para la ecuación (21.15) es el de la Figura 21.8.[4] Entonces hay un único estado de equilibrio con $k^* > 0$; está dado por

$$sf(k^*) = \lambda k^* \tag{21.16}$$

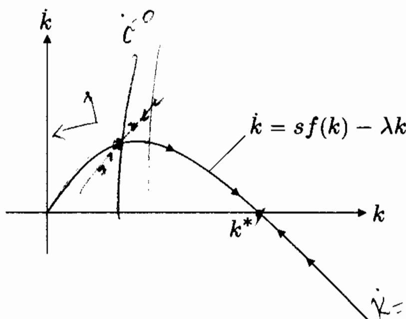


FIGURA 21.8 Diagrama de fase para (21.15), con condiciones apropiadas sobre *f*.

Estudiando la Figura 21.8 vemos que k^* es estable. Se tiene que $k(t) \to k^*$ cuando $t \to \infty$ independientemente del capital inicial por trabajador $k(0)$.

Estudiemos brevemente las condiciones suficientes de existencia y unicidad de equilibrio en el modelo de Solow. Es usual suponer que $f(0) = 0$, así como que $f'(k) > 0$ y $f''(k) < 0$ para todo $k > 0$. También es usual postular las llamadas *condiciones de Inada*,[5] según las cuales $f'(k) \to \infty$ cuando $k \to 0$ y también $f'(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Para ver por qué esas condiciones son suficientes, se pone $G(k) = sf(k) - \lambda k$. Entonces $G'(k) = sf'(k) - \lambda$ y la Ecuación (21.15) se convierte en $\dot{k} = G(k)$. Las hipótesis que se han hecho sobre f implican que $G(0) = 0$, $G'(k) \to \infty$ cuando $k \to 0$, $G'(k) \to -\lambda < 0$ cuando $k \to \infty$, y $G''(k) = sf''(k) < 0$ para todo $k > 0$. Así G tiene un único punto estacionario

---

[4] Para más detalles véase, por ejemplo, H. Y. Wan Jr., *Economic Growth*, Harcourt Brace Jovanovich, 1971.

[5] El nombre viene del economista japonés K.-I. Inada, que las introdujo en teoría del crecimiento.

tamente cóncava. Probar que, en este caso, $sf'(k^*) < \lambda$. Dar una interpretación económica del resultado. Demostrar que $F'_K(K, L) = f'(k)$.

(b) Se define el consumo c por trabajador por $c = (X - \dot{K})/L$. Probar que, cuando $k = k^*$, entonces $c = f(k^*) - \lambda k^*$. Usar esto para probar que, si hay que maximizar el consumo por trabajador en estado estacionario, es necesario que $f'(k^*) = \lambda$, esto es, $\partial F/\partial K = \lambda$. *Así, la productividad marginal del capital $\partial F/\partial K$ debe ser igual a la tasa relativa de crecimiento del número de trabajadores.* (Esto se suele llamar la "regla de oro de la acumulación").

(c) Probar que en el estado estacionario, $\dot{K}/K$ y $\dot{L}/l$ son iguales a λ.

21.8 ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Hasta ahora hemos estudiado en este capítulo ecuaciones diferenciales de primer orden. Muchos modelos económicos se basan en ecuaciones diferenciales en las que aparecen derivadas segundas o de orden superior. Por ejemplo, en un área importante de la optimización dinámica llamada cálculo de variaciones, la condición de primer orden para óptimo necesita de una ecuación diferencial de segundo orden. Esta sección y la próxima introducen brevemente las ecuaciones de segundo orden.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden se pueden escribir normalmente en la forma

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) \tag{21.17}$$

donde F es una función dada, $x = x(t)$ es la función incógnita y $\dot{x} = dx/dt$. La característica nueva es la presencia de $\ddot{x} = d^2x/dt^2$. El tipo más sencillo de ecuación de segundo orden es el del ejemplo siguiente.

Ejemplo 21.18

Hallar la solución más general de

$$\ddot{x} = k \qquad (k \text{ constante}) \tag{$*$}$$

Solución: Como $\ddot{x} = (d/dt)\dot{x}$, por integración directa se deduce que $(*)$ es equivalente a la ecuación $\dot{x} = kt + A$, para una cierta constante A. Integrando otra vez vemos que $(*)$ se satisface si y sólo si

$$x = \tfrac{1}{2}kt^2 + At + B \qquad (A \text{ y } B \text{ son constantes arbitrarias}) \tag{$*$}$$

Geométricamente $(*)$ representa una colección de parábolas en el plano tx de ejes paralelos al eje x.

Ejemplo 21.19

¿Cómo se hallarían las soluciones de

$$\ddot{x} = G(t, \dot{x}) \tag{21.18}$$

donde G es una función dada? Resolver en particular la ecuación $\ddot{x} = \dot{x} + t$.

Solución: Nótese que (21.18) es independiente de x. Haciendo el cambio de variable $u = \dot{x}$, (21.18) se convierte en la ecuación de primer orden $\dot{u} = G(t, u)$. Sea $u(t)$ la solución general de esta ecuación de primer orden. Integrando $\dot{x}(t) = u(t)$ se obtendrá la solución general $x(t)$ de (21.18).

Sustituyendo $u = \dot{x}$ en la ecuación $\ddot{x} = \dot{x} + t$ se obtiene $\dot{u} = u + t$. Esta ecuación de primer orden tiene la solución general $u = Ae^t - t - 1$, donde A es una constante (ver Ejemplo 21.2). Por tanto, $\dot{x} = Ae^t - t - 1$. Integrando esta ecuación tenemos que $x = \int (Ae^t - t - 1)\, dt = Ae^t - \frac{1}{2}t^2 - t + B$, donde B es otra constante arbitraria.

La resolución de la Ecuación (21.17) se hace más difícil si el miembro de la derecha contiene a la función incógnita y a su derivada. De hecho, sólo en casos muy especiales se tienen soluciones explícitas. Generalmente hay que acudir a soluciones numéricas para las condiciones iniciales dadas.

A pesar de todo, ocurre que se puede demostrar la *existencia* de una solución para casi todas las ecuaciones que aparecen en las aplicaciones. Según el *teorema de existencia y unicidad*, si F, F'_x y $F'_{\dot{x}}$ son continuas como funciones de las tres variables $(t, x, \dot{x})$ en un dominio abierto S de $\mathbb{R}^3$ entonces, para cada punto (t_0, x_0, a) de S, existe una única función que verifica la ecuación $\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$ cuya curva integral pasa por el punto (t_0, x_0) y cuya derivada toma el valor a en ese punto. De hecho, la solución general de la ecuación dependerá de dos constantes arbitrarias, como ocurrió en los ejemplos 21.18 y 21.19; esto es,

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) \iff x = x(t;\ A, B)$$

Las constantes A y B quedan determinadas por las relaciones $x(t_0, A, B) = x_0$ y $\dot{x}(t_0, A, B) = a$.

Ejemplo 21.20

Resolver el problema

$$\ddot{x} = \dot{x} + t, \quad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2$$

Solución: Según el Ejemplo 21.19, la solución general de la ecuación de segundo orden es $x = Ae^t - \frac{1}{2}t^2 - t + B$. Poniendo $x(0) = 1$ se obtiene $1 = A + B$. Además, $\dot{x} = Ae^t - t - 1$, luego $\dot{x}(0) = 2$ implica que $2 = A - 1$. Así, $A = 3$, luego $B = -2$, y la única solución del problema es $x = 3e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 2$.

Ecuaciones lineales

La ecuación diferencial lineal general de segundo orden es

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \tag{21.19}$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $f(t)$ son funciones continuas de t. A diferencia de las ecuaciones lineales de primer orden no hay solución explícita de (21.19) en el caso general. Sin embargo, se puede decir algo significativo sobre la estructura de la solución general.

Comencemos con la **ecuación lineal homogénea**

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \tag{21.20}$$

que se obtiene sustituyendo $f(t)$ por 0 en (21.19). Afirmamos que, si $u_1 = u_1(t)$ y $u_2 = u_2(t)$ satisfacen (21.20), entonces $x = Au_1 + Bu_2$ también satisface (21.20) cualesquiera que sean las constantes A y B. En efecto, derivando directamente se obtiene $\dot{x} = A\dot{u}_1 + B\dot{u}_2$ y $\ddot{x} = A\ddot{u}_1 + B\ddot{u}_2$. Llevando estas expresiones de $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ al miembro de la izquierda de (21.20) se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x &= A\ddot{u}_1 + B\ddot{u}_2 + a(t)(A\dot{u}_1 + B\dot{u}_2) + b(t)(Au_1 + Bu_2)\\ &= A[\ddot{u}_1 + a(t)\dot{u}_1 + b(t)u_1] + B[\ddot{u}_2 + a(t)\dot{u}_2 + b(t)u_2]\end{aligned}$$

Como u_1 y u_2 verifican (21.20), esta última expresión es 0. Así hemos demostrado que la función $x = Au_1 + Bu_2$ verifica (21.20) para todos los valores de las constantes A y B.

Supongamos que hemos hallado dos soluciones u_1 y u_2 de (21.20). Entonces $x = Au_1 + Bu_2$ verifica (21.20) para todo valor de A y B. ¿Es ésta la solución general? La respuesta es negativa. Para estar seguros de que $Au_1 + Bu_2$ es la solución general de (21.20) debemos exigir que u_1 y u_2 no sean múltiplos constantes la una de la otra, es decir, que no sean proporcionales. La demostración del resultado siguiente se puede consultar en cualquier libro de ecuaciones diferenciales:

La ecuación diferencial homogénea

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$$

tiene la **solución general** (21.21)

$$x = Au_1(t) + Bu_2(t)$$

donde $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son soluciones no proporcionales, y A, B son constantes arbitrarias.

Ejemplo 21.21

Hallar las soluciones generales de las dos ecuaciones homogéneas (**a**) $\ddot{x} = x$ y (**b**) $\ddot{x} = -x$.

Solución: (**a**) El problema es hallar las funciones que no cambian cuando se las deriva dos veces. Recuérdese que $x = e^t$ goza de esta propiedad, así como $x = 2e^t$. Sin embargo, esas dos funciones son proporcionales. Por tanto necesitamos hallar otra función que verifique esa propiedad. Después de pensar un poco, se puede ocurrir probar con $x = e^{-t}$. En efecto, $\dot{x} = -e^{-t}$, y así $\ddot{x} = e^{-t}$. Como e^t y e^{-t} no son proporcionales, tenemos

$$\ddot{x} = x \iff x = Ae^t + Be^{-t} \quad (A \text{ y } B \text{ son constantes arbitrarias}) \tag{21.22}$$

(**b**) Esta ecuación es un poco más complicada porque hay que saber las reglas de derivación de funciones trigonométricas para hallar la solución (véase Sección C.2). En efecto, si $u_1 = \operatorname{sen} t$ y $u_2 = \cos t$, entonces $\dot{u}_1 = \cos t$ y $\dot{u}_2 = -\operatorname{sen} t$. Derivando de nuevo se obtiene $\ddot{u}_1 = -\operatorname{sen} t = -u_1$ y $\ddot{u}_2 = -\cos t = -u_2$. Como $u_1 = \operatorname{sen} t$ y $u_2 = \cos t$ no son múltiplos constantes el uno del otro, deducimos que

$$\ddot{x} = -x \iff x = A \operatorname{sen} t + B \cos t \quad (A \text{ y } B \text{ son constantes arbitrarias}) \tag{21.23}$$

La ecuación (21.19) se llama *no homogénea*. La ecuación homogénea asociada es (21.20). Supongamos que hallamos una **solución particular** $u^* = u^*(t)$ de (21.19). Si $x(t)$ es una solución arbitraria de (21.19), es fácil ver que la diferencia $x(t) - u^*(t)$ es una solución de la ecuación (21.20). En efecto, si $v(t) = x(t) - u^*(t)$, entonces $\dot{v}(t) = \dot{x}(t) - \dot{u}^*(t)$ y $\ddot{v}(t) = \ddot{x}(t) - \ddot{u}^*(t)$, luego

$$\begin{aligned}\ddot{v}(t) + a(t)\dot{v}(t) + b(t)v(t) &= \ddot{x}(t) - \ddot{u}^*(t) + a(t)[\dot{x}(t) - \dot{u}^*(t)] + b(t)[x(t) - u^*(t)] \\ &= \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) - [\ddot{u}^*(t) + a(t)\dot{u}^*(t) + b(t)u^*(t)] \\ &= f(t) - f(t) = 0\end{aligned}$$

Así, $x(t) - u^*(t)$ es una solución de la ecuación homogénea. Según (21.21) tenemos $x(t) - u^*(t) = Au_1(t) + Bu_2(t)$, donde $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son dos soluciones no proporcionales de (21.20) y A, B son constantes arbitrarias. Por tanto:

La ecuación diferencial no homogénea

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

tiene la **solución general** (21.24)

$$x = Au_1(t) + Bu_2(t) + u^*(t)$$

donde $Au_1(t) + Bu_2(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada y $u^*(t)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Ejemplo 21.22

Hallar la solución general de

$$\ddot{x} + x = e^t \qquad (1)$$

(*Indicación:* Comprobar primero que hay una solución particular de la forma $u^* = Ae^t$.)

Solución: Se trata de una ecuación de la forma (21.19) con $a(t) = 0$, $b(t) = 1$ y $f(t) = e^t$. La ecuación homogénea asociada se resolvió en el Ejemplo 21.21(**b**).

Si $u^* = Ae^t$, entonces $\dot{u}^* = Ae^t$ y $\ddot{u}^* = Ae^t$, luego llevando estos valores a (1) obtenemos $Ae^t + Ae^t = e^t$. Esta igualdad se verifica para todo t solamente si $A = 1/2$. Así, $u^* = \frac{1}{2}e^t$ es una solución particular y la solución general es

$$x = A \operatorname{sen} t + B \cos t + \tfrac{1}{2}e^t \qquad (2)$$

No hay un método general para hallar las dos soluciones de (21.20) que necesitamos para calcular una solución general de la ecuación. Sin embargo, en el caso particular en que los coeficientes $a(t)$ y $b(t)$ sean constantes, es siempre posible hallar las dos soluciones que se necesitan. En la próxima sección se explica cómo hacerlo en una amplia variedad de ejemplos.

Problemas

1 Razonando como en el ejemplo 21.18, hallar las soluciones generales de las ecuaciones siguientes:

(a) $\ddot{x} = t$ (b) $\ddot{x} = \operatorname{sen} t$ (c) $\ddot{x} = e^t + t^2$

2 (a) Demostrar que $u_1 = e^t$ y $u_2 = te^t$ verifican $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$. Probar que u_1 y u_2 no son proporcionales y, por tanto, hallar la solución general de la ecuación.

(b) Hallar la solución general de $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 3$.

3 (a) Probar que $u_1 = e^{2t}$ y $u_2 = e^{-3t}$ son soluciones de $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 0$. Hallar la solución general.

(b) Hallar la solución general de $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 6t$. (*Indicación:* La ecuación tiene una solución particular de la forma $Ct + D$.)

4 Un estudio de la explotación óptima de un recurso natural utiliza la ecuación

$$\ddot{x} - \frac{2-\alpha}{1-\alpha} a\,\dot{x} + \frac{a^2}{1-\alpha}\,x = 0 \qquad (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,\ a \neq 0)$$

Probar que $u_1 = e^{at}$ y $u_2 = e^{at/(1-\alpha)}$ son soluciones. ¿Cuál es la solución general?

5 Sean $a \neq b$ dos números reales. Probar que la ecuación diferencial

$$(t+a)(t+b)\ddot{x} + 2(2t+a+b)\dot{x} + 2x = 0$$

tiene dos soluciones de la forma $(t+k)^{-1}$ para elecciones apropiadas de k. Hallar la solución general de la ecuación. (*Indicación:* Sea $x = (t+k)^{-1}$; hallar k para que la función satisfaga la ecuación diferencial.)

21.9 ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos la ecuación *homogénea*

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \qquad (21.25)$$

donde a y b son constantes arbitrarias y $x = x(t)$ es la función incógnita. En virtud de (21.21), el hallar la solución general de (21.25) exige tener dos soluciones $u_1(t)$, $u_2(t)$ no proporcionales. Como los coeficientes en (21.25) son constantes, parece una buena idea ensayar soluciones x con la propiedad de que x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ sean múltiplos constantes los unos de los otros.

La función exponencial $x = e^{rt}$ tiene esa propiedad porque $\dot{x} = re^{rt} = rx$ y $\ddot{x} = r^2 e^{rt} = r^2 x$. Así se trata de hallar la constante r para que $x = e^{rt}$ verifique (21.25). Esto exige que $r^2 e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = 0$. Simplificando por el factor positivo e^{rt} tenemos que $x = e^{rt}$ verifica (21.25) si y sólo si r satisface la ecuación

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{21.26}$$

Ésta se llama la **ecuación característica de la ecuación diferencial** (21.25). Es una ecuación de segundo grado cuyas raíces son reales si y sólo si $\frac{1}{4}a^2 - b \geq 0$. Resolviéndola se obtienen en este caso las dos **raíces características**

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}\,, \qquad r_2 = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b} \tag{21.27}$$

En general hay tres casos distintos que considerar y están resumidos en el cuadro siguiente:

La **solución general** de

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

es la siguiente:

(**a**) Si $\frac{1}{4}a^2 - b > 0$, esto es, si la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas,

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad \text{donde} \quad r_{1,2} = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}$$

(**b**) Si $\frac{1}{4}a^2 - b = 0$, esto es, si la ecuación característica tiene una raíz real doble,

$$x = (A + Bt)e^{rt}, \quad \text{donde} \quad r = -\tfrac{1}{2}a$$

(**c**) Si $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$, esto es, si la ecuación característica no tiene raíces reales,

$$x = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + B), \text{ donde } \alpha = -\tfrac{1}{2}a,\ \beta = \sqrt{b - \tfrac{1}{4}a^2}$$

(21.28)

El caso $\frac{1}{4}a^2 - b > 0$ es el más sencillo porque da raíces reales y distintas r_1 y r_2. Las funciones $e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$ satisfacen (21.25). Estas funciones no son proporcionales cuando $r_1 \neq r_2$, luego la solución general es $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ en este caso.

Si $\frac{1}{4}a^2 - b = 0$, entonces $r = -\frac{1}{2}a$ es una raíz doble de (21.26) y $u_1 = e^{rt}$ verifica (21.25). El Problema 10 estudia este caso. Por el momento nótese que $u_2 = te^{rt}$ verifica también (21.25). Esto es porque $\dot{u}_2 = e^{rt} + tre^{rt}$ y $\ddot{u}_2 = re^{rt} + re^{rt} + tr^2 e^{rt}$. Llevando estas derivadas al lado izquierdo de (21.25) se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{u}_2 + a\dot{u}_2 + bu_2 &= re^{rt} + re^{rt} + tr^2 e^{rt} + ae^{rt} + atre^{rt} + bte^{rt} \\ &= e^{rt}(a + 2r) + te^{rt}(r^2 + ar + b)\end{aligned}$$

después de simplificar. Pero la última expresión es 0 porque $r = -\frac{1}{2}a$ y $r^2 + ar + b = 0$. Así, e^{rt} y te^{rt} son soluciones de la ecuación (21.25). Estas dos soluciones no son proporcionales, luego la solución general es $Ae^{rt} + Bte^{rt}$ en este caso.

Si $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$, la ecuación característica no tiene raíces reales. Un ejemplo es la ecuación $\ddot{x} + x = 0$ del Ejemplo 21.21(**b**); allí $a = 0$ y $b = 1$, luego $\frac{1}{4}a^2 - b = -1$. La solución general era $A \operatorname{sen} t + B \cos t$. No debe, por tanto, sorprendernos que, cuando $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$, la solución de (21.25) necesite funciones trigonométricas.

En efecto, si $x = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + B)$ con A y B constantes arbitrarias, la regla del producto implica que $\dot{x} = A\alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t + B) + Ae^{\alpha t}[-\beta \operatorname{sen}(\beta t + B)]$. Así

$$\dot{x} = Ae^{\alpha t}[\alpha \cos(\beta t + B) - \beta \operatorname{sen}(\beta t + B)]$$
$$\ddot{x} = Ae^{\alpha t}[(\alpha^2 - \beta^2)\cos(\beta t + B) - 2\alpha\beta \operatorname{sen}(\beta t + B)]$$

Entonces

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = Ae^{\alpha t}[(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha a + b)\cos(\beta t + B) - (2\alpha + a)\beta \operatorname{sen}(\beta t + B)]$$

Sustituyendo los valores de α y β del caso (**c**) de (21.28), vemos que $2\alpha + a = 0$ y también $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha a + b = \frac{1}{4}a^2 - (b - \frac{1}{4}a^2) - \frac{1}{2}a^2 + b = 0$, luego $x = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + B)$ verifica (21.25).

También para este último caso hemos hallado una función que depende de dos constantes arbitrarias A y B, y verifica la ecuación (21.25) para todo t. En el Problema 7 se trata de hallar otra expresión de esta solución que haga aún más evidente que hemos hallado la solución general de (21.25).

Nota: Véase la Sección C.3 para un repaso de números complejos. Supongamos que $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$. Entonces la ecuación característica $r^2 + ar + b = 0$ tiene dos raíces complejas $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, donde α y β están dadas en el caso (**c**) de (21.28). Las dos funciones exponenciales $e^{r_1 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$ y $e^{r_2 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t)$ verifican(21.25); luego lo mismo ocurrirá con cualquier combinación lineal de estas funciones. En particular, $(e^{r_1 t} + e^{r_2 t})/2 = e^{\alpha t}\cos\beta t$ y $(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})/2i = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$ verifican (21.25) y no son proporcionales. Así, la solución general es $x = Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$.

Ejemplo 21.23

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones siguientes:

(**a**) $\ddot{x} - 3x = 0$ (**b**) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ (**c**) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 13x = 0$

Solución: (**a**) La ecuación característica $r^2 - 3 = 0$ tiene dos raíces reales $r_1 = -\sqrt{3}$ y $r_2 = \sqrt{3}$. La solución general es

$$x = Ae^{-\sqrt{3}t} + Be^{\sqrt{3}t}$$

(**b**) La ecuación característica $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$ tiene la raíz doble $r = 2$. Por tanto, la solución general es

$$x = (A + Bt)e^{2t}$$

(**c**) La ecuación característica $r^2 - 6r + 13 = 0$ no tiene raíces reales. En virtud del caso (**c**) de (21.28), $\alpha = -a/2 = -(-6)/2 = 3$ y $\beta = \sqrt{13 - \frac{1}{4}(-6)^2} = 2$, luego la solución general es

$$x = Ae^{3t}\cos(2t + B)$$

La ecuación no homogénea

Consideremos ahora la ecuación *no homogénea*

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \tag{21.29}$$

donde $f(t)$ es una función continua arbitraria. Según (21.24) en la sección anterior, la solución general de (21.29) viene dada por

$$x = x(t) = Au_1(t) + Bu_2(t) + u^*(t) \tag{21.30}$$

Hemos explicado cómo hallar los términos $Au_1(t) + Bu_2(t)$ resolviendo la ecuación homogénea asociada. ¿Cómo hallamos una solución particular $u^* = u^*(t)$ de (21.29)? Está el *método de los coeficientes indeterminados* que funciona en muchos casos.

Si $b = 0$ en (21.29), falta el término en x y la sustitución $u = \dot{x}$ transforma la ecuación en una lineal de primer orden (ver Ejemplo 21.19). Suponemos, por tanto, que $b \neq 0$. Consideremos las siguientes posibilidades de elección de $f(t)$:

(1.) $f(t) = A$ **(constante)**

En este caso la ecuación (21.29) debe tener una solución constante $u^* = c$. Entonces $\dot{u}^* = \ddot{u}^* = 0$, luego la ecuación se reduce a $bc = A$. Así, $c = A/b$. Por tanto, para $b \neq 0$:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = A \text{ tiene la solución particular } u^* = A/b \tag{21.31}$$

(2.) $f(x)$ **es un polinomio**

Supongamos que $f(t)$ es un polinomio de grado n. Una conjetura razonable es que (21.29) tiene una solución particular que es también un polinomio de grado n, de la forma $u^* = A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0$. Los coeficientes $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$ se calculan imponiendo que u^* verifique (21.29) e igualando los coeficientes de potencias iguales de t.

Ejemplo 21.24

Hallar una solución particular de

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^2 + 2 \tag{$*$}$$

Solución: El miembro de la derecha es un polinomio de grado 2. Así ponemos $u^* = At^2 + Bt + C$ y tratamos de calcular A, B, C para que haya una solución. Tenemos que $\dot{u}^* = 2At + B$, luego $\ddot{u}^* = 2A$. Llevando a $(*)$ las expresiones de u^*, $\dot{u}^*$ y $\ddot{u}^*$ se obtiene la ecuación $2A - 4(2At + B) + 4(At^2 + Bt + C) = t^2 + 2$. Reduciendo términos semejantes a la izquierda tenemos $4At^2 + (4B - 8A)t + (2A - 4B + 4C) = t^2 + 2$. Igualando los coeficientes de las mismas potencias de t tenemos $4A = 1$, $4B - 8A = 0$ y $2A - 4B + 4C = 2$. Resolviendo esas tres ecuaciones obtenemos $A = 1/4$, $B = 1/2$ y $C = 7/8$. Por tanto, $u^* = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{8}$ es una solución particular de la ecuación $(*)$. Utilizando (21.24) y el resultado el Ejemplo 21.23(**b**), vemos que la solución general de $(*)$ es

$$x = (A + Bt)e^{2t} + \tfrac{1}{4}t^2 + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{7}{8}$$

Nótese que el miembro de la derecha de $(*)$ es $t^2 + 2$, sin término en t. Sin embargo, ninguna función de la forma $Ct^2 + D$ verificará la ecuación. Toda solución debe incluir el término $\frac{1}{2}t$.

(**3.**) $f(t) = pe^{qt}$

Parece natural tomar una solución particular de la forma $u^* = Ae^{qt}$. Entonces $\dot{u}^* = Aqe^{qt}$, $\ddot{u}^* = Aq^2e^{qt}$, y la sustitución en (21.29) da $Ae^{qt}(q^2+aq+b) = pe^{qt}$. Por tanto, si $q^2+aq+b \neq 0$, se deduce que $A = p/(q^2 + aq + b)$ y así una solución particular es

$$u^* = \frac{p}{q^2 + aq + b}e^{qt}$$

La condición $q^2 + aq + b \neq 0$ significa que q no es raíz de la ecuación característica (21.26), esto es, que e^{qt} no es solución de (21.25). Si q es una raíz simple de $q^2 + aq + b = 0$, buscamos una constante B tal que Bte^{qt} verifique (21.29). Si q es una raíz doble, entonces Ct^2e^{qt} verifica (21.29) para una cierta constante C.

(**IV**) $f(t) = p \operatorname{sen} rt + q \cos rt$

También aquí funciona el método de los coeficientes indeterminados. Sea $u^* = A \operatorname{sen} rt + B \cos rt$; se trata de calcular las constantes A y B de tal manera que los coeficientes de $\operatorname{sen} rt$ y $\cos rt$ sean iguales. Si $f(t)$ es solución de la ecuación homogénea, hay que probar con $u^* = At \operatorname{sen} rt + Bt \cos rt$ para determinar una solución particular.

Ejemplo 21.25

Hallar una solución particular de

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 2\cos 2t$$

Solución: En este caso es natural probar una solución particular de la forma $u = A\cos 2t$. Nótese, sin embargo, que el término $-4\dot{u}$ nos da un término en $\operatorname{sen} 2t$ a la izquierda que no tiene posibilidad de cancelación. Probamos, por tanto, con $u^* = A \operatorname{sen} 2t + B\cos 2t$. Tenemos $\dot{u}^* = 2A\cos 2t - 2B \operatorname{sen} 2t$ y $\ddot{u}^* = -4A \operatorname{sen} 2t - 4B\cos 2t$. Llevando estas expresiones a la ecuación y reordenando, obtenemos $8B \operatorname{sen} 2t - 8A\cos 2t = 2\cos 2t$. Así, haciendo $B = 0$ y $A = -1/4$, vemos que la ecuación dada se verifica para todo t. Por tanto, $u^* = (-1/4)\operatorname{sen} 2t$ es una solución particular de la ecuación. Por (21.24) y el resultado del Ejemplo 21.23(b), se puede escribir ya la solución general.

La técnica que hemos aplicado en los ejemplos anteriores para obtener soluciones particulares de la ecuación no homogénea funciona también si $f(t)$ es suma, diferencia o producto de polinomios, funciones exponenciales o trigonométricas de los tipos mencionados. Por ejemplo, si $f(t) = (t^2 + 1)e^{3t} + \operatorname{sen} 2t$ probamos con $u^* = (At^2 + Bt + C)e^{3t} + D\operatorname{sen} 2t + E\cos 2t$. Por otra parte, si la función $f(t)$ de (21.29) es de un tipo completamente distinto como $t \ln t$, el método de los coeficientes indeterminados no funciona.

Estabilidad

Los conceptos de estabilidad y los resultados correspondientes para las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden están estrechamente relacionados con los que dimos al final de la Sección 20.5 para ecuaciones en diferencias. Si cambios pequeños en las condiciones iniciales no tienen efectos en el comportamiento de la solución para valores grandes de la variable independiente, la ecuación se llama una **ecuación diferencial estable**. Si, por otra parte, cambios pequeños en las condiciones iniciales conllevan diferencias significativas en el comportamiento de la solución para valores grandes de la variable independiente, la ecuación se llama una **ecuación diferencial inestable**.

Consideremos en particular la ecuación diferencial no homogénea de segundo orden

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \qquad (*)$$

Recuérdese que la solución general de $(*)$ es

$$x = Au_1(t) + Bu_2(t) + u^*(t) \tag{**}$$

donde $Au_1(t) + Bu_2(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada (esto es, la que se obtiene sustituyendo $f(t)$ por cero), y $u^*(t)$ es una solución particular de la no homogénea. La ecuación $(*)$ se llama **globalmente asintóticamente estable** (o **estable** por brevedad) si la solución general $Au_1(t) + Bu_2(t)$ de la ecuación homogénea asociada tiende a 0 cuando $t \to \infty$ para todo valor de A y B. Así, cualquier solución de la ecuación tiende a la solución particular $u^*(t)$, la cual es independiente de las condiciones iniciales. Por tanto, el efecto de las condiciones iniciales "se desvanece" cuando $t \to \infty$.

Al igual que en el caso de las ecuaciones en diferencias, si $Au_1(t) + Bu_2(t)$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$ para todos los valores de A y B entonces, en particular, $u_1(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ (tomar $A = 1$, $B = 0$), y $u_2(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ (tomar $A = 0$, $B = 1$). De otro lado, las dos condiciones de que $u_1(t)$ y $u_2(t)$ tiendan a 0 cuando t tiende a infinito son evidentemente suficientes para que $Au_1(t) + Bu_2(t)$ tienda a 0 cuando $t \to \infty$. Supongamos que los coeficientes $a(t)$ y $b(t)$ de $(*)$ son constantes. Entonces $u_1(t) \to 0$ y $u_2(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ si y sólo si las partes reales de las raíces de $r^2 + ar + b = 0$ son ambas negativas. En efecto, supongamos primero que la ecuación característica tiene raíces complejas, $r = \alpha \pm i\beta$, donde $\alpha = -\frac{1}{2}a$ y $\beta = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$. Entonces $u_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$ y $u_2(t) = e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. En este caso $u_1(t)$ y $u_2(t)$ tienden a 0 si y sólo si $\alpha < 0$. Si las raíces de la ecuación característica son reales, es fácil ver que la ecuación es estable si y sólo si ambas raíces (o la única si es doble) son negativas. Por tanto:

> La ecuación $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$ es estable si y sólo si las dos raíces de la ecuación característica $r^2 + ar + b = 0$ tienen partes reales negativas. (21.32)

Así, para determinar la estabilidad de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, todo lo que tenemos que hacer es ver el signo de las partes reales de las raíces de la ecuación característica. Se puede dar también un criterio directo en términos de los coeficientes de la ecuación:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \text{ es estable} \iff a > 0 \text{ y } b > 0 \tag{21.33}$$

En efecto, sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación característica. Entonces $r_1 + r_2 = -a$ y $r_1 r_2 = b$ (véase (A.37) en Sección A.8). Supongamos que r_1 y r_2 son reales. Si son negativas, entonces $a = -r_1 - r_2$ y $b = r_1 r_2$ son positivos. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $r_1 + r_2 = -a$ implica que al menos una de las raíces es negativa. Como $r_1 r_2 = b$, se deduce que las dos son negativas. Si $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, entonces $r_1 + r_2 = 2\alpha = -a$ y $r_1 r_2 = \alpha^2 + \beta^2 = b$. Se ve que r_1 y r_2 tienen parte real negativa (o sea, $\alpha < 0$) si y sólo si a y b son positivos. Esto demuestra (21.33).

Ejemplo 21.26

Comprobar la estabilidad de

$$\ddot{\nu} + \left(\mu - \frac{\lambda}{a}\right)\dot{\nu} + \lambda\gamma\nu = -\frac{\lambda}{a}\dot{b}(t)$$

donde μ, λ, γ y a son constantes y $\dot{b}(t)$ es una función dada.

Solución: Ésta es un ecuación diferencial de segundo orden en la función $\nu(t)$ con coeficientes constantes. En virtud de (21.33), es estable si y sólo si $\mu > \lambda/a$ y $\lambda\gamma > 0$.

Problemas

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones de los Problemas 1 y 2 y averiguar cuáles de ellas son estables.

1 (a) $\ddot{x} - 3x = 0$ (b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$ (c) $3\ddot{x} + 8\dot{x} = 0$
(d) $4\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$ (e) $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 8$ (f) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^{5t}$

2 (a) $\ddot{x} - x = \operatorname{sen} t$ (b) $\ddot{x} - x = e^{-t}$ (c) $3\ddot{x} - 30\dot{x} + 75x = 2t + 1$

3 Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes para las condiciones iniciales especificadas:
(a) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t^2$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$
(b) $\ddot{x} + 4x = 4t + 1$, $x(\pi/2) = 0$, $\dot{x}(\pi/2) = 0$

4 Hallar la solución general de $4\ddot{x} - 15x + 14x = t + \operatorname{sen} t$.

5 Hallar una solución particular de la ecuación diferencial

$$\ddot{L} + \gamma[\beta + \alpha(1-\beta)]\dot{L} - \gamma\delta^* L = -\gamma\delta^* kt - \gamma\delta^* L_0 \qquad (\gamma\delta^* \neq 0)$$

y averiguar cuándo la solución oscila.

6 Sea n un entero y $x = f(t)$ una solución de $\ddot{x} + t^{n-2}x = 0$.
(a) Demostrar que $x = tf(1/t)$ es una solución de $\ddot{x} + t^{-n-2}x = 0$.
(b) Resolver la ecuación diferencial $t^4\ddot{x} + x = 0$.

7 Explicar cómo la solución general de $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ en el caso $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$ se puede escribir en la forma $x = Ce^{\alpha t}\cos\beta t + De^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$ donde C y D son constantes arbitrarias. (Usar el resultado del Problema 3 de la Sección C.1.)

8 Un modelo económico debido a T. Haavelmo contiene la ecuación diferencial

$$\ddot{p}(t) = \gamma(a - \alpha)p(t) + k \qquad (\gamma,\ \alpha,\ a,\ k \text{ constantes})$$

Resolver la ecuación. ¿Es posible elegir las constantes de tal forma que la ecuación sea estable?

9 Un modelo debido a F. Dresch contiene la ecuación

$$\dot{p}(t) = a\int_{-\infty}^{t} [D(p(\tau)) - S(p(\tau))]\, d\tau \qquad (a > 0) \qquad (*)$$

donde $p(t)$ designa un índice de precios en el instante t, y $D(p)$, $S(p)$ son la demanda y oferta agregadas, respectivamente. Así, $(*)$ dice que la tasa de aumento de precios es proporcional al total acumulado de todos los excesos de demanda pasados. Si $D(p) = d_0 + d_1 p$ y $S(p) = s_0 + s_1 p$, con $d_1 < 0$ y $s_1 > 0$, derivar $(*)$ con respecto a t para deducir una ecuación diferencial de segundo orden para $p(t)$. Hallar entonces la solución general de esta ecuación.

10 Consideremos la ecuación $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ cuando $\frac{1}{4}a^2 - b = 0$, de tal forma que la ecuación característica tiene una raíz doble $r = -a/2$. Sea $x(t) = u(t)e^{rt}$; demostrar que esta función es una solución siempre que $\ddot{u} = 0$. Concluir que la solución general es $x = (A + Bt)e^{rt}$ en este caso.

A

Álgebra elemental



¿Está bien?, pregunto ¿Es prudente aburrirse y aburrir a los estudiantes?
—Mefistófeles a Fausto (de Fausto *de Goethe)*

Este apéndice está pensado para estudiantes que necesitan repasar el álgebra elemental. Para ahorrar tiempo, el estudiante debería dar una rápida ojeada al texto y hacer algunos problemas. (Las respuestas a *todos* los problemas de este apéndice se encuentran al final del libro). Si se tienen dificultades con algunos problemas, léase la teoría precedente con cuidado, e inténtense de nuevo. Si se tuvieran excesivas dificultades con este apéndice, se debería usar un libro de álgebra más elemental.

A.1 POTENCIAS

El lector probablemente recordará que el producto 3·3·3·3 se escribe usualmente 3^4, que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ se escribe $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, y que $(-10)^3 = (-10)(-10)(-10) = -1.000$. Si a es un número y n es un número natural, entonces a^n está definido por

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}} \qquad (a \text{ multiplicado } n \text{ veces por sí mismo}) \tag{A.1}$$

De hecho, a^n se llama la *n-ésima potencia de a*; a es la *base* y n es el *exponente*. Por ejemplo, se tiene que $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ y

$$\left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$$

donde $a = p/q$ y $n = 5$. Otro ejemplo es:

$$(r+1)^3 = (r+1) \cdot (r+1) \cdot (r+1) \qquad (\text{donde } a = r+1, \text{ y } n = 3)$$

El producto $(r+1) \cdot (r+1) \cdot (r+1)$ se puede desarrollar más (véase el Ejemplo A.5 de la Sección A.3). En matemáticas es habitual no escribir el signo de multiplicación si no hay ambigüedad en la expresión. Por ejemplo, se escribe abc en lugar de $a \cdot b \cdot c$.

Se define

$$a^0 = 1 \qquad \text{para } a \neq 0 \tag{A.2}$$

Así, $5^0 = 1$, $(-16{,}2)^0 = 1$ y $(x \cdot y)^0 = 1$ si $x \cdot y \neq 0$. Pero si $a = 0$, no se asigna un número a a^0; la expresión 0^0 *no está definida*.

También se necesita definir las potencias de exponente negativo. ¿Qué se quiere decir con 3^{-2}? Resulta que la definición lógica es poner 3^{-2} igual a $1/3^2 = 1/9$. En general se define

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{A.3}$$

cuando n es un número natural y $a \neq 0$. Por ejemplo,

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \qquad 8^{-3} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}, \qquad (x^2+5)^{-16} = \frac{1}{(x^2+5)^{16}}$$

Nota: Los estudiantes cometen frecuentemente el error de cambiar de lugar los paréntesis, o de interpretarlos incorrectamente. Los siguientes ejemplos ilustran algunos errores comunes en el uso de los paréntesis.

1. La diferencia entre $(-10)^2 = (-10)(-10) = 100$, y $-10^2 = -(10 \cdot 10) = -100$ es muy importante. El cuadrado de menos 10 no es igual a menos el cuadrado de 10.
2. Nótese que $(2x)^{-1} = 1/2x$, mientras que $2x^{-1} = 2 \cdot (1/x) = 2/x$.
3. Como se verá en lo que sigue, $1.000 \cdot (1{,}08)^5$ es la cantidad que se tendría en una cuenta de ahorro después de 5 años si se invierten 1.000$ al 8% de interés anual. Se puede usar una calculadora para hallar el resultado, que es 1.469,33$. Un estudiante escribió $1.000 \cdot (1{,}08)^5 = (1.000 \cdot 1{,}08)^5 = (1.080)^5$, que es un error garrafal, porque es 10^{12} (un billón) de veces la respuesta correcta.
4. El área de un cuadrado cuyos lados tienen longitud x es x^2. ¿Cuál es el área si se duplica la longitud de los lados? *Solución*: al área aumenta a $(2x)^2 = (2x)(2x) = 4x^2$, luego se multiplica por 4. Si $(2x)^2$ se confunde con $2x^2$, el resultado sería una duplicación del área. Úsese un dibujo para probar que esta última respuesta es incorrecta.
5. El volumen de una bola de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$. ¿Cuál es el volumen si se duplica el radio? *Solución*: El nuevo volumen es $\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi(2r)(2r)(2r) = \frac{4}{3}\pi 8r^3 = 8(\frac{4}{3}\pi r^3)$, luego se multiplica por 8. Si se comete el error de "simplificar" $(2r)^3$ por $2r^3$, el resultado sería que el volumen se duplicaría; esto sería contrario al sentido común.

Propiedades de los exponentes

Las siguientes propiedades de los exponentes son muy importantes y deberían memorizarse.

Propiedades generales de los exponentes

$$
\begin{aligned}
a^n \cdot a^m &= a^{n+m} && \textbf{(a)}\\
a^n / a^m &= a^{n-m} && \textbf{(b)}\\
(a^n)^m &= a^{n \cdot m} && \textbf{(c)}\\
(a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n && \textbf{(d)}\\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} && \textbf{(e)}
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Las reglas fundamentales son $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ y $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, porque todas las demás se deducen de estas dos y de las definiciones de las potencias. Damos a continuación algunos ejemplos indicando por qué las reglas de (A.4) son válidas.

$$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 = a^{3+2}$$

$$a^3 \div a^2 = \frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a = a^{3-2}$$

$$(a^2)^3 = (a^2)(a^2)(a^2) = a^{2+2+2} = a^6 = a^{2 \cdot 3}$$

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 b^3$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^4}{b^4}$$

La propiedad A.4(**a**) dice que potencias con la misma base se multiplican sumando los exponentes. El lector debería enunciar las otras propiedades con palabras. Estúdiense los ejemplos detalladamente.

Las propiedades (A.4) también son válidas si m y/o n son enteros negativos. Por ejemplo,

$$a^{-3} \cdot a^5 = a^{-3+5} = a^2, \qquad (x \cdot y)^{-2} = x^{-2} \cdot y^{-2}$$

Usando las reglas del cálculo de fracciones (véase la Sección A.5), se tiene también

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{1/a^n}{1/b^n} = \frac{(1/a^n) \cdot a^n \cdot b^n}{(1/b^n) \cdot a^n \cdot b^n} = \frac{b^n}{a^n} \tag{A.5}$$

Este resultado se puede aplicar siempre que una fracción esté elevada a un exponente negativo.

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

Ejemplo A.1

Si $ab^2 = 2$, calcular lo siguiente:

(**a**) a^2b^4 (**b**) $a^{-4}b^{-8}$ (**c**) $a^3b^6 + a^{-1}b^{-2}$

Solución:

(**a**) $a^2b^4 = (ab^2)^2 = 2^2 = 4$

(**b**) $a^{-4}b^{-8} = (ab^2)^{-4} = 2^{-4} = 1/2^4 = 1/16$

(**c**) $a^3b^6 + a^{-1}b^{-2} = (ab^2)^3 + (ab^2)^{-1} = 2^3 + 2^{-1} = 8 + 1/2 = 17/2$

Nota: Un motivo importante para introducir las definiciones (A.2) y (A.3) es que es deseable que las propiedades de (A.4) sean válidas para todos los exponentes. Por ejemplo, considérense las consecuencias de que la condición (A.4)(**a**) sea válida para $a^5 \cdot a^0$. Se tiene $a^{5+0} = a^5$, luego que $a^5 \cdot a^0 = a^5$, y debe ser por tanto $a^0 = 1$. Si (A.4)(**a**) tiene que ser cierta para $m = -n$, se debe tener $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$. Como $a^n \cdot (1/a^n) = 1$, se *debe* definir a^{-n} como en (A.3).

Interés compuesto

Las potencias se usan en prácticamente todas las ramas de la matemática aplicada, incluyendo economía. Para demostrar su uso, considérese la necesidad de las potencias para calcular el interés compuesto.

Supongamos que se depositan 1.000$ en un banco al 8% de interés anual.[1] Después de un año se habrán ganado 1.000$ · 0,08 = 80$ de intereses, luego la cantidad total en cuenta al final del año será 1.080$. Esto se puede escribir en la forma

$$1.000 + \frac{1.000 \cdot 8}{100} = 1.000\left(1 + \frac{8}{100}\right) = 1.000 \cdot 1{,}08$$

Si esta nueva cantidad de 1.000$ · 1,08 se deja en el banco otro año con un interés del 8%, después de un segundo año, la cantidad habrá crecido hasta un total de

$$1.000 \cdot 1{,}08 + \frac{(1.000 \cdot 1{,}08) \cdot 8}{100} = 1.000 \cdot 1{,}08\left(1 + \frac{8}{100}\right) = 1.000 \cdot (1{,}08)^2$$

Cada año la cantidad se multiplicará por el factor 1,08 y vemos que, al final de t años, se habrá convertido en 1.000$ · $(1{,}08)^t$. Si la cantidad original es K dólares y el tipo de interés es del p% anual, al final del primer año, la cantidad será $K + K \cdot p/100 = K(1+p/100)$ dólares. El factor de crecimiento por año es por tanto $1 + p/100$. En general, después de t años (completos), la inversión original de K dólares se habrá convertido en

$$K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

al tipo de interés del p% anual. Naturalmente, estamos suponiendo que los intereses se añaden al capital cada año —esto es, se opera a interés compuesto.

Una expresión de la forma $(1{,}08)^t$ debería reconocerse inmediatamente como la cantidad a la que ha crecido 1$ después de t años con un interés del 8% anual. ¿Cuál sería la interpretación de $(1{,}08)^0$? Si se deposita 1$ al 8% anual y se deja producir intereses 0 años, se seguiría teniendo únicamente 1$, porque no ha habido tiempo de acumular intereses. Así, $(1{,}08)^0$ *debe* ser igual a 1.

¿Son útiles los exponentes negativos?

¿Cuánto dinero se debería haber depositado hace 5 años en el banco para tener 1.000$ hoy, supuesto que el tipo de interés ha sido del 8% anual en este periodo? Si llamamos x a esta cantidad, la condición es que $x \cdot (1{,}08)^5$ debe ser igual a 1.000$, o sea que

$$x \cdot (1{,}08)^5 = 1.000$$

Despejando x obtenemos

$$x = \frac{1.000}{(1{,}08)^5} = 1.000 \cdot (1{,}08)^{-5},$$

que es, aproximadamente, 681$. Resulta que $(1{,}08)^{-5}$ dólares es lo que se debería haber depositado hace 5 años para tener 1$ hoy, a interés constante anual del 8%.

En general, $P(1 + p/100)^{-t}$ dólares es lo que se debería haber depositado hace t años para tener P dólares hoy al tipo de interés del p% anual.

Problemas

1 Calcular lo siguiente:

[1] Recuérdese que 1% significa uno de cada cien, ó 0,01. Para calcular, digamos, el 23% de 4.000$, se escribe

$$\frac{4.000 \cdot 23}{100} = 920 \qquad ó \qquad 4.000 \cdot 0{,}23 = 920$$

(a) 6^3 (b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ (c) $(-1)^5$ (d) $(0{,}3)^2$

(e) $(4{,}5-2{,}5)^4$ (f) $2^2\cdot 2^4$ (g) $2^2\cdot 3^2\cdot 4^2$ (h) $(2^2\cdot 3^2)^3$

2 Expresar como potencias:

(a) $15\cdot 15\cdot 15$ (b) $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$ (c) $\frac{1}{10}$ (d) 0,0000001

(e) $t\,t\,t\,t\,t\,t$ (f) $(a-b)(a-b)(a-b)$ (g) $a\,a\,b\,b\,b\,b$ (h) $(-a)(-a)(-a)$

3 Simplificar:

(a) $a^4\cdot a^2$ (b) $(a^4)^2$ (c) $x^6\div x^3$ (d) $\dfrac{b^2}{b^5}$

(e) $(x^2y^3)^3$ (f) $\dfrac{x^n\cdot x}{x^{n-1}}$ (g) $\dfrac{z^2\div z^5}{z^3\cdot z^{-4}}$ (h) $\dfrac{3^3\cdot 3^{-2}}{3^2\cdot 3^5}$

4 Calcular lo siguiente:

(a) $2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\cdot 2^3$ (b) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$ (c) $\dfrac{4^2\cdot 6^2}{3^3\cdot 2^3}$

(d) x^5x^4 (e) $y^5y^4y^3$ (f) $(2xy)^3$

(g) $\dfrac{10^2\cdot 10^{-4}\cdot 10^3}{10^0\cdot 10^{-2}\cdot 10^5}$ (h) $\dfrac{(k^2)^3k^4}{(k^3)^2}$ (i) $\dfrac{(x+1)^3(x+1)^{-2}}{(x+1)^2(x+1)^{-3}}$

5 ¿Cuáles de las siguientes expresiones están definidas y cuáles son sus valores?

(a) $\dfrac{0}{26}$ (b) $\dfrac{2-x}{0}$ (c) $0\cdot 0$ (d) 0^{25}

(e) $(0+2)^0$ (f) 0^{-2} (g) $\dfrac{(10)^0}{(0+1)^0}$ (h) $\dfrac{(0+1)^0}{(0+2)^0}$

6 Resolver las siguientes ecuaciones en x:

(a) $5^2\cdot 5^x=5^7$ (b) $10^x=1$ (c) $10^x\div 10^5=10^{-2}$

(d) $(25)^2=5^x$ (e) $2^{10}-2^2\cdot 2^x=0$ (f) $(x+3)^2=x^2+3^2$

7 ¿Cuáles de las siguientes igualdades son correctas?

(a) $3^5=5^3$ (b) $(5^2)^3=5^{2^3}$ (c) $(3^3)^4=(3^4)^3$

(d) $0^3\cdot 4^0=0$ (e) $(0^{-2})(-2)^0=1$ (f) $(5+7)^2=5^2+7^2$

(g) $\dfrac{2x+4}{2}=x+4$ (h) $2(x-y)=x\cdot 2-y\cdot 2$ (i) $-x+y=y-x$

8 ¿Cuáles de las igualdades siguientes son verdaderas y cuáles falsas? Justificar la respuesta. (Nota: a y b son positivos, m y n son enteros.)

(a) $a^0=0$ (b) $(a+b)^{-n}=1/(a+b)^n$ (c) $a^m\cdot a^m=a^{2m}$

(d) $a^m\cdot b^m=(ab)^{2m}$ (e) $(a+b)^m=a^m+b^m$ (f) $a^n\cdot b^m=(ab)^{n+m}$

9 Completar lo siguiente:

(a) $xy=3\Longrightarrow x^3y^3=\cdots$ (b) $ab=-2\Longrightarrow (ab)^4=\cdots$

(c) $a^2=4\Longrightarrow (a^{20})^0=\cdots$ (d) n entero $\Longrightarrow (-1)^{2n}=\cdots$

(e) $x^{-1}y^{-1}=3\Longrightarrow x^3y^3=\cdots$ (f) $x^7=2\Longrightarrow (x^{-3})^6(x^2)^2=\cdots$

(g) $\left(\dfrac{xy}{z}\right)^{-2}=3\Longrightarrow\left(\dfrac{z}{xy}\right)^6=\cdots$ (h) $a^{-1}b^{-1}c^{-1}=1/4\Longrightarrow (abc)^4=\cdots$

10 Calcular lo siguiente:

(a) $(2x)^4$ (b) $(2^{-1}-4^{-1})^{-1}$ (c) $\dfrac{24x^3y^2z^3}{4x^2yz^2}$ (d) $\left[-(-ab^3)^{-3}(a^6b^6)^2\right]^3$

(e) $\dfrac{a^5\cdot a^3\cdot a^{-2}}{a^{-3}\cdot a^6}$ (f) $\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\cdot\dfrac{8}{x^{-2}}\right]^{-3}$ (g) $\dfrac{a^{2n+3}}{a^{2n-1}}$ (h) $\dfrac{5^{pq+p}5^{2p}}{5^{q+3p}5^{pq}}$

11 Calcular lo siguiente:

(a) 13% de 150 (b) 6% de 2.400 (c) 5,5% de 200

12 Una caja que contiene 5 bolas cuesta 8,50$. Si las bolas se compran individualmente, cuestan 2,00$ cada una. ¿Cuánto se ahorra, en tanto por ciento, comprando la caja en lugar de comprar las 5 bolas individualmente?

13 Dar interpretaciones económicas de cada una de las siguientes expresiones, y usar luego una calculadora para hallar los valores aproximados:

(a) $50\cdot(1{,}11)^8$ (b) $10.000\cdot(1,12)^{20}$ (c) $5.000\cdot(1{,}07)^{-10}$

14 Calcular 2^{10}. ¿Es 2^{10} mayor que 10^3? Explicar basándose en la respuesta por qué 2^{30} es mayor que 10^9. Comprobar usando una calculadora.

A.2 RAÍCES CUADRADAS

Hasta ahora, la potencia a^x está definida para exponentes enteros, esto es, cuando $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Si $a \geq 0$ y $x = 1/2$, se escribe $a^x = a^{1/2} = \sqrt{a}$, se le llama la **raíz cuadrada** de a, y se define como el número no negativo que multiplicado por sí mismo da a. Esta definición tiene sentido porque $a^{1/2}\cdot a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a$. Nótese que un número real multiplicado por sí mismo debe dar siempre ≥ 0, sea ese número positivo, negativo, o cero. Así, no están definidas las raíces cuadradas de los números negativos. Por ejemplo, $(16)^{1/2} = \sqrt{16} = 4$ porque $4\cdot4 = 16$, y $(1/9)^{1/2} = \sqrt{1/9} = 1/3$ porque $(1/3)(1/3) = 1/9$, mientras que $(-25)^{1/2} = \sqrt{-25}$ no está definido. En general la raíz cuadrada de un número natural es un número irracional. Por ejemplo, $\sqrt{2}\approx 1{,}414$, $\sqrt{3}\approx 1{,}732$ son números irracionales.

Las propiedades (A.4)(**d**) y (**e**) también se verifican para raíces cuadradas. Por ejemplo,

$$\sqrt{16\cdot25} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{25} = 4\cdot5 = 20, \qquad \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

Lo anterior se puede escribir también en la forma

$$(16\cdot25)^{1/2} = (16)^{1/2}\cdot(25)^{1/2} = 4\cdot5 = 20, \qquad \left(\frac{9}{4}\right)^{1/2} = \frac{9^{1/2}}{4^{1/2}} = \frac{3}{2}$$

En general, si a y b son números no negativos con $b \neq 0$, es

$$\text{(a)}\ \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \text{(b)}\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \tag{A.6}$$

Nótese que las fórmulas de (A.6) no se verifican si a ó b, o ambos, son negativos. Por ejemplo, $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, mientras $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ no está definido.

Usando una calculadora se calcula $\sqrt{2}\div\sqrt{3}\approx 0{,}816$. Sin usar calculadora, la división $\sqrt{2}\div\sqrt{3}\approx 1{,}414\div1{,}732$ sería bastante tediosa. Resulta más fácil si se racionaliza el denominador— esto es, si se multiplican el numerador y el denominador por el denominador, para quitar raíces del

denominador. Así,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \frac{2{,}448}{3} = 0{,}816$$

Ejemplo A.2

Racionalizar los denominadores: (**a**) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ (**b**) $\dfrac{(a+1)\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}$.

Solución:

(**a**) $$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

(**b**) $$\frac{(a+1)\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} = \frac{(a+1)\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a+1}} = \frac{(a+1)\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1}}{a+1}$$
$$= \sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1} = \sqrt{a(a+1)}$$

Nota: Uno de los errores más comunes que se cometen en álgebra elemental es sustituir $\sqrt{a+b}$ por $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Por ejemplo, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, mientras que $\sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$. Así se tiene

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

El siguiente ejemplo ilustra la frecuencia de este error. En un examen de un curso básico de matemáticas para economistas, 43 de 190 estudiantes simplificaron $\sqrt{1/16+1/25}$ incorrectamente y dijeron que era igual a $1/4+1/5 = 9/20$ (la respuesta correcta es $\sqrt{41/400} = \sqrt{41}/20$).

Problemas

1 Calcular lo siguiente:

(a) $\sqrt{9}$ (b) $\sqrt{1.600}$ (c) $(100)^{1/2}$ (d) $\sqrt{9+16}$

(e) $(36)^{-1/2}$ (f) $(0{,}49)^{1/2}$ (g) $\sqrt{0{,}01}$ (h) $\sqrt{\dfrac{1}{25}}$

2 Resolver en x:

(a) $\sqrt{x} = 9$ (b) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{4} = 4$ (c) $\sqrt{x+2} = 25$

(d) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{x}$ (e) $2^{2-x} = 8$ (f) $2^x - 2^{x-1} = 4$

3 Racionalizar el denominador y simplificar:

(a) $\dfrac{6}{\sqrt{7}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{54}-\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$

(e) $\dfrac{2}{\sqrt{3}\sqrt{8}}$ (f) $\dfrac{4}{\sqrt{2y}}$ (g) $\dfrac{x}{\sqrt{2x}}$ (h) $\dfrac{x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$

4 Decidir en cada caso si el signo "?" debería ser $=$ ó $\neq$. Justificar la respuesta. (Nota: a y b son positivos.)

(a) $\sqrt{25\cdot 16}$? $\sqrt{25}\cdot\sqrt{16}$ (b) $\sqrt{25+16}$? $\sqrt{25}+\sqrt{16}$

(c) $(a+b)^{1/2}$? $a^{1/2}+b^{1/2}$ (d) $(a+b)^{-1/2}$? $(\sqrt{a+b})^{-1}$

A.3 REGLAS ALGEBRAICAS

El lector estará probablemente familiarizado con las reglas más comunes del álgebra. De todas formas, es útil recordar ahora las más importantes. Si a, b, y c son números reales arbitrarios, entonces:

$$\begin{array}{llll} \textbf{(a)} & a+b=b+a & \textbf{(g)} & 1\cdot a=a \\ \textbf{(b)} & (a+b)+c=a+(b+c) & \textbf{(h)} & aa^{-1}=1 \text{ para } a\neq 0 \\ \textbf{(c)} & a+0=a & \textbf{(i)} & (-a)b=a(-b)=-ab \\ \textbf{(d)} & a+(-a)=0 & \textbf{(j)} & (-a)(-b)=ab \\ \textbf{(e)} & ab=ba & \textbf{(k)} & a(b+c)=ab+ac \\ \textbf{(f)} & (ab)c=a(bc) & \textbf{(l)} & (a+b)c=ac+bc \end{array} \tag{A.7}$$

Usamos estas reglas en los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{ll} 5+x^2=x^2+5 & (a+2b)+3b=a+(2b+3b)=a+5b \\ x\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x & (xy)y^{-1}=x(yy^{-1})=x \\ (-3)5=3(-5)=-(3\cdot 5)=-15 & (-6)(-20)=120 \\ 3x(y+2z)=3xy+6xz & (t^2+2t)4t^3=t^24t^3+2t4t^3=4t^5+8t^4 \end{array}$$

Las reglas (A.7)(**k**) y (A.7)(**l**) se pueden combinar con las otras de varias formas para obtener

$$\begin{array}{lrl} \textbf{(m)} & a(b-c) & =a[b+(-c)]=ab+a(-c)=ab-ac \\ \textbf{(n)} & x(a+b-c+d) & =xa+xb-xc+xd \\ \textbf{(o)} & (a+b)(c+d) & =ac+ad+bc+bd \end{array} \tag{A.8}$$

Un razonamiento geométrico para demostrar (A.8) (**o**) es considerar las áreas de la Figura A.1.

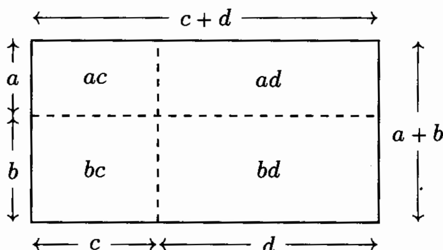


FIGURA A.1

Es frecuente encontrar paréntesis precedidos por un signo menos. Como $(-1)x=-x$, por (**n**) se tiene que

$$-(a+b-c+d)=-a-b+c-d \tag{A.9}$$

En palabras: *Cuando se quitan paréntesis precedidos por un signo menos, se cambian de signo todos los términos dentro del paréntesis.*

Igualdades importantes.

Existen tres casos particulares de (A.8) que son tan importantes que el lector debe aprenderlos de memoria:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \tag{A.10}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \tag{A.11}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{A.12}$$

La fórmula (A.12) se llama la *fórmula de la diferencia de cuadrados*. Para demostrar (A.10): $(a+b)^2$ significa $(a+b)(a+b)$ que, por (A.8), es igual a $aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$. El lector debe demostrar por sí mismo (A.11) y (A.12).

Ejemplo A.3

Usar (A.10) a (A.12) para desarrollar lo siguiente:

(a) $(2x+3y)^2$ **(b)** $\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2$ **(c)** $\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)$

Solución:

(a) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

(b) $\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2 = 1^2 - 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}z + \left(\frac{1}{2}z\right)^2 = 1 - z + \frac{1}{4}z^2$

(c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = 3 - 6 = -3$

Ejemplo A.4

Desarrollar $\left(\sqrt{x}+1-\sqrt{x+1}\right)^2$.

Solución: Pongamos $a = \sqrt{x}+1$ y $b = \sqrt{x+1}$. Entonces, por (A.11) y (A.10), se tiene

$$\begin{aligned}
\left[(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x+1}\right]^2 &= (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
&= (\sqrt{x}+1)^2 - 2(\sqrt{x}+1)\sqrt{x+1} + (\sqrt{x+1})^2 \\
&= x + 2\sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x}\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + x + 1 \\
&= 2\left(x + 1 + \sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}\right)
\end{aligned}$$

De otra forma se puede poner $\left(\sqrt{x}+1-\sqrt{x+1}\right)^2 = (a+b)^2$, con $a = \sqrt{x}$ y $b = 1-\sqrt{x+1}$; usar entonces (A.10) y (A.12). ¿Obtiene el lector la misma solución?

En (A.8), se multiplican dos factores, $(a+b)$ y $(c+d)$. ¿Cómo se calcula un producto semejante con más factores? Se puede calcular en la forma

$$\begin{aligned}
(a+b)(c+d)(e+f) &= \left[(a+b)(c+d)\right](e+f) = (ac+ad+bc+bd)(e+f) \\
&= (ac+ad+bc+bd)e + (ac+ad+bc+bd)f \\
&= ace + ade + bce + bde + acf + adf + bcf + bdf
\end{aligned}$$

También se puede calcular en la forma $(a+b)(c+d)(e+f) = (a+b)\left[(c+d)(e+f)\right]$. El lector debe desarrollar esta expresión y ver que obtiene la misma respuesta.

Ejemplo A.5

Calcular $(r+1)^3$.

Solución:

$$(r+1)^3 = \left[(r+1)(r+1)\right](r+1) = (r^2+2r+1)(r+1) = r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

Podemos ilustrar este último resultado con un ejemplo. Una esfera de radio r metros tiene un volumen de $\frac{4}{3}\pi r^3$. ¿Cuánto aumenta el volumen si el radio aumenta un metro? La solución es

$$\frac{4}{3}\pi(r+1)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3+3r^2+3r+1) - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3r^2+3r+1)$$

Expresiones algebraicas

Las expresiones del tipo $3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx$ se llaman *expresiones algebraicas*. A $3xy$, $-5x^2y^3$, $2xy$, $6y^3x^2$, $-3x$, $5yx$ se les llama los *términos* de la expresión anterior, y 3, -5, 2, 6, -3, 5 son los *coeficientes numéricos* de los términos. Dos términos que sólo se diferencian en el coeficiente numérico, como $-5x^2y^3$ y $6y^3x^2$, se llaman *términos semejantes*. Para simplificar expresiones, se reducen términos semejantes. En cada término, es habitual escribir el coeficiente numérico primero y luego las letras en orden alfabético. Un ejemplo de simplificación es

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx = x^2y^3 + 10xy - 3x$$

Ejemplo A.6

Desarrollar y simplificar:

(a) $(2pq - 3p^2)(p + 2q) - (q^2 - 2pq)(2p - q)$ **(b)** $(xy - 3y^2)(x^2y - x^3 + 3xy^2)$

Solución:

(a)
$$\begin{aligned}&(2pq - 3p^2)(p + 2q) - (q^2 - 2pq)(2p - q)\\ &= 2pqp + 2pq2q - 3p^3 - 6p^2q - (q^22p - q^3 - 4pqp + 2pq^2)\\ &= 2p^2q + 4pq^2 - 3p^3 - 6p^2q - 2pq^2 + q^3 + 4p^2q - 2pq^2\\ &= -3p^3 + q^3\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}&(xy - 3y^2)(x^2y - x^3 + 3xy^2)\\ &= xyx^2y - xyx^3 + xy3xy^2 - 3y^2x^2y + 3y^2x^3 - 3y^23xy^2\\ &= x^3y^2 - x^4y + 3x^2y^3 - 3x^2y^3 + 3x^3y^2 - 9xy^4\\ &= -x^4y + 4x^3y^2 - 9xy^4\end{aligned}$$

Problemas

1 Simplificar lo siguiente:

(a) $-3 + (-4) - (-8)$ (b) $(-3)(2 - 4)$ (c) $(-3)(-12)(-\frac{1}{2})$

(d) $-3[4 - (-2)]$ (e) $-3(-x - 4)$ (f) $(5x - 3y)9$

(g) $2x\left(\dfrac{3}{2x}\right)$ (h) $0 \cdot (1 - x)$ (i) $-7x\dfrac{2}{14x}$

En los Problemas 2 a 6, desarrollar y reducir términos semejantes.

2 (a) $5a^2 - 3b - (-a^2 - b) - 3(a^2 + b)$ (b) $-x(2x - y) + y(1 - x) + 3(x + y)$

(c) $12t^2 - 3t + 16 - 2(6t^2 - 2t + 8)$ (d) $r^3 - 3r^2s + 3rs^2 + s^3 - (-s^3 - r^3 + 3r^2s)$

3 (a) $-3(n^2 - 2n + 3)$ (b) $x^2(1 + x^3)$ (c) $(4n - 3)(n - 2)$

(d) $6a^2b(5ab - 3ab^2)$ (e) $(a^2b - ab^2)(a + b)$ (f) $(x - y)(x - 2y)(x - 3y)$

4 (a) $a(a - 1)$ (b) $(x - 3)(x + 7)$ (c) $-\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{6})$ (d) $(1 - \sqrt{2})^2$

(e) $(x - 1)^3$ (f) $(1 - b^2)(1 + b^2)$ (g) $(1 + x + x^2 + x^3)(1 - x)$ (h) $(1 + x)^4$

5 (a) $3(x - y) + (3y - x)$ (b) $(a - 2b)^2$ (c) $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y)(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)$

(d) $2x^2y - 3x - (2 + 3x^2y)$ (e) $(x + a)(x + b)$ (f) $(x - 2y)^3$

6 (a) $(2t-1)(t^2-2t+1)$ (b) $(a+1)^2+(a-1)^2-2(a+1)(a-1)$
(c) $(x+y+z)^2$ (d) $(x+y+z)^2-(x-y-z)^2$

7 Usar (A.10) a (A.12) para desarrollar lo siguiente:
(a) $(3x+2y)^2$ (b) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ (c) $(-3u+8v)^2$ (d) $(u-5v)(u+5v)$

8 Calcular $(1.000)^2/[(252)^2-(248)^2]$ sin calculadora.

9 Desarrollar y reducir términos semejantes:
(a) $(x^2-y^2)^2$ (b) $\dfrac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$ (c) $(a-b+1)^2$
(d) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ (e) $[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)]^{100}$ (f) $(n-1)^4$

10 Desarrollar y reducir términos semejantes:
(a) $(ax+b)(cx+d)$ (b) $(2-t^2)(2+t^2)$ (c) $(a+b+c)^2$
(d) $(a^5-b^5)(a^5+b^5)$ (e) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})$ (f) $(u-v)^2(u+v)^2$

11 Usar los diagramas de la Figura A.2 para dar una interpretación geométrica de (A.10) y (A.11).

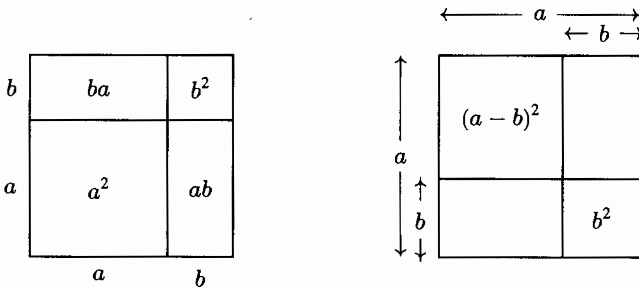


FIGURA A.2

Problemas avanzados

12 Demostrar que

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$
$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$$
$$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5$$

Intentar adivinar el resultado de la división $(a^{10}-b^{10})/(a-b)$, y confirmar la predicción.

A.4 FACTORIZACIONES

Cuando se escribe $49=7\cdot 7$, $125=5\cdot 5\cdot 5$, ó $672=2\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot 7$, se dice que hemos *factorizado* estos números. Las expresiones algebraicas se pueden factorizar de forma parecida. Por ejemplo,

$$6x^2y=2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot y \quad \text{y} \quad 5x^2y^3-15xy^2=5\cdot x\cdot y\cdot y(xy-3)$$

Ejemplo A.7
Factorizar lo siguiente:

(a) $5x^2+15x$ **(b)** $-18b^2+9ab$ **(c)** $K(1+r)+K(1+r)r$ **(d)** $\delta L^{-3}+(1-\delta)L^{-2}$

Solución:

(**a**) $5x^2 + 15x = 5x(x+3)$
(**b**) $-18b^2 + 9ab = 9ab - 18b^2 = 3 \cdot 3b(a - 2b)$
(**c**) $K(1+r) + K(1+r)r = K(1+r)(1+r) = K(1+r)^2$
(**d**) $\delta L^{-3} + (1-\delta)L^{-2} = L^{-3}[\delta + (1-\delta)L]$

Las fórmulas (A.10) a (A.12) se pueden usar "a la inversa" para factorizar. Algunas veces permiten factorizar expresiones que parecen no tener factores.

Ejemplo A.8

Factorizar lo que sigue:

(**a**) $16a^2 - 1$ (**b**) $x^2y^2 - 25z^2$ (**c**) $4u^2 + 8u + 4$ (**d**) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

Solución:

(**a**) $16a^2 - 1 = (4a+1)(4a-1)$ (por (A.12))
(**b**) $x^2y^2 - 25z^2 = (xy+5z)(xy-5z)$ (por (A.12))
(**c**) $4u^2 + 8u + 4 = (2u+2)^2 = 4(u+1)^2$ (por (A.10))
(**d**) $x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$ (por (A.11))

Se puede verificar que se ha factorizado correctamente una expresión algebraica simplemente multiplicando los factores. Por ejemplo, comprobamos que

$$x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b) \tag{A.13}$$

desarrollando $(x-a)(x-b)$. La fórmula (A.13) es importante porque se puede usar para factorizar expresiones cuadráticas.

Ejemplo A.9

Factorizar (si es posible) lo siguiente:

(**a**) $x^2 - 8x + 15$ (**b**) $x^2 + 5x + 6$ (**c**) $x^2 + 2x + 2$

Solución: (**a**) Compárese con (A.13); se ve que para hacer $x^2 - 8x + 15$ igual a $(x-a)(x-b)$ es necesario que $a + b = 8$ y $ab = 15$. Así debemos encontrar dos números a y b cuya suma sea 8 y cuyo producto sea 15. Por ejemplo, $a = 3$ y $b = 5$ (ó $a = 5$ y $b = 3$), luego la factorización es

$$x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$$

(**b**) Análogamente se tiene que $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.

(**c**) En este caso, se necesitan dos números, a y b, cuya suma sea -2 y cuyo producto sea 2. Como no hay ningún par de números reales con estas propiedades, no existe factorización.

En la Sección A.8 estudiaremos la factorización de expresiones cuadráticas como $ax^2 + bx + c$ más sistemáticamente. Terminamos esta sección con algunos ejemplos en los que agrupar ciertos términos es la clave de la factorización.

Ejemplo A.10

Factorizar lo siguiente:

(**a**) $x^2 + 2xy^2 + xy + 2y^3$ (**b**) $a^3 - 4b^3 - 4ab^2 + a^2b$

Solución: (**a**) Es muy sencillo:

$$x^2 + 2xy^2 + xy + 2y^3 = (x^2 + 2xy^2) + (xy + 2y^3)$$
$$= (x + 2y^2)x + (x + 2y^2)y = (x + 2y^2)(x + y)$$

(**b**) Se debe tener cuidado al reagrupar los términos:

$$a^3 - 4b^3 - 4ab^2 + a^2b = a^3 - 4ab^2 + a^2b - 4b^3$$
$$= a(a^2 - 4b^2) + b(a^2 - 4b^2) = (a + b)(a^2 - 4b^2)$$
$$= (a + b)(a + 2b)(a - 2b)$$

Nota: Si se escribe $15 + 25 = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 5$, entonces hemos factorizado 15 y 25, pero *no* la suma $15 + 25$. Análogamente, $9x^2 - 25y^2 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x - 5 \cdot 5 \cdot y \cdot y$ *no* es una factorización de $9x^2 - 25y^2$. La factorización correcta es $9x^2 - 25y^2 = (3x - 5y)(3x + 5y)$.

Problemas

En los Problemas 1 a 3, factorizar las expresiones dadas.

1 (a) $28a^2b^3$ (b) $4x + 8y - 24z$ (c) $2x^2 - 6xy$ (d) $4a^2b^3 + 6a^3b^2$
(e) $7x^2 - 49xy$ (f) $5xy^2 - 45x^3y^2$ (g) $16 - b^2$ (h) $3x^2 - 12$

2 (a) $x^2 - 4x + 4$ (b) $4t^2s - 8ts^2$ (c) $16a^2 + 16ab + 4b^2$ (d) $5x^4 - 10x^2y^2$

3 (a) $K^3 - K^2L$ (b) $KL^3 + KL$ (c) $L^2 - K^2$
(d) $K^2 - 2KL + L^2$ (e) $K^3L - 4K^2L^2 + 4KL^3$ (f) $K^{-\rho} - K^{-2\rho}$

4 Usar el método del Ejemplo A.9 para factorizar lo siguiente:
(a) $x^2 + 5x + 6$ (b) $x^2 + 2x - 15$ (c) $p^2 - 3p + 2$
(d) $2q^2 + 16q - 66$ (e) $3x^2 - 12x - 15$ (f) $-p^2 - p + 20$

5 Factorizar lo que sigue (véase Ejemplo A.10):
(a) $5(x + 2y) + a(x + 2y)$ (b) $(a + b)c - d(a + b)$ (c) $ax + ay + 2x + 2y$
(d) $2x^2 - 5yz + 10xz - xy$ (e) $p^2 - q^2 + p - q$ (f) $u^3 + v^3 - u^2v - v^2u$

6 Factorizar:
(a) $p + prt$ (b) $\pi r^2 + 2\pi rh$ (c) $\frac{1}{4}mnr - \frac{1}{4}mn$
(d) $PR^2 - PQR$ (e) $(1 + r)^2 + (1 + r)^3$ (f) $\frac{1}{2}gh^4 - \frac{1}{8}g^3h^2$

Problemas avanzados

7 Factorizar:
(a) $a^{2n} - 25$ (b) $(a + b)^2 - c^2$ (c) $(a + b + c)^2 - (a + b)^2$
(d) $x^4 - y^4$ (e) $81 - c^4$ (f) $x^6 - y^6$

(*Indicación para* (d): $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ y así sucesivamente.)

A.5 FRACCIONES

Recuérdese que

$$a \div b = \frac{a}{b} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{numerador} \\ \leftarrow \text{denominador} \end{matrix}$$

Por ejemplo, $5 \div 8 = \frac{5}{8}$. Por razones tipográficas, se escribe con frecuencia $5/8$ en vez de $\frac{5}{8}$. Por supuesto, $5 \div 8 = 0{,}625$, y $5/8 = 0{,}625$. En este caso, hemos escrito la fracción como un número decimal. La fracción $5/8$ se llama una *fracción propia* porque 5 es menor que 8. La fracción $19/8$ es una *fracción impropia* porque el numerador es mayor que (o igual a) el denominador. Una fracción impropia se puede escribir siempre como un *número mixto:*

$$\tfrac{19}{8} = 2 + \tfrac{3}{8} = 2\tfrac{3}{8}$$

Nota: $2\frac{3}{8}$ es lo mismo que 2 *más* 3/8. Por otra parte, $2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{3}{4}$ por las reglas que recordaremos a continuación. Nótese, sin embargo, que $2\frac{x}{8}$ significa $2 \cdot \frac{x}{8}$; es mejor usar la notación $\frac{2x}{8}$ en este caso. De hecho, la notación $\frac{19}{8}$ es probablemente mejor que $2\frac{3}{8}$ porque evita la ambigüedad.

Nótese que $0 \div 5 = 0$. En general, $0 \div b = 0$ para todo número b, excepto si $b = 0$. Por otra parte, $b \div 0$ no está definido para ningún número b.

$$\frac{0}{b} = 0 \quad (b \neq 0), \qquad \frac{b}{0} \text{ no está definido}$$

Reducción de fracciones

El lector debería saber que

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0 \text{ y } c \neq 0) \tag{A.14}$$

En general, se reducen fracciones factorizando el numerador y el denominador y cancelando *factores comunes* (esto es, dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número distinto de cero). Así:

$$\textbf{(a)} \quad \frac{189}{135} = \frac{\not{3} \cdot \not{3} \cdot \not{3} \cdot 7}{\not{3} \cdot \not{3} \cdot \not{3} \cdot 5} = \frac{7}{5}$$

$$\textbf{(b)} \quad \frac{5x^2yz^3}{25xy^2z} = \frac{\not{5} \cdot \not{x} \cdot x \cdot \not{y} \cdot \not{z} \cdot z \cdot z}{\not{5} \cdot 5 \cdot \not{x} \cdot \not{y} \cdot y \cdot \not{z}} = \frac{xz^2}{5y}$$

$$\textbf{(c)} \quad \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x}{x-y}$$

$$\textbf{(d)} \quad \frac{4 - 4a + a^2}{a^2 - 4} = \frac{(a-2)(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a-2}{a+2}$$

También se puede usar (A.14) a la inversa, expandiendo la fracción:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1.000} = 0{,}625$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

Nótese el artificio del último ejemplo para racionalizar el denominador.

Sólo se pueden cancelar factores comunes al denominador y al numerador cuando se simplifican fracciones. A continuación se dan dos ejemplos de errores frecuentes:

$$\text{¡Mal!} \rightarrow \frac{2\not{x} + 3y}{\not{x}y} = \frac{2 + 3\not{y}}{\not{y}} = \frac{2+3}{1} = 5$$

y

$$\text{¡Mal!} \rightarrow \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{0}{x+1} = 0$$

En el primer caso, no se puede simplificar porque el numerador y el denominador no tienen factores comunes. En el segundo caso, la forma correcta de simplificar la fracción da $1/(x+1)$.

Reglas de los signos

Las siguientes reglas de los signos son importantes

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-a)\cdot(-1)}{(-b)\cdot(-1)} = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad -\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b} \tag{A.15}$$

Estas igualdades se deducen de (A.14), la identidad $-x = (-1)x$, y la propiedad (A.19) que veremos más adelante.

Suma de fracciones

Éstas son las tres reglas básicas para sumar fracciones

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \tag{A.16}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d} \tag{A.17}$$

$$a + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + c}{d} \tag{A.18}$$

Como $a/1 = a$, (A.18) se deduce de (A.17) poniendo $b = 1$. La fórmula (A.17) se demuestra con (A.14) y (A.16):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot d} + \frac{c\cdot b}{d\cdot b} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo A.11

(a) $\frac{5}{3} + \frac{13}{3} = \frac{18}{3} = 6$

(b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{6} = \frac{3\cdot 6 + 5\cdot 1}{5\cdot 6} = \frac{23}{30}$

(c) $\frac{a-1}{6a} + \frac{a}{6a} + \frac{1}{6a} = \frac{a-1+a+1}{6a} = \frac{2a}{6a} = \frac{2\cdot a}{2\cdot 3\cdot a} = \frac{1}{3}$

Combinando (A.16), (A.17), y (A.18) con (A.15) se tiene

(d) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - \frac{d}{c} = \frac{a+b-d}{c}$

(e) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf} - \frac{cbf}{bdf} + \frac{ebd}{bdf} = \frac{adf - cbf + ebd}{bdf}$

Si los números b, d y f tienen factores comunes, los cálculos de (**e**) manejan números innecesariamente grandes. Se puede simplificar el proceso reduciendo al mínimo común denominador de las fracciones.

Para reducir al mínimo común denominador hay que factorizar completamente cada denominador.

El mínimo común denominador es el producto de todos los factores diferentes que aparecen en algún denominador, elevados a la potencia más alta con la que aparecen en los denominadores. Un ejemplo de cómo se reduce a mínimo común denominador es el siguiente.

Ejemplo A.12

Simplificar lo siguiente:

(**a**) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ (**b**) $\frac{2+a}{a^2b}+\frac{1-b}{ab^2}-\frac{2b}{a^2b^2}$ (**c**) $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x}{x-y}+\frac{3xy}{x^2-y^2}$

Solución: (**a**) El mínimo común denominador es 6 y

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{3-2+1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(**b**) El mínimo común denominador es a^2b^2 y así,

$$\frac{2+a}{a^2b}+\frac{1-b}{ab^2}-\frac{2b}{a^2b^2}=\frac{(2+a)b}{a^2b^2}+\frac{(1-b)a}{a^2b^2}-\frac{2b}{a^2b^2}$$
$$=\frac{2b+ab+a-ba-2b}{a^2b^2}=\frac{a}{a^2b^2}=\frac{1}{ab^2}$$

(**c**) El mínimo común denominador es $(x+y)(x-y)$ y se tiene

$$\frac{x-y}{x+y}-\frac{x}{x-y}+\frac{3xy}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)}-\frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)}+\frac{3xy}{(x-y)(x+y)}$$
$$=\frac{x^2-2xy+y^2-x^2-xy+3xy}{(x-y)(x+y)}=\frac{y^2}{x^2-y^2}$$

Nota importante

¿Qué significa $1-\frac{5-3}{2}$? Significa que se resta, del número 1, el número $\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$. Por tanto, $1-\frac{5-3}{2}=0$. De otra manera,

$$1-\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}-\frac{(5-3)}{2}=\frac{2-(5-3)}{2}=\frac{2-5+3}{2}=\frac{0}{2}=0$$

De la misma forma,

$$\frac{2+b}{ab^2}-\frac{a-2}{a^2b}$$

significa que se sustrae

$$\frac{a-2}{a^2b} \quad \text{de} \quad \frac{2+b}{ab^2}$$

$$\frac{2+b}{ab^2}-\frac{a-2}{a^2b}=\frac{(2+b)a}{a^2b^2}-\frac{(a-2)b}{a^2b^2}=\frac{(2+b)a-(a-2)b}{a^2b^2}=\frac{2(a+b)}{a^2b^2}$$

Es una buena idea encerrar entre paréntesis los numeradores de las fracciones que se restan.

Ejemplo A.13

Simplificar la expresión

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{1-x}{x-1}-\frac{-1+4x}{2(x+1)}$$

Solución:

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{1-x}{x-1}-\frac{-1+4x}{2(x+1)}=\frac{(x-1)}{x+1}-\frac{(1-x)}{x-1}-\frac{(-1+4x)}{2(x+1)}$$
$$=\frac{2(x-1)^2-2(1-x)(x+1)-(-1+4x)(x-1)}{2(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{2(x^2-2x+1)-2(1-x^2)-(4x^2-5x+1)}{2(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{(x-1)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2(x+1)}$$

Multiplicación y división de fracciones

Éstas son las tres reglas básicas para multiplicar y dividir fracciones:

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \tag{A.19}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \tag{A.20}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \tag{A.21}$$

Ejemplo de (A.19):

$$3\cdot\frac{b}{c}=\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{c}=\frac{b+b+b}{c}=\frac{3b}{c}$$

Se puede demostrar (A.21) escribiendo $(a/b)\div(c/d)$ como un cociente de fracciones:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{b\cdot d\cdot\frac{a}{b}}{b\cdot d\cdot\frac{c}{d}}=\frac{\frac{\cancel{b}\cdot d\cdot a}{\cancel{b}}}{\frac{b\cdot\cancel{d}\cdot c}{\cancel{d}}}=\frac{d\cdot a}{b\cdot c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Ejemplo A.14

Simplificar lo siguiente:

(a) $6\cdot\frac{5}{13}$ **(b)** $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{8}$ **(c)** $\frac{3}{8}\div\frac{6}{14}$ **(d)** $2xy^2\cdot\frac{x+2y}{3xy^3}$

(e) $\frac{1-36x^2}{18x+9y}\div\frac{(2-12x)(1+6x)}{16x^2-4y^2}$ **(f)** $\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{5}}{\frac{a}{5}-\frac{a}{6}}$

Solución:

(a) $6 \cdot \frac{5}{13} = \frac{6 \cdot 5}{13} = \frac{30}{13} = 2\frac{4}{13}$

(b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 8} = \frac{\not{4} \cdot 5}{7 \cdot 2 \cdot \not{4}} = \frac{5}{14}$

(c) $\frac{3}{8} \div \frac{6}{14} = \frac{3}{8} \cdot \frac{14}{6} = \frac{\not{3} \cdot \not{2} \cdot 7}{\not{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \not{3}} = \frac{7}{8}$

(d) $2xy^2 \cdot \frac{x + 2y}{3xy^3} = \frac{2\not{x}\not{y}^{\not{2}}(x + 2y)}{3\not{x}y^{\not{3}}} = \frac{2(x + 2y)}{3y}$

(e) $$\frac{1 - 36x^2}{18x + 9y} \div \frac{(2 - 12x)(1 + 6x)}{16x^2 - 4y^2} = \frac{(1 - 36x^2)}{(18x + 9y)} \cdot \frac{(16x^2 - 4y^2)}{(2 - 12x)(1 + 6x)}$$
$$= \frac{(1 - 36x^2) \cdot 4(4x^2 - y^2)}{9(2x + y) \cdot 2 \cdot (1 - 6x)(1 + 6x)}$$
$$= \frac{(1 - 6x)(1 + 6x) \cdot 4(2x - y)(2x + y)}{9(2x + y) \cdot 2 \cdot (1 - 6x)(1 + 6x)} = \frac{2(2x - y)}{9}$$

(f) $$\frac{\frac{a}{2} - \frac{a}{5}}{\frac{a}{5} - \frac{a}{6}} = \frac{\frac{5a}{10} - \frac{2a}{10}}{\frac{6a}{30} - \frac{5a}{30}} = \frac{\frac{3a}{10}}{\frac{a}{30}} = \frac{\frac{3a}{10} \cdot 30}{\frac{a}{30} \cdot 30} = \frac{9a}{a} = 9$$

Cuando se opera con fracciones de fracciones se debe señalar cuál es la línea de fracción de la fracción dominante. Por ejemplo,

$$\cfrac{a}{\cfrac{b}{c}} \text{ significa } a \div \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ac}{b} \qquad \text{mientras que} \qquad \cfrac{\cfrac{a}{b}}{c} \text{ significa } \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bc}$$

Sin embargo, es costumbre escribir la primera fracción como $\frac{a}{b/c}$ y la segunda como $\frac{a/b}{c}$.

Problemas

En los Problemas 1 a 3, simplificar las expresiones.

1 (a) $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{5}{7}$ (b) $\frac{3}{4} + \frac{4}{3} - 1$ (c) $\frac{3}{12} - \frac{1}{24}$ (d) $\frac{1}{5} - \frac{2}{25} - \frac{3}{75}$

(e) $3\frac{3}{5} - 1\frac{4}{5}$ (f) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$ (g) $\left(\frac{3}{5} \div \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{1}{9}$ (h) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}}$

2 (a) $\frac{x}{10} - \frac{3x}{10} + \frac{17x}{10}$ (b) $\frac{9a}{10} - \frac{a}{2} + \frac{a}{5}$ (c) $\frac{b + 2}{10} - \frac{3b}{15} + \frac{b}{10}$

(d) $\frac{x + 2}{3} + \frac{1 - 3x}{4}$ (e) $\frac{3}{2b} - \frac{5}{3b}$ (f) $\frac{3a - 2}{3a} - \frac{2b - 1}{2b} + \frac{4b + 3a}{6ab}$

3 (a) $\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}$ (b) $\frac{6x + 25}{4x + 2} - \frac{6x^2 + x - 2}{4x^2 - 1}$

(c) $\dfrac{18b^2}{a^2-9b^2}-\dfrac{a}{a+3b}+2$ (d) $\dfrac{1}{8ab}-\dfrac{1}{8b(a+2)}+\dfrac{1}{b(a^2-4)}$

(e) $\dfrac{2t-t^2}{t+2}\cdot\left(\dfrac{5t}{t-2}-\dfrac{2t}{t-2}\right)$ (f) $2-\dfrac{a\left(1-\frac{1}{2a}\right)}{0{,}25}$

4 Si $x=3/7$ y $y=1/14$, encontrar la forma más sencilla de escribir las siguientes fracciones:

(a) $x+y$ (b) $\dfrac{x}{y}$ (c) $\dfrac{x-y}{x+y}$ (d) $\dfrac{13(2x-3y)}{2x+1}$

5 Reducir las expresiones siguientes para hacer racionales los denominadores:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{x}{\sqrt{3}-2}$

(d) $\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$ (e) $\dfrac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ (f) $\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$

6 Simplificar:

(a) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}-3$ (b) $\dfrac{t}{2t+1}-\dfrac{t}{2t-1}$ (c) $\dfrac{3x}{x+2}-\dfrac{4x}{2-x}-\dfrac{2x-1}{x^2-4}$

(d) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{xy}}$ (e) $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$ (f) $\dfrac{\dfrac{10x^2}{x^2-1}}{\dfrac{5x}{x+1}}$

7 Demostrar que $x^2+2xy-3y^2=(x+3y)(x-y)$, y luego simplificar:

$$\frac{x-y}{x^2+2xy-3y^2}-\frac{2}{x-y}-\frac{7}{x+3y}$$

8 Simplificar las expresiones siguientes:

(a) $n-\dfrac{n}{1-\dfrac{1}{n}}$ (b) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}}{x-\dfrac{2}{x+1}}$

9 Simplificar las expresiones siguientes:

(a) $\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$ (b) $\dfrac{1}{1+x^{p-q}}+\dfrac{1}{1+x^{q-p}}$ (c) $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$

10 Reducir las siguientes fracciones:

(a) $\dfrac{25a^3b^2}{125ab}$ (b) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ (c) $\dfrac{4a^2-12ab+9b^2}{4a^2-9b^2}$ (d) $\dfrac{4x-x^3}{4-4x+x^2}$

A.6 ECUACIONES SENCILLAS Y CÓMO RESOLVERLAS

Algunas ecuaciones se pueden resolver fácilmente. Considérese, por ejemplo, la ecuación $3x+10=28$. Para resolverla, nos preguntamos: ¿Qué número hay que sumarle a 10 para obtener 28? La respuesta es: 18. Así, $3x=18$. Como 3 veces x es 18, x debe ser 6. No hay más soluciones.

Para casos más complicados necesitamos un procedimiento sistemático para resolver ecuaciones. Dos ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones se llaman *equivalentes*. Las reglas más importantes para resolver ecuaciones se resumen a continuación:

Se obtienen ecuaciones equivalentes si en ambos lados del signo de igualdad se hace lo siguiente:

(**a**) sumar el mismo número

(**b**) restar el mismo número (A.22)

(**c**) multiplicar por el mismo número $\neq 0$

(**d**) dividir por el mismo número $\neq 0$

Para resolver ecuaciones sencillas, se puede usar (A.22) como sigue. Primero, se aplican las reglas (**a**) y (**b**) para aislar todos los términos que contengan la incógnita en el mismo lado del signo de igualdad. A continuación, se reducen todos los términos que contienen la incógnita. Finalmente, se usan las reglas (**c**) y (**d**) para despejar la incógnita.

Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.15

Resolver la ecuación $3x + 10 = x + 4$.

Solución: Usando las reglas de (A.22) sistemáticamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}
3x + 10 &= x + 4 \\
3x + 10 - 10 &= x + 4 - 10 \\
3x &= x - 6 \\
3x - x &= x - x - 6 \\
2x &= -6 \\
\frac{2x}{2} &= \frac{-6}{2} \\
x &= -3
\end{aligned}$$

Con experiencia se puede reducir el número de pasos necesarios.

$$3x + 10 = x + 4 \iff 3x - x = 4 - 10 \iff 2x = -6 \iff x = -3$$

La *flecha de equivalencia* $\iff$ significa: “tiene las mismas soluciones que”.

Cuando nos encontramos con ecuaciones más difíciles con paréntesis y fracciones es mejor comenzar multiplicando los términos entre paréntesis y luego multiplicar ambos lados de la ecuación por el denominador común de todas las fracciones. Veamos un ejemplo de este método.

Ejemplo A.16

Resolver la ecuación $6p - \frac{1}{2}(2p - 3) = 3(1 - p) - \frac{7}{6}(p + 2)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
6p - p + \tfrac{3}{2} &= 3 - 3p - \tfrac{7}{6}p - \tfrac{7}{3} \\
36p - 6p + 9 &= 18 - 18p - 7p - 14 \\
55p &= -5 \\
p &= -\frac{5}{55} = -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

Los dos ejemplos siguientes demuestran que es necesario poner mucho cuidado para encontrar las soluciones correctas.

Ejemplo A.17

Resolver la ecuación

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = \frac{2}{x}$$

Solución: La ecuación es equivalente a

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = \frac{2}{x}$$

Véase que $x = 2$ y $x = 0$ no tienen sentido como soluciones de la ecuación, porque algunos denominadores se hacen 0. Si $x \neq 0$ y $x \neq 2$, se pueden multiplicar ambos lados de la ecuación por el denominador común $x(x-2)$, lo que da

$$\frac{x+2}{x-2} \cdot x(x-2) - \frac{8}{x(x-2)} \cdot x(x-2) = \frac{2}{x} \cdot x(x-2)$$

$$(x+2)x - 8 = 2(x-2)$$

$$x^2 + 2x - 8 = 2x - 4$$

$$x^2 = 4$$

Como $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$, los números $x = 2$ y $x = -2$ verifican la última ecuación. Pero como $x = 2$ no tenía sentido como solución de la ecuación original, *sólo* $x = -2$ *es una solución.*

Ejemplo A.18

Resolver la ecuación

$$\frac{z}{z-5} + \frac{1}{3} = \frac{-5}{5-z}$$

Solución: Tenemos que z no puede valer 5. Para recordarlo se escribe

$$\frac{z}{z-5} + \frac{1}{3} = \frac{-5}{5-z} \qquad (z \neq 5)$$

Multiplicando ambos lados por $3(z-5)$ se obtiene

$$3z + z - 5 = 15$$

que tiene una única solución $z = 5$. Como habíamos supuesto $z \neq 5$, se concluye que no existe ninguna solución para esta ecuación.

Con frecuencia, para resolver un problema, especialmente en economía, es necesario antes formular una ecuación algebraica.

Ejemplo A.19

Una compañía fabrica un bien al precio unitario de 20$. La compañía tiene costes fijos de 2.000$. Cada unidad del bien se vende a 75$. ¿Cuántas unidades se deben vender para tener unos beneficios de 14.500$?

Solución: Si designamos por Q al número de unidades fabricadas y vendidas, entonces los ingresos de la compañía son $75Q$ y el coste total de producción es $20Q + 2.000$. Como el beneficio es la diferencia entre ingresos y costes, se puede expresar como

$$75Q - (20Q + 2.000)$$

Se quieren tener beneficios de 14.500$ se debe verificar la ecuación

$$75Q - (20Q + 2.000) = 14.500$$

Es fácil calcular la solución $Q = 16.500/55 = 300$ unidades.

Problemas

En los Problemas 1 a 3, resolver las ecuaciones.

1 (a) $5x - 10 = 15$ (b) $2x - (5 + x) = 16 - (3x + 9)$
(c) $-5(3x - 2) = 16(1 - x)$ (d) $4x + 2(x - 4) - 3 = 2(3x - 5) - 1$
(e) $\frac{2}{3}x = -8$ (f) $(8x - 7)5 - 3(6x - 4) + 5x^2 = (x + 1)(5x + 2)$
(g) $x^2 + 10x + 25 = 0$ (h) $(3x - 1)^2 + (4x + 1)^2 = (5x - 1)(5x + 1) + 1$

2 (a) $3x + 2 = 11$ (b) $-3x = 21$ (c) $3x = \dfrac{1}{4}x - 7$
(d) $\dfrac{x - 3}{4} + 2 = 3x$ (e) $\dfrac{1}{2x + 1} = \dfrac{1}{x + 2}$ (f) $\sqrt{2x + 14} = 16$

3 (a) $\dfrac{x - 3}{x + 3} = \dfrac{x - 4}{x + 4}$ (b) $\dfrac{3}{x - 3} - \dfrac{2}{x + 3} = \dfrac{x^2}{x^2 - 9} - 1$ (c) $\dfrac{6x}{5} - \dfrac{5}{x} = \dfrac{2x - 3}{3} + \dfrac{8x}{15}$

4 Resolver los siguientes problemas escribiendo antes una ecuación:
(a) La suma de dos veces un número y 5 es igual a la diferencia entre el número y 3. Hallar el número.
(b) La suma de tres números naturales consecutivos es 10 más dos veces el menor de ellos.
(c) Ann cobra doble paga por cada hora que trabaja por encima de 38 a la semana. La semana pasada trabajó 48 horas y ganó 812$. ¿Cuál es su paga por hora?
(d) John invirtió 15.000$ a un tipo de interés anual del 10%. ¿Cuánto dinero adicional debe invertir al tipo de interés del 12% si quiere ganar al final del año 2.100$ en intereses?
(e) Cuando Mr. Barne murió, su fortuna se dividió de la siguiente manera: $2/3$ para su esposa, $1/4$ para sus hijos y el resto, 1.000$, para una asociación de beneficencia. ¿A cuánto ascendía su fortuna?

5 Resolver las siguientes ecuaciones:
(a) $\dfrac{3y - 1}{4} - \dfrac{1 - y}{3} + 2 = 3y$ (b) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x + 2} = \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x} + \dfrac{7}{2x + 4}$
(c) $\dfrac{2 - \dfrac{z}{1 - z}}{1 + z} = \dfrac{6}{2z + 1}$ (d) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{2} - \dfrac{3}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{p}{3}\right) - \dfrac{1}{3}(-p + 1) = -\dfrac{1}{3}$

6 Se puede llenar una piscina mediante tres grifos distintos en 20, 30 y 60 minutos, respectivamente. ¿Cuánto se tardará si se llena la piscina usando los tres a la vez?

A.7 DESIGUALDADES

Los números reales se dividen en números positivos, el 0, y números negativos. Si a es un número positivo, se escribe $a > 0$ (ó $0 < a$), y se dice que a es mayor que cero. Una propiedad fundamental de los números positivos es que

$$a > 0 \text{ y } b > 0 \text{ implica que } a + b > 0 \text{ y } a \cdot b > 0 \qquad \text{(A.23)}$$

Si c es un número negativo, se escribe $c < 0$ (ó $0 > c$).

En general, se dice que *el número a es mayor que el número b*, y se escribe $a > b$ (ó $b < a$), si $a - b$ es positivo:

$$a > b \qquad \text{significa que} \qquad a - b > 0 \tag{A.24}$$

Así $4{,}11 > 3{,}12$ porque $4{,}11 - 3{,}12 = 0{,}99 > 0$ y $-3 > -5$ porque $-3 - (-5) = 2 > 0$. En la recta numérica (véase Figura A.3) $a > b$ significa que a está a la derecha de b.

Cuando $a > b$, se dice también que *a es estrictamente mayor que b* para realzar que no se permite $a = b$. Si $a > b$ ó $a = b$, entonces se escribe $a \geq b$ (ó $b \leq a$) y se dice que a es *mayor o igual que b*.

$$a \geq b \qquad \text{significa que} \qquad a - b \geq 0 \tag{A.25}$$

Por ejemplo, $4 \geq 4$ y $4 \geq 2$. Nótese en particular que *es* correcto escribir $4 \geq 2$, porque $4 - 2$ *es* positivo o cero.

Se pueden probar bastantes propiedades importantes de $>$ y $\geq$. Por ejemplo,

$$a > b \text{ y } c \text{ arbitrario implica que } a + c > b + c \tag{A.26}$$

La demostración es sencilla: para toda terna de números a, b, c es $(a+c)-(b+c) = a+c-b-c = a - b$. Así, si $a - b > 0$, entonces $a + c - (b + c) > 0$ y se deduce la conclusión de (A.24). Se puede ver un ejemplo del caso $c < 0$ en la Figura A.3.



FIGURA A.3

Aun a riesgo de caer en lo trivial, hay otra interpretación de (A.26). Si en un cierto día la temperatura en París es mayor que en Londres, y la temperatura en ambas ciudades aumenta (o disminuye) el mismo número de grados, entonces la nueva temperatura de París sigue siendo mayor que la de Londres.

La propiedad (A.26) es básica para saber cuándo se verifica una desigualdad.

Ejemplo A.20

Hallar los valores de x que verifican $2x - 5 > x - 3$.

Solución: Sumando 5 en ambos lados de la desigualdad se tiene

$$2x - 5 + 5 > x - 3 + 5 \qquad \text{ó} \qquad 2x > x + 2$$

Sumando $(-x)$ es $2x - x > x - x + 2$, luego la solución es $x > 2$.

Otras propiedades de las desigualdades

Las siguientes propiedades son necesarias para trabajar con desigualdades más difíciles:

$$a > b \;\text{ y }\; b > c \implies a > c \tag{A.27}$$
$$a > b \;\text{ y }\; c > 0 \implies ac > bc \tag{A.28}$$
$$a > b \;\text{ y }\; c < 0 \implies ac < bc \tag{A.29}$$
$$a > b \;\text{ y }\; c > d \implies a + c > b + d \tag{A.30}$$

Cuando se cambia el signo $>$ por $\geq$, se verifican las propiedades análogas. Estas cuatro propiedades se deducen fácilmente de (A.23). Por ejemplo, (A.29) se prueba así. Supongamos que $a > b$ y $c < 0$. Entonces, $a - b > 0$ y $-c > 0$. Por (A.23), $(a - b)(-c) > 0$ y $-ac + bc > 0$. Por tanto, $ac < bc$.

Según (A.28), si se multiplica una desigualdad por un número positivo, el sentido de la desigualdad no cambia. Por otra parte, según (A.29), *si se multiplica una desigualdad por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad.* Es importante entender estas reglas y darse cuenta de que se corresponden con la experiencia diaria. Por ejemplo, (A.28) se puede interpretar de esta forma: Dados dos rectángulos con la misma base, el que tenga mayor altura será el que tenga mayor área.

Diagramas de signos

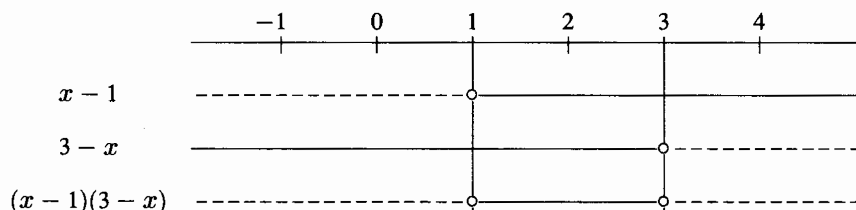
Con frecuencia se necesita saber los valores de una variable para los que se verifica una desigualdad dada.

Ejemplo A.21

Comprobar si la desigualdad $(x-1)(3-x)>0$ se verifica para $x=-3$, $x=2$ y $x=5$. Hallar a continuación todos los valores de x que verifican la misma desigualdad.

Solución: Para $x=-3$, se tiene $(x-1)(3-x)=(-4)\cdot 6=-24<0$; para $x=2$, $(x-1)(3-x)=1\cdot 1=1>0$ y para $x=5$, es $(x-1)(3-x)=4\cdot(-2)=-8<0$. Así la desigualdad se verifica para $x=2$, pero no para $x=-3$ ó $x=5$.

Para hallar el conjunto completo de soluciones, usaremos un diagrama de signos. La variación de signo para cada factor del producto está determinada. Por ejemplo, el factor $x-1$ es negativo cuando $x<1$, es 0 cuando $x=1$, y es positivo cuando $x>1$. Esta variación del signo se representa en el diagrama de más abajo. La línea discontinua a la izquierda de la línea vertical $x=1$ indica que $x-1<0$ si $x<1$; el círculo pequeño indica que $x-1=0$ cuando $x=1$; y el trazo continuo a la derecha de $x=1$ indica que $x-1>0$ si $x>1$. Análogamente, se representa la variación de signo para $3-x$. La variación de signo del producto se calcula como sigue. Cuando $x<1$, $x-1$ es negativo y $3-x$ es positivo, luego el producto es negativo. Cuando $1<x<3$, ambos factores son positivos, luego el producto es positivo. Cuando $x>3$, $x-1$ es positivo y $3-x$ es negativo, luego el producto es negativo. Conclusión: El conjunto de soluciones está formado por aquellos x mayores que 1, pero menores que 3. Así, $(x-1)(3-x)>0$ si y sólo si $1<x<3$.



Ejemplo A.22

Hallar el conjunto de soluciones de

$$\frac{2p-3}{p-1}>3-p$$

Solución: Se puede estar tentado de empezar multiplicando los dos lados de la desigualdad por $p-1$. Si lo hacemos así debemos distinguir dos casos, $p-1>0$ y $p-1<0$. Si se multiplica por $p-1$ cuando $p-1<0$, hay que invertir el signo de desigualdad. Se puede usar un método alternativo, que hace innecesario distinguir entre los dos casos. Si se suma $p-3$ en ambos

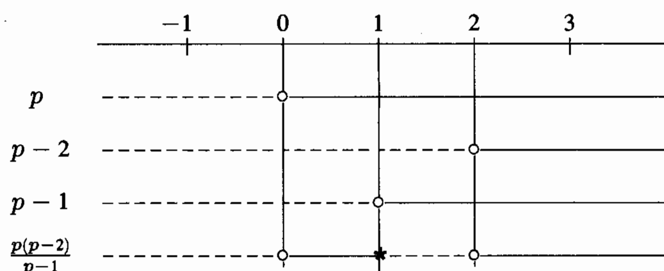
lados, da

$$\frac{2p-3}{p-1}+p-3>0$$

Tomando $p-1$ como denominador común,

$$\frac{2p-3+(p-3)(p-1)}{p-1}>0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{p(p-2)}{p-1}>0$$

porque $2p-3+(p-3)(p-1)=2p-3+p^2-4p+3=p^2-2p=p(p-2)$. Para hallar las soluciones de esta desigualdad, usaremos un diagrama de signos. La variación de signo de $p(p-2)/(p-1)$ está determinada en función de las variaciones de signo de p, $p-2$, y $p-1$. Por ejemplo, si $0<p<1$, entonces p es positivo y $(p-2)$ es negativo, luego $p(p-2)$ es negativo. Pero $p-1$ también es negativo en ese intervalo, luego $p(p-2)/(p-1)$ es positivo. Razonando de esta forma para todos los intervalos relevantes, llegamos a la siguiente conclusión: La fracción $p(p-2)/(p-1)$ es positiva si y sólo si $0<p<1$ ó $p>2$. La desigualdad original no tiene sentido cuando $p=1$; esto se indica en el diagrama con un asterisco. Así, el conjunto de soluciones pedido es $0<p<1$ ó $p>2$.

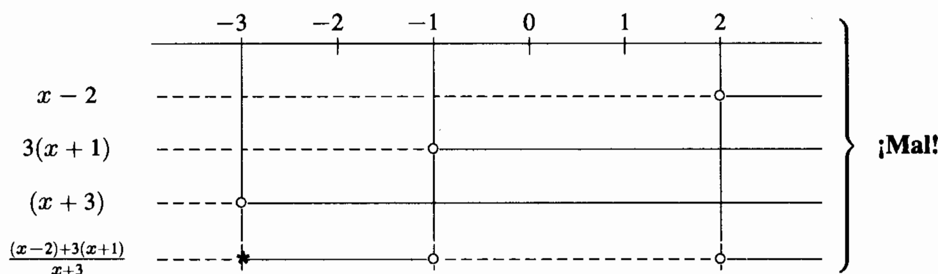


Aviso 1: El error más frecuente que se comete al resolver desigualdades es precisamente el que se ha indicado en el Ejemplo A.22: Si se multiplica por $p-1$, la desigualdad no cambia de signo *sólo* si $p-1$ es positivo, esto es, si $p>1$.

Aviso 2: Es vital entender el método de los diagramas de signos. El siguiente ejemplo muestra un error común. Hallar el conjunto de soluciones de

$$\frac{(x-2)+3(x+1)}{x+3}\leq 0$$

"Solución": Se construye el diagrama de signos:



Según este diagrama, la desigualdad se verifica para $x<-3$ y para $-1\leq x\leq 2$. Sin embargo, para $x=-4$ (<-3), la fracción vale 15, que es positivo. ¿Qué ha ido mal? Supongamos que $x<-3$. Entonces $x-2<0$ y $3(x+1)<0$ y, por tanto, el numerador $(x-2)+3(x+1)$ es negativo.

Como el denominador $x+3$ también es negativo para $x<-3$, la fracción es positiva. La variación de signo para la fracción en el diagrama es, por tanto, absolutamente errónea. Se calcula la solución correcta si se agrupan términos en el numerador para que la desigualdad quede $(4x+1)/(x+3)\leq 0$. El diagrama de signos de esta desigualdad da la respuesta, que es $-3<x\leq -1/4$.

Desigualdades dobles

Dos desigualdades que se verifican simultáneamente se suelen escribir juntas como una doble desigualdad. Si, por ejemplo, $a\leq z$ y además $z<b$, es natural escribir $a\leq z<b$. Por otra parte, si $a\leq z$ y $z>b$, como no se sabe cuál es el mayor entre a y b, no se puede escribir $a\leq b<z$ ó $b\leq a\leq z$, y *no* se escribe $a\leq z>b$.

Ejemplo A.23

Un día dado, la temperatura mínima en una cierta ciudad fue de 50°F, y la máxima de 77°F. ¿Cuál fue la variación de temperatura en grados Celsius? Si F designa grados Fahrenheit y C grados Celsius, entonces $F=\frac{9}{5}C+32$.

Solución:

$$\begin{aligned} 50 &\leq F\leq 77\\ 50 &\leq \tfrac{9}{5}C+32\leq 77\\ 50-32 &\leq \tfrac{9}{5}C\leq 77-32\\ 18 &\leq \tfrac{9}{5}C\leq 45\\ 90 &\leq 9C\leq 225\\ 10 &\leq C\leq 25 \end{aligned}$$

La temperatura varió entre 10 y 25°C.

Problemas

1 Decir cuáles de las siguientes desigualdades son ciertas.

(a) $-6{,}15>-7{,}16$ (b) $6\geq 6$ (c) $(-5)^2\leq 0$ (d) $-\frac{1}{2}\pi<-\frac{1}{3}\pi$

(e) $\dfrac{4}{5}>\dfrac{6}{7}$ (f) $2^3<3^2$ (g) $2^{-3}<3^{-2}$ (h) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}<\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}$

Encontrar los conjuntos de soluciones de las desigualdades en los problemas 2 a 5.

2 (a) $3x+5<x-13$ (b) $3x-(x-1)\geq x-(1-x)$ (c) $\dfrac{2x-4}{3}\leq 7$

(d) $\frac{1}{3}(1-x)\geq 2(x-3)$ (e) $\dfrac{t}{24}-(t+1)+\dfrac{3t}{8}<\dfrac{5}{12}(t+1)-\dfrac{7}{6}$ (f) $\dfrac{x+2}{x+4}\leq 3$

3 (a) $\dfrac{x+2}{x-1}<0$ (b) $\dfrac{2x+1}{x-3}>1$ (c) $5a^2\leq 125$

(d) $2<\dfrac{3x+1}{2x+4}$ (e) $\dfrac{120}{n}+1{,}1\leq 1{,}85$ (f) $g^2-2g\leq 0$

(g) $\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{3}{p^2-4p+4}\geq 0$ (h) $\dfrac{-n-2}{n+4}>2$ (i) $x^4<x^2$

4 (a) $(x-1)(x+4)>0$ (b) $(x-1)^2(x+4)>0$ (c) $(x-1)(x-2)(x-3)\leq 0$

(d) $(5x-1)^{10}(x-1)<0$ (e) $(5x-1)^{11}(x-1)<0$ (f) $\dfrac{3x-1}{x}>x+3$

(g) $\dfrac{x-3}{x+3} < 2x - 1$ (h) $x^2 + 4x - 5 \leq 0$ (i) $-\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 6x \leq 0$

5 (a) $1 \leq \frac{1}{3}(2x-1) + \frac{8}{3}(1-x) < 16$ (b) $-5 < \dfrac{1}{x} < 0$ (c) $\dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} \geq 1$

6 Decir cuáles de las siguientes desigualdades son verdaderas para todo x e y:

(a) $x + 1 > x$ (b) $x^2 > x$ (c) $x + x > x$ (d) $x^2 + y^2 \geq 2xy$

7 En Zimbabwe, en 1993, el alquiler de un teléfono costaba aproximadamente 120$ anuales y 0,167$ cada paso.

(a) ¿Cuál es el coste total en un año en que se hicieron llamadas por x pasos?

(b) ¿Cuál es el menor y el mayor número de pasos que se pueden gastar si se quiere que la factura telefónica esté entre 170,10 y 186,80 dólares?

8 (a) La temperatura de almacenamiento de las patatas debe estar 4 y 6°C. ¿Cuál es la temperatura correspondiente en grados Fahrenheit?

(b) Se puede garantizar que la leche se conserva fresca en botella 7 días si se guarda a una temperatura entre 36 y 40°F. Hallar la variación de temperatura en grados Celsius.

A.8 ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO

En esta Sección se repasará el método de resolución de ecuaciones cuadráticas. Un ejemplo de ecuación cuadrática es $12x^2 - 16x - 3 = 0$. Por supuesto, podríamos tratar de hallar los valores de x que verifican la ecuación mediante prueba y error. Sin embargo, no es nada fácil hallar las dos únicas soluciones, que son $x = 3/2$ y $x = -1/6$.

Nota: Los métodos que hemos usado hasta ahora para resolver ecuaciones se basan sobre todo en (A.22) de la Sección A.6. Muchos estudiantes tratan de usar ideas parecidas para resolver las ecuaciones cuadráticas como $12x^2 - 16x - 3 = 0$. Éste es un ejemplo: $12x^2 - 16x - 3 = 0$, luego $12x^2 - 16x = 3$ y $2x(6x - 8) = 3$. Por tanto, el producto de $2x$ y $6x - 8$ debe ser 3. Pero como hay infinitas parejas de números cuyo producto es 3, este método no es útil para hallar x.

Otros estudiantes intentan primero dividir por x. Entonces $12x^2 - 16x - 3 = 0$ da $12x - 16 = 3/x$. Como la incógnita x aparece ahora en los dos lados de la ecuación no podemos continuar. Evidentemente, necesitamos una idea completamente nueva para hallar las soluciones de este tipo de ecuaciones.

La ecuación cuadrática general tiene la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{A.31}$$

donde a, b, c son constantes y x es la incógnita. Algunos ejemplos sencillos son:

(a) $x^2 - 4 = 0$ $(a = 1, b = 0, \text{ y } c = -4)$

(b) $5x^2 - 8x = 0$ $(a = 5, b = -8, \text{ y } c = 0)$

(c) $x^2 + 3 = 0$ $(a = 1, b = 0, \text{ y } c = 3)$

En cada caso, estamos interesados en calcular las soluciones (si existen).

(a) La ecuación es $x^2 = 4$ y así $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, lo que significa que x es, bien 2, bien -2. De otra forma: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = 0$, luego $x = 2$ ó $x = -2$.

(b) En este caso x se puede sacar como factor común y queda $x(5x - 8) = 0$. Pero el producto de dos números es 0 si y sólo si al menos uno de los factores es 0. Por tanto hay dos posibilidades. Bien $x = 0$, bien $5x - 8 = 0$, luego $x = 0$ ó $x = 8/5$.

(c) Como x^2 es siempre ≥ 0, la ecuación $x^2 + 3 = 0$ no tiene solución.

Veamos ahora dos ejemplos de ecuaciones más difíciles de resolver.

Ejemplo A.24

$$x^2 + 8x - 9 = 0 \tag{1}$$

Es natural comenzar pasando el 9 a la derecha

$$x^2 + 8x = 9 \tag{2}$$

Sin embargo, como x aparece en dos términos, no es obvio cómo continuar. Uno de los artificios más antiguos de las matemáticas, llamado el método de *completar el cuadrado*, funciona en este caso. Para ver cómo, recuérdese de (A.10) que

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \tag{$*$}$$

donde $x^2 + 2ax + a^2$ se llama un *cuadrado completo.* Fijémonos en la expresión $x^2 + 8x$ de la izquierda de (2), ¿qué hay que sumarle para hacerla un cuadrado completo? Comparando el lado de la izquierda de (2) con el lado de la derecha de ($*$), se debería tener $2a = 8$ y, por tanto, $a = 4$. Así, $a^2 = 4^2$, y sumando 4^2 al lado izquierdo de (2), se completa $x^2 + 8x$ para obtener

$$x^2 + 8x + 4^2 = (x + 4)^2$$

Si se añade 4^2 en ambos lados de (2), se obtiene una ecuación que tiene las mismas soluciones que (2) y, aún más, tal que el lado de la izquierda es un cuadrado completo.

$$x^2 + 8x + 4^2 = 9 + 4^2$$

Así, (2) es equivalente a

$$(x + 4)^2 = 25 \tag{3}$$

La ecuación $z^2 = 25$ tiene dos soluciones, $z = \sqrt{25} = 5$ y $z = -\sqrt{25} = -5$. Así, de (3), bien $x + 4 = 5$, bien $x + 4 = -5$. Las soluciones de la ecuación (1) son, por tanto, $x = 1$ y $x = -9$.

La ecuación (3) se puede escribir como

$$(x + 4)^2 - 5^2 = 0 \tag{4}$$

Entonces, usando la fórmula de la diferencia de cuadrados de (A.12), se tiene

$$(x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = 0 \qquad \text{ó} \qquad (x - 1)(x + 9) = 0$$

Luego tenemos la siguiente *factorización* del lado de la izquierda de (1):

$$x^2 + 8x - 9 = (x - 1)(x + 9)$$

Ejemplo A.25

Resolver

$$12x^2 - 16x - 3 = 0$$

y factorizar el término de la izquierda.

Solución: La ecuación dada es equivalente a

$$12\left(x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{1}{4}\right) = 0 \tag{1}$$

Esta ecuación tiene obviamente las mismas soluciones que

$$x^2 - \tfrac{4}{3}x = \tfrac{1}{4} \tag{2}$$

Completemos el cuadrado para $x^2 - \frac{4}{3}x = x^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)x$. La mitad del coeficiente de x es $-\frac{2}{3}$, luego sumamos el cuadrado de $-\frac{2}{3}$ a ambos lados de (2), obteniendo así

$$x^2 - \tfrac{4}{3}x + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{1}{4} + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{9}$$

$$\left(x - \tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{25}{36} \tag{3}$$

Por tanto, $x - \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$ ó $x - \frac{2}{3} = -\sqrt{\frac{25}{36}} = -\frac{5}{6}$. Las dos soluciones son $x = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$.

Como se vio en el Ejemplo A.24, se observa que (3) se puede escribir como

$$\left(x - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{6}\right)\left(x - \tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{6}\right) = 0 \qquad \text{ó} \qquad \left(x - \tfrac{3}{2}\right)\left(x + \tfrac{1}{6}\right) = 0$$

La factorización que se obtiene es

$$12\left(x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{1}{4}\right) = 12\left(x - \tfrac{3}{2}\right)\left(x + \tfrac{1}{6}\right) \tag{4}$$

Se puede verificar que es correcta desarrollando el producto de la derecha.

El caso general

Aplicaremos ahora el método general de completar el cuadrado a la ecuación cuadrática general (A.31). Empezamos por sacar factor común el coeficiente de x^2, de forma que (A.31) queda

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \tag{A.32}$$

Como $a \neq 0$ esta ecuación tiene las mismas soluciones que

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

La mitad del coeficiente de x es $b/2a$. Sumando el cuadrado de este número en cada lado de la ecuación da

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

ó

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{A.33}$$

Nótese que $a^2 > 0$ y, si $b^2 - 4ac < 0$, entonces el término de la derecha de (A.33) es negativo. Como $(x + b/2a)^2$ no es negativo para ningún x, se concluye que, si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación (A.33) no tiene soluciones. Por otra parte, si $b^2 - 4ac \geq 0$, entonces, por (A.33), existen dos posibilidades

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{ó} \qquad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En resumen:

Para $b^2 - 4ac \geq 0$, $a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{A.34}$$

Es rentable gastar unos minutos en memorizar esta fórmula. Una vez que se sabe, se pueden escribir directamente las soluciones de toda ecuación cuadrática. Únicamente si $b^2 - 4ac \geq 0$, se obtienen soluciones reales. Si $b^2 - 4ac < 0$, aparece la raíz cuadrada de un número negativo y no existen soluciones reales.

Ejemplo A.26

Usar (A.34) para hallar las soluciones de

$$2x^2 - 4x - 7 = 0$$

Solución: Escríbase la ecuación en la forma $2x^2 + (-4)x + (-7) = 0$. Como $a = 2$, $b = -4$, y $c = -7$, la fórmula (A.34) da

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 56}}{4}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{72}}{4} = \frac{4 \pm 6\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Las soluciones son $x = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ y $x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Supongamos que $b^2 - 4ac \geq 0$. Usando la fórmula de la diferencia de cuadrados como se hizo en los Ejemplos A.24 y A.25, se deduce que (A.33) es equivalente a

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \tag{A.35}$$

Si se denotan las dos soluciones en (A.34) por x_1 y x_2, la ecuación (A.35) se puede escribir como $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Así, $x^2 + (b/a)x + c/a = (x - x_1)(x - x_2)$. Por tanto:

Supuesto que $b^2 - 4ac \geq 0$ y $a \neq 0$, se tiene

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{A.36}$$

donde $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Este resultado es muy importante, porque muestra cómo factorizar una función cuadrática general. Si $b^2 - 4ac < 0$ no existe ninguna factorización de $ax^2 + bx + c$.

Desarrollando el término de la derecha de $x^2 + (b/a)x + c/a = (x - x_1)(x - x_2)$ da $x^2 + (b/a)x + c/a = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$. Igualando los coeficientes de las potencias de x, se tiene $x_1 + x_2 = -b/a$ y $x_1x_2 = c/a$. Así,

Si x_1 y x_2 son las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x_1 + x_2 = -b/a \quad \text{y} \quad x_1x_2 = c/a \tag{A.37}$$

Ejemplo A.27

Factorizar (si es posible) los siguientes polinomios de segundo grado:

$$\textbf{(a)}\ \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{14}{3} \qquad \textbf{(b)}\ -2x^2 + 40x - 600$$

Solución:

(**a**) Para $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{14}{3} = 0$, se tiene $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, y $c = -\frac{14}{3}$, luego (A.34) da

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{(\frac{2}{3})^2 - 4 \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{14}{3})}}{2 \cdot (\frac{1}{3})} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{56}{9}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{60}/3}{\frac{2}{3}} = \frac{-2 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -1 \pm \sqrt{15}$$

Las soluciones son $x_1 = -1 + \sqrt{15}$ y $x_2 = -1 - \sqrt{15}$, luego, por (A.36)

$$\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{14}{3} = \tfrac{1}{3}\left[x - (-1 + \sqrt{15})\right]\left[x - (-1 - \sqrt{15})\right]$$

(**b**) Para $-2x^2 + 40x - 600 = 0$, $a = -2$, $b = 40$, y $c = -600$, luego $b^2 - 4ac = 1.600 - 4.800 = -3.200$. Por tanto, no existe ninguna factorización como (A.36) en este caso.

Nota: La fórmula general para la solución de la ecuación de segundo grado es muy útil. Sin embargo, si b ó c son 0, no es necesario usar la fórmula.

1. Si $ax^2 + bx = 0$ (la ecuación no tiene término independiente), se puede factorizar la ecuación como $x(ax + b) = 0$, que da las soluciones $x = 0$ y $x = -b/a$ directamente.
2. Si $ax^2 + c = 0$ (la ecuación no tiene término en x), entonces $a(x^2 + c/a) = 0$ y hay dos posibilidades. Si $c/a > 0$, entonces la ecuación $x^2 + c/a = 0$ no tiene soluciones. Si $c/a < 0$, entonces las soluciones son $x = \pm\sqrt{-c/a}$.

Problemas

1 Resolver las siguientes ecuaciones (si tienen soluciones):

(a) $15x - x^2 = 0$ (b) $p^2 - 16 = 0$ (c) $(q - 3)(q + 4) = 0$

(d) $2x^2 + 9 = 0$ (e) $x(x + 1) = 2x(x - 1)$ (f) $x^2 - 4x + 4 = 0$

2 Resolver las siguiente ecuaciones por el método de completar el cuadrado, y factorizar (si es posible) el término de la izquierda:

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (b) $y^2 - y - 12 = 0$ (c) $2x^2 + 60x + 800 = 0$

(d) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ (e) $m(m - 5) - 3 = 0$ (f) $0{,}1p^2 + p - 2{,}4 = 0$

3 Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas

(a) $r^2 + 11r - 26 = 0$ (b) $3p^2 + 45p = 48$ (c) $20.000 = 300K - K^2$

(d) $r^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})r = \sqrt{6}$ (e) $0{,}03x^2 - 0{,}009x = 0{,}012$ (f) $\dfrac{1}{24} = p^2 - \dfrac{1}{12}p$

4 Resolver las siguientes ecuaciones por la fórmula (A.34):

(a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (b) $5t^2 - t = 3$ (c) $6x = 4x^2 - 1$

(d) $9x^2 + 42x + 44 = 0$ (e) $30.000 = x(x + 200)$ (f) $3x^2 = 5x - 1$

5 Hallar la longitud de los lados del rectángulo cuyo perímetro es 40 cm y cuya área es 75 cm^2.

(a) Hallar dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 13.

(b) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 34 cm. Uno de los catetos mide 14 cm más que el otro. Hallar la longitud de los catetos

(c) Un motorista conduce 80 km. Para ahorrar 16 minutos, tuvo que conducir 10 km/h más rápido de lo habitual. ¿Cuál es su velocidad de conducción normal?

6 Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x^3 - 4x = 0$ (b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (c) $z^{-2} - 2z^{-1} - 15 = 0$

7 Probar la fórmula (A.34) de la siguiente forma. Multiplíquese la ecuación (A.31) por $4a$; reordenando los términos, se tiene $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$. Sumando b^2 en ambos lados, el lado de la izquierda es un cuadrado completo.

A.9 DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

En esta Sección repasaremos algunos métodos para resolver ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo A.28

Hallar los valores de x e y que verifican las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 3x - 4y &= -7 \end{aligned} \tag{1}$$

Supongamos que hacemos $x = 0$ en la primera ecuación; entonces $y = 6$. Dados $x = 0$ e $y = 6$, es $2x + 3y = 18$ y $3x - 4y = -24$. Así, se verifica la primera ecuación de (1) pero no la segunda. Por tanto $x = 0$ y $y = 6$ *no* es una solución de (1). Solamente con mucha suerte se pueden encontrar las soluciones de (1) por el método de prueba y error.

Afortunadamente, existen métodos más sistemáticos para resolver (1).

Método 1: Primero se despeja una variable en función de la otra en una ecuación, y se sustituye el resultado en la otra ecuación. Ésta última es entonces una ecuación en una variable que se resuelve fácilmente.

Para aplicar este método a (1), se despeja primero y en función de x: $2x + 3y = 18$ implica que $3y = 18 - 2x$ e $y = 6 - \frac{2}{3}x$. Sustituyendo esta expresión de y en la segunda ecuación de (1) da

$$\begin{aligned} 3x - 4\left(6 - \tfrac{2}{3}x\right) &= -7 \\ 3x - 24 + \tfrac{8}{3}x &= -7 \\ 9x - 72 + 8x &= -21 \\ 17x &= 51 \end{aligned}$$

Por tanto $x = 3$. Entonces se halla y usando otra vez que $y = 6 - \frac{2}{3}x$, lo que implica que $y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 4$. La solución de (1) es $x = 3$ e $y = 4$. Las soluciones se deben comprobar siempre, por sustitución directa.

Método 2: Este método se basa en eliminar una de las variables sumando o restando un múltiplo de una ecuación a la otra. Para el sistema (1), supongamos que se quiere eliminar y (un

método parecido se puede usar para eliminar x). Si se multiplica la primera ecuación de (1) por 4 y la segunda por 3, entonces los coeficientes de los términos en y en ambas ecuaciones serán iguales, salvo cambio de signo. Si se suman las ecuaciones transformadas, se tiene

$$\begin{array}{rcr} 8x + 12y &=& 72 \\ 9x - 12y &=& -21 \\ \hline 17x &=& 51 \end{array} \tag{2}$$

Por tanto, $x = 3$. Para hallar el valor de y, se sustituye x por 3 en cualquiera de las ecuaciones originales y se resuelve en y. Esto da $y = 4$, lo que está de acuerdo con el resultado previo.

Algunas personas prefieren calcular x e y usando el siguiente método:

$$\begin{array}{rcl|c|c|} 2x + 3y &=& 18 & 4 & 3 \\ 3x - 4y &=& -7 & 3 & -2 \end{array} \tag{3}$$

La primera columna a la derecha de (3) indica que se debe multiplicar la primera ecuación por 4 y la segunda por 3. Esto conduce a la suma de (2). La segunda columna de la derecha de (3) indica que se debe multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por -2. Haciendo esto da

$$\begin{array}{rcl} 6x + \ 9y &=& 54 \\ -6x + \ 8y &=& 14 \\ \hline 17y &=& 68 \\ y &=& 4 \end{array}$$

Para finalizar esta Sección, usaremos el método de eliminación para resolver un sistema general de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned} \tag{A.38}$$

En este caso, a, b, c, d, e, y f son números arbitrarios dados, mientras que x y y son las incógnitas. Si se pone $a = 2$, $b = 3$, $c = 18$, $d = 3$, $e = -4$, y $f = -7$, entonces (A.38) se reduce al sistema (1). Usando el método de eliminación para el caso general, se tiene

$$\begin{array}{rcl|c|c|} ax + by &=& c & e & d \\ dx + ey &=& f & -b & -a \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} aex + bey &=& ce \\ -bdx - bey &=& -bf \\ \hline (ae - bd)x &=& ce - bf \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} adx \quad + bdy &=& cd \\ -adx \quad - aey &=& -af \\ \hline (bd - ae)y &=& cd - af \end{array}$$

lo que da

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \qquad y = \frac{cd - af}{bd - ae} = \frac{af - cd}{ae - bd} \tag{A.39}$$

Estas expresiones dan soluciones para x e y.

Las fórmulas de (A.39) no funcionan si $ae - bd$ es igual a 0. Este caso requiere un estudio especial —véase la Sección 14.3.

Problemas

1 Resolver cada uno de los sistemas de dos ecuaciones siguientes:

(a) $\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x + y &= 11 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 4x - 3y &= 1 \\ 2x + 9y &= 4 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 2{,}1 \\ 5x - 6y &= 7{,}3 \end{aligned}$

2 Resolver cada uno de los sistemas de dos ecuaciones siguientes:

(a) $\begin{aligned} 2K + L &= 11{,}35 \\ K + 4L &= 25{,}8 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 230p + 450q &= 1.810 \\ 100p + 150q &= 650 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 0{,}01r + 0{,}21s &= 0{,}042 \\ -0{,}25r + 0{,}55s &= -0{,}47 \end{aligned}$

3 (a) Hallar dos números cuya suma sea 52 y cuya diferencia sea 26.

(b) Cinco mesas y veinte sillas cuestan 1.800$, mientras que 2 mesas y 3 sillas cuestan 420$. ¿Cuál es el precio por unidad de las sillas y las mesas?

(c) Una compañía fabrica un bien de dos calidades, A y B. La estimación de ventas del año venidero para A es 50% superior a la estimación de ventas para B. El beneficio por unidad vendida de cada calidad es de 300$ para A y 200$ para B. Si el objetivo de beneficios para el año es de 13.000$, ¿cuántas unidades de cada calidad se debe producir?

(d) Una persona ha ahorrado 10.000$ en dos cuentas. Los tipos de interés son del 5 y del 7,2% anual, respectivamente. Se sabe que los intereses en un año son de 676$. ¿Cuál es el saldo en cada cuenta?

B

Sumas, productos e inducción

—Los matemáticos son como amantes . . .
aceptan el principio más inocente
—el matemático infiere de él una
conclusión que también tú debes aceptar
y de esta conclusión otra . . .
—Fontenelle (1657–1757)

B.1 NOTACIÓN SUMATORIA

Supongamos que estamos interesados en la población de un país que está dividido en 6 regiones. Designemos por N_i a la población de la región i. Entonces

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$$

es la población total. Es conveniente tener una notación abreviada para estas sumas tan largas. Se usa la letra griega Σ, sigma mayúscula, como **símbolo de sumatorio**. La suma anterior se escribe en la forma

$$\sum_{i=1}^{6} N_i$$

Esta expresión se lee "la suma desde $i = 1$ hasta $i = 6$ de N_i". Supongamos en general que hay n regiones. Entonces

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n \tag{1}$$

es una notación para la población total. Aquí $\cdots$ indica que se repite el mismo patrón obvio. En notación de sumatorio se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} N_i$$

Esta notación nos indica que se debe formar la suma de todos los términos cuando se sustituye i por enteros sucesivos, empezando con $i = 1$ y acabando con $i = n$. El símbolo i se llama el **índice de**

sumatorio. Es una "variable muda" que se puede cambiar por cualquier letra (que no se haya usado para otra cosa). Así, $\sum_{j=1}^{n} N_j$ y $\sum_{i=1}^{n} N_i$ representan la misma suma (1).

Los límites superior e inferior del sumatorio pueden cambiar. Por ejemplo,

$$\sum_{i=30}^{35} N_i = N_{30} + N_{31} + N_{32} + N_{33} + N_{34} + N_{35}$$

es la población total de las seis regiones numeradas de 30 a 35.

Más generalmente, si p y q son enteros con $q \geq p$, entonces

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$$

designa la suma de los términos que resultan cuando se sustituye i por enteros sucesivos, empezando con $i = p$ y terminando con $i = q$.

Si el límite inferior y superior son iguales, entonces la "suma" se reduce a un término. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{1} N_i = N_1, \qquad \sum_{i=3}^{3} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Si el límite superior es menor que el límite inferior, no hay ningún término, luego la "suma" es cero.

Ejemplo B.1

Calcular las siguientes sumas:

$$\textbf{(a)} \sum_{i=1}^{5} i^2 \qquad \textbf{(b)} \sum_{k=3}^{6} (5k-3) \qquad \textbf{(c)} \sum_{j=0}^{2} \frac{1}{(j+1)(j+3)}$$

Solución:

$$\textbf{(a)} \sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\textbf{(b)} \sum_{k=3}^{6} (5k-3) = (5 \cdot 3 - 3) + (5 \cdot 4 - 3) + (5 \cdot 5 - 3) + (5 \cdot 6 - 3) = 78$$

$$\textbf{(c)} \sum_{j=0}^{2} \frac{1}{(j+1)(j+3)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{40 + 15 + 8}{120} = \frac{63}{120}$$

Las sumas y la notación de sumatorio aparecen con frecuencia en libros y artículos de economía. Muchas veces hay varias variables o parámetros además del índice de sumatorio. Es importante ser capaz de leer tales sumas. En cada caso, el símbolo del sumatorio indica que se trata de una suma de términos. La suma se forma sustituyendo el índice de sumatorio por enteros sucesivos empezando con el límite inferior y acabando con el límite superior.

Ejemplo B.2

Desarrollar las siguientes sumas:

$$\textbf{(a)} \sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)} \qquad \textbf{(b)} \sum_{j=-2}^{1} x^{5-j} y^j \qquad \textbf{(c)} \sum_{i=1}^{N} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

Solución:

(**a**) $$\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)} = p_t^{(1)} q^{(1)} + p_t^{(2)} q^{(2)} + \cdots + p_t^{(n)} q^{(n)}$$

(**b**) $$\sum_{j=-2}^{1} x^{5-j} y^j = x^{5-(-2)} y^{-2} + x^{5-(-1)} y^{-1} + x^{5-0} y^0 + x^{5-1} y^1$$

$$= x^7 y^{-2} + x^6 y^{-1} + x^5 + x^4 y$$

(**c**) $$\sum_{i=1}^{N} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = (x_{1j} - \bar{x}_j)^2 + (x_{2j} - \bar{x}_j)^2 + \cdots + (x_{Nj} - \bar{x}_j)^2$$

Nótese que t *no* es un índice de sumatorio en (**a**), y j *no* es un índice de sumatorio en (**c**).

Ejemplo B.3

Escribir las siguientes sumas con la notación de sumatorio:

(**a**) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{81}$ (**b**) $a_i^6 + a_i^5 b_j + a_i^4 b_j^2 + a_i^3 b_j^3 + a_i^2 b_j^4 + a_i b_j^5 + b_j^6$

Solución:

(**a**) Es fácil si se tiene en cuenta que los dos primeros términos de la suma se pueden escribir como $3^0 + 3^1$. El término general es 3^i, y se tiene

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{81} = \sum_{i=0}^{81} 3^i$$

(**b**) Esto es más difícil. Nótese, sin embargo, que los índices i y j nunca cambian. Además, el exponente de a_i decrece de 6 a 0, mientras que el de b_j crece de 0 a 6. El término general es de la forma $a_i^{6-k} b_j^k$, donde k varia de 0 a 6. Así,

$$a_i^6 + a_i^5 b_j + a_i^4 b_j^2 + a_i^3 b_j^3 + a_i^2 b_j^4 + a_i b_j^5 + b_j^6 = \sum_{k=0}^{6} a_i^{6-k} b_j^k$$

Ejemplo B.4

Para medir variaciones en el nivel de precios de un país, se han sugerido varios *índices de precios* distintos.

Considérese una "cesta" de n bienes. Para $i = 1, \ldots, n$, se define

$q^{(i)}$ = número de unidades del bien i en la cesta

$p_0^{(i)}$ = precio por unidad del bien i en el año 0

$p_t^{(i)}$ = precio por unidad del bien i en el año t

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} q^{(i)} = p_0^{(1)} q^{(1)} + p_0^{(2)} q^{(2)} + \cdots + p_0^{(n)} q^{(n)} \tag{1}$$

es el coste de la cesta en el año 0, y

$$\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)} = p_t^{(1)} q^{(1)} + p_t^{(2)} q^{(2)} + \cdots + p_t^{(n)} q^{(n)} \tag{2}$$

es el coste de la cesta en el año t. Un índice de precios para el año t, con el año 0 como año base, se define por

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} q^{(i)}} \cdot 100 \tag{B.1}$$

Si el precio de la cesta es 1.032 en el año 0 y el precio de la misma cesta en el año t es 1.548, entonces el índice de precios es $(1.548/1.032) \cdot 100 = 150$.

Cuando las cantidades $q^{(i)}$ son niveles de consumo en el año base 0, este índice se llama el **índice de precios de Laspeyres**. Si las cantidades $q^{(i)}$ son niveles de consumo en el año t, este índice se llama el **índice de precios de Paasche**.

Problemas

1 Calcular lo siguiente:

(a) $\sum_{i=1}^{10} i$ (b) $\sum_{k=2}^{6}(5 \cdot 3^{k-2} - k)$ (c) $\sum_{m=0}^{5}(2m+1)$

(d) $\sum_{l=0}^{2} 2^{2^l}$ (e) $\sum_{i=1}^{10} 2$ (f) $\sum_{j=1}^{4} \frac{j+1}{j}$

2 Desarrollar las sumas siguientes:

(a) $\sum_{k=-2}^{2} 2\sqrt{k+2}$ (b) $\sum_{i=0}^{3}(x+2i)^2$ (c) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b^{k+1}$ (d) $\sum_{j=0}^{m} f(x_j)\,\Delta x_j$

3 Escribir las sumas siguientes en notación de sumatorio:

(a) $4 + 8 + 12 + 16 + \cdots + 4n$ (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$

(c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ (d) $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

(e) $3x + 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 + 243x^5 + 729x^6$ (f) $a_i^3 b_{i+3} + a_i^4 b_{i+4} + \cdots + a_i^p b_{i+p}$

(g) $a_i^3 b_{i+3} + a_{i+1}^4 b_{i+4} + \cdots + a_{i+p}^{p+3} b_{i+p+3}$ (h) $81{,}297 + 81{,}495 + 81{,}693 + 81{,}891$

4 Calcular el índice de precios (B.1) si $n = 3$, $p_0^{(1)} = 1$, $p_0^{(2)} = 2$, $p_0^{(3)} = 3$, $p_t^{(1)} = 2$, $p_t^{(2)} = 3$, $p_t^{(3)} = 4$, $q^{(1)} = 3$, $q^{(2)} = 5$, y $q^{(3)} = 7$.

5 (a) Desarrollar $\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})$ y probar que es igual a $\sum_{i=1}^{5} x_i - 5\bar{x}$.

(b) Demostrar en general que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}$$

6 Considérese un país dividido en 100 regiones. Para un cierto año, sea c_{ij} el número de personas que se trasladan de la región i a la región j. Si, digamos, $i = 25$ y $j = 10$, entonces se escribe $c_{25,10}$ en lugar de c_{ij}. Explicar el significado de las sumas:

$$\text{(a)} \sum_{j=1}^{100} c_{ij} \qquad \text{(b)} \sum_{i=1}^{100} c_{ij}$$

7 Decir cuáles de las siguientes igualdades son ciertas en general:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ck^2 = c\sum_{k=1}^{n} k^2$

(b) $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=n+1}^{N} b_j = \sum_{j=1}^{N} b_j$

(d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} 5^{k-2} = \sum_{k=0}^{4} 5^{k+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1,j}^2$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \frac{1}{k}\sum_{k=1}^{n} a_k$

B.2 REGLAS DE LAS SUMAS

Las siguientes propiedades algebraicas de la notación de sumatorio son útiles para manipular sumas:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \textbf{propiedad aditiva} \tag{B.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \textbf{propiedad de homogeneidad} \tag{B.3}$$

Las demostraciones de estas propiedades son directas. Por ejemplo, (B.3) se prueba así:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

La propiedad (B.3) dice que se puede sacar un factor constante fuera del signo de sumatorio. Si $a_i = 1$ para todo i en (B.3), entonces

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{B.4}$$

lo que dice que una contante c sumada n veces consigo misma es igual a n por c.

Las propiedades (B.2) a (B.4) también son válidas si el índice inferior del sumatorio es un entero distinto de 1. Por ejemplo,

$$\sum_{k=3}^{6} 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$$

porque el número 7 se suma 4 veces.

Se pueden aplicar las propiedades (B.2) a (B.4) combinadas para obtener fórmulas del tipo

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i - c_i + d) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} c_i + nd$$

Ejemplo B.5

Calcular la suma

$$\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

usando la identidad

$$\frac{1}{(m-1)m} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$$

Solución:

$$\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=2}^{n} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m-1} - \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

Para deducir la última igualdad, nótese que todos los términos cancelan dos a dos, excepto el primer término en el primer paréntesis y el último término del último paréntesis. Ésta es una técnica muy frecuente para calcular una cierta clase de sumas.

Ejemplo B.6

La **media aritmética** $\bar{x}$ de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es la suma de todos ellos dividida por el número n de términos:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0 \qquad \text{y que} \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

Solución: La diferencia $x_i - \bar{x}$ es la desviación entre x_i y la media. Probaremos primero que la suma de estas desviaciones es 0, usando la definición de $\bar{x}$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

Además

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

Nota: Se han considerado varias propiedades algebraicas útiles de las sumas. Un error común es no darse cuenta de que, en general,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

Es importante notar que la suma de los cuadrados no es igual en general al cuadrado de la suma. Por ejemplo, $\sum_{i=1}^{2} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2$ mientras que $(\sum_{i=1}^{2} x_i)^2 = (x_i + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, luego las dos son iguales si y sólo si $x_1x_2 = 0$ —esto es, x_1 ó x_2 (o ambos) son cero. Más generalmente,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)$$

luego la suma de los productos cruzados no es el producto de cada suma individual.

Fórmulas útiles

Si el lector pidiera a un grupo de estudiantes de 10–12 años que sumaran todos los números del 1 al 100, ¿esperaría una respuesta correcta en una hora?

Según fuentes solventes, Carl F. Gauss resolvió un problema parecido a los diez años. Su profesor pidió a los alumnos que sumaran $81.297 + 81.495 + 81.693 + \cdots + 100.899$. Hay 100 términos y la diferencia entre dos términos sucesivos es constante e igual a 198. Obviamente, el profesor escogió esta suma a sabiendas de que hay un artificio para obtener la respuesta rápidamente. Así podría comprobar fácilmente las respuestas que los alumnos le dieran, después de laboriosos esfuerzos. Gauss, quien más tarde llegaría a ser uno de los mejores matemáticos del mundo, dio la respuesta correcta, 9.109.800, en tan sólo unos minutos.

Aplicado al problema más sencillo de calcular $1 + 2 + \cdots + n$, el razonamiento de Gauss fue probablemente el siguiente. Primero se escribe la suma x de dos formas

$$x = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$x = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

Sumando verticalmente se tiene

$$\begin{aligned} 2x &= (1+n) + [2 + (n-1)] + \cdots + [(n-1) + 2] + (n+1) \\ &= (1+n) + (1+n) + \cdots + (1+n) + (1+n) \\ &= n(1+n) \end{aligned}$$

Finalmente se tiene el resultado:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1) \tag{B.5}$$

Las dos siguientes fórmulas de sumas son útiles a veces:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{B.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{B.7}$$

Compruébese que son correctas para $n = 1$, 2, y 3. Una manera de probar que son ciertas en general es usar la inducción, como se estudiará en la Sección B.5.

La fórmula del binomio de Newton

Es sabido que $(a+b)^1 = a + b$ y $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Usando la última igualdad y

escribiendo $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$ y $(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2$, se hallan

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= a+b\\(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

¿Cuál es la fórmula correspondiente para $(a+b)^m$, donde m es un entero positivo arbitrario? La respuesta la da la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \cdots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m \tag{B.8}$$

El coeficiente binómico, que se explica en la Sección 7.4 es, por definición

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

La fórmula (B.8) se demuestra en la Sección 7.4. En general, $\binom{m}{1} = m$ y $\binom{m}{m} = 1$. Para $m = 5$, se tiene

$$\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10, \qquad \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10, \qquad \binom{5}{4} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5$$

luego (B.8) da

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Si se observan los coeficientes del desarrollo de las sucesivas potencias de $(a+b)$ se tiene el siguiente patrón, conocido como el **triángulo de Pascal** (aunque era conocido en China alrededor del año 1100, mucho antes de que Blaise Pascal naciera):

```
                    1
                 1     1
              1     2     1
           1     3     3     1
        1     4     6     4     1
     1     5    10    10     5     1
  1     6    15    20    15     6     1
1    7    21    35    35    21     7     1
1   8   28   56   70   56   28   8   1
1   9   36   84   126   126   84   36   9   1
```

Esta tabla se puede continuar indefinidamente. Los números de este triángulo son los coeficientes binómicos. Por ejemplo, los números de la línea 6 (si la primera línea se numera por 0) son

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

Nótese que los números son simétricos respecto del eje vertical. Esta simetría se puede expresar por la relación

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \tag{B.9}$$

Por ejemplo, $\binom{6}{2} = 15 = \binom{6}{4}$. Por otra parte, la suma de dos números adyacentes de cualquier línea es igual al número que está entre los dos en la siguiente línea. Por ejemplo, la suma de 21 y 35 en la séptima línea es igual al 56 de la octava. En símbolos,

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1} \tag{B.10}$$

En el Problema 4, se pedirá demostrar (B.9) y (B.10).

Problemas

1 Usar los resultados (B.5) y (B.6) para calcular

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 3k + 2)$$

2 Usar la fórmula del binomio de Newton (B.8) para calcular $(a+b)^6$.

3 (a) Probar que

$$\sum_{k=1}^{8}(a_{k+1} - a_k) = a_9 - a_1$$

y, en general, que

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

(b) Usar el resultado de (a) para calcular lo siguiente:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\left(3^{k+1} - 3^k\right)$ (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(ar^{k+1} - ar^k\right)$

4 (a) Verificar que

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{8-3} \quad \text{y que} \quad \binom{8}{3} + \binom{8}{3+1} = \binom{8+1}{3+1}$$

(b) Verificar (B.9) y (B.10) usando la definición de $\binom{m}{k}$.

5 Calcular la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{x}\left(\frac{kx}{n}\right)^2$$

6 Probar la fórmula del sumatorio de series aritméticas

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a+id) = na + \frac{n(n-1)d}{2}$$

usando la misma idea de la demostración de (B.5). Luego verificar el resultado de Gauss descrito más arriba.

B.3 SUMAS DOBLES

Con frecuencia es necesario combinar varios signos de sumatorio. Considérese, por ejemplo, la siguiente matriz rectangular de números

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \tag{B.11}$$

Un número de esta matriz es de la forma a_{ij}, donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Por ejemplo, a_{ij} podría indicar el ingreso total por ventas de una compañía en la región i y el mes j. Hay $n \cdot m$ números en total. Podemos saber la suma de todos los números de la matriz hallando primero la suma de los números de cada una de las m filas y luego sumando estos totales. Las sumas de las m filas se puede escribir como $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$, $\ldots$, $\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$. En nuestro ejemplo, estas sumas son los ingresos totales en cada región durante los n meses. La suma de estas m sumas es igual a $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$, lo que se puede escribir como $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$. Si se suman los números de cada una de las n columnas primero y entonces se toma la suma de las columnas, se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$$

¿Cómo se interpreta esta suma en el ejemplo económico? En ambos casos, se ha calculado la suma de todos los números de la matriz, luego debe ser

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tag{B.12}$$

donde, de acuerdo con la práctica habitual, se han omitido los paréntesis. La fórmula (B.12) nos dice que *en una doble suma (finita), el orden de los sumatorios es irrelevante*. Es importante notar que los índices i, j del sumatorio son independientes el uno del otro (véase en el Problema 2 un caso en el que los límites de los sumatorios no son independientes).

Ejemplo B.7

Calcular $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(i+2j)$.

Solución:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(i+2j) = \sum_{i=1}^{3}\left[(i+2)+(i+4)+(i+6)+(i+8)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(4i+20) = 24+28+32 = 84$$

(Hágase primero la suma en i y luego en j, y véase que da el mismo resultado.)

Ejemplo B.8

Considérense los $m \cdot n$ números a_{ij} en (B.11). Denotemos su media aritmética por $\bar{a}$, y la media de los números de la columna j-ésima por $\bar{a}_j$, de forma que

$$\bar{a} = \frac{1}{mn} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} a_{rs}, \qquad \bar{a}_j = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m} a_{rj}$$

Demostrar que

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} (a_{rj} - \bar{a})(a_{sj} - \bar{a}) = m^2(\bar{a}_j - \bar{a})^2 \qquad (*)$$

Solución: Como $a_{rj} - \bar{a}$ es independiente del índice del sumatorio s, se tiene

$$\sum_{s=1}^{m} (a_{rj} - \bar{a})(a_{sj} - \bar{a}) = (a_{rj} - \bar{a}) \sum_{s=1}^{m} (a_{sj} - \bar{a})$$

para cada r, luego

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} (a_{rj} - \bar{a})(a_{sj} - \bar{a}) = \left[\sum_{r=1}^{m} (a_{rj} - \bar{a})\right] \left[\sum_{s=1}^{m} (a_{sj} - \bar{a})\right] \qquad (**)$$

Usando (B.2) a (B.4) y la expresión anterior de $\bar{a}_j$, se tiene

$$\sum_{r=1}^{m} (a_{rj} - \bar{a}) = \sum_{r=1}^{m} a_{rj} - \sum_{r=1}^{m} \bar{a} = m\bar{a}_j - m\bar{a} = m(\bar{a}_j - \bar{a}) \qquad (***)$$

Más aún, sustituyendo r por s como el índice del sumatorio de $(***)$ da

$$\sum_{s=1}^{m} (a_{sj} - \bar{a}) = m(\bar{a}_j - \bar{a})$$

Sustituyendo estos valores en $(**)$ se comprueba $(*)$.

Problemas

1 Desarrollar lo siguiente:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} i \cdot 3^j$ (b) $\displaystyle\sum_{s=0}^{2} \sum_{r=2}^{4} \left(\frac{rs}{r+s}\right)^2$ (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} i \cdot k^j \quad (k \neq 1)$

2 Demostrar que la suma de todos los números del triángulo

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{array}$$

se puede escribir en la forma

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\right) \quad \text{o como} \quad \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=j}^{m} a_{ij}\right)$$

3 Considérese un grupo de personas, cada una con un número m de unidades de distintos bienes. Sea a_{ij} el número de unidades del bien i que pertenecen a la persona j ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$). Explicar el significado de cada una de las siguientes sumas:

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

B.4 PRODUCTOS

Hay una notación especial para productos, análoga a la notación $\sum$ para sumas. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números, entonces se escribe el producto de los números $a_1, a_2, \ldots a_n$ como $\prod_{i=1}^{n} a_i$, es decir

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n \tag{B.13}$$

En otras palabras, se multiplican todos los valores a_i cuando i varía desde 1 hasta n. Más generalmente, si m y n son enteros con $m \leq n$, entonces se escribe

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m a_{m+1} \cdots a_n \tag{B.14}$$

Este producto tiene $n - m + 1$ factores. Por ejemplo, si $n = 6$ y $m = 3$, entonces $\prod_{i=3}^{6} a_i = a_3 a_4 a_5 a_6$ es un producto de $6 - 3 + 1 = 4$ factores.

Ejemplo B.9

Desarrollar los siguientes productos:

$$\textbf{(a)}\ \prod_{i=3}^{6}(2i-1) \qquad \textbf{(b)}\ \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

Solución:

$$\textbf{(a)}\ \prod_{i=3}^{6}(2i-1) = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 3.465$$

$$\textbf{(b)}\ \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Si todos los a_i en (B.13) y (B.14) son iguales al mismo número a, entonces

$$\prod_{i=1}^{n} a = a^n, \qquad \prod_{i=m}^{n} a = a^{n-m+1} \tag{B.15}$$

En la Sección 20.3 consideramos sumas de productos. Veamos un ejemplo típico.

Ejemplo B.10

Calcular la expresión

$$\sum_{k=1}^{3}\Big(\prod_{s=k+1}^{5} x_s\Big)y^k$$

Solución: Cada producto entre paréntesis depende obviamente de k. Si se escribe $D_k = \prod_{s=k+1}^{5} x_s$, entonces la suma es $\sum_{k=1}^{3} D_k y^k = D_1 y^1 + D_2 y^2 + D_3 y^3$, luego

$$\sum_{k=1}^{3}\Big(\prod_{s=k+1}^{5} x_s\Big)y^k = \Big(\prod_{s=2}^{5} x_s\Big)y^1 + \Big(\prod_{s=3}^{5} x_s\Big)y^2 + \Big(\prod_{s=4}^{5} x_s\Big)y^3$$
$$= (x_2x_3x_4x_5)y + (x_3x_4x_5)y^2 + (x_4x_5)y^3$$

Problemas

1 Calcular lo siguiente:

(a) $\prod_{s=1}^{6} 2^{-s}$ (b) $\prod_{k=3}^{6} k^3$ (c) $\prod_{j=-2}^{1} \frac{j}{j+3}$ (d) $\frac{\prod_{s=3}^{5}(1+r_s)}{\prod_{s=1}^{5}(1+r_s)}$

2 Desarrollar las expresiones siguientes:

(a) $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}$ (b) $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$ (c) $\sum_{i=1}^{n}\big(\prod_{s=i+1}^{n} a_s\big)b_i$

3 ¿Cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas?

(a) $\prod_{i=1}^{n} ka_i = k\prod_{i=1}^{n} a_i$ (b) $\prod_{i=1}^{n} y_i^3 = \Big(\prod_{i=1}^{n} y_i\Big)^3$

(c) $\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} y_i\Big)$ (d) $\prod_{i=1}^{n}\Big(\prod_{j=1}^{i} a_{ij}\Big) = \prod_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=j}^{n} a_{ij}\Big)$

B.5 INDUCCIÓN

La demostración por inducción es una técnica importante para probar fórmulas sobre números naturales. Por ejemplo, consideremos la suma de los n primeros números impares. Observamos que

$$1 = 1 \quad = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 \quad = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 \quad = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Esto sugiere un patrón general con la suma de los n primeros números impares igual a n^2:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \qquad (*)$$

Para probar que la fórmula es cierta en general se procede como sigue. Supongamos que la fórmula $(*)$ es cierta para un cierto número natural $n = k$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Sumando el siguiente número impar $2k + 1$ a cada lado se obtiene

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Pero ésta es la fórmula $(*)$ con $n = k + 1$.

Así hemos probado que, si la suma de los k primeros números impares es k^2, entonces la suma de los primeros $k + 1$ números impares es igual a $(k + 1)^2$. Esta implicación, junto con el hecho de que $(*)$ *es* cierta para $n = 1$, implica que $(*)$ es cierta en general.

Lo que acabamos de probar es que, si $(*)$ es cierta para $n = 1$ entonces es cierta para $n = 2$; que si es cierta para $n = 2$, entonces es cierta para $n = 3$; ...; que si es cierta para $n = k$, entonces es cierta para $n = k + 1$; y así sucesivamente.

Una demostración de este tipo se llama *demostración por inducción.* Hemos probado que la fórmula es cierta para $n = 1$ y, además, que *si* es cierta para $n = k$, entonces también lo es para $n = k + 1$. Se deduce por inducción que la fórmula es cierta para todos los números naturales n. Para el siguiente ejemplo son necesarios algunos conocimientos de derivación.

Ejemplo B.11

Demostrar por inducción que, para todo entero positivo n,

$$f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1} \tag{1}$$

Solución: La fórmula (1) es cierta para $n = 1$ porque $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$. *Supongamos* que (1) es cierta para $n = k$. Entonces

$$f(x) = x^k \Longrightarrow f'(x) = kx^{k-1} \tag{2}$$

Tenemos que probar que (1) también es válida para $n = k + 1$. Para hacerlo, derivamos $f(x) = x^{k+1}$. No podemos usar (1) para $n = k + 1$, pero como se ha supuesto que (2) era cierta, escribimos $f(x) = x^{k+1} = x^k \cdot x$. Usando la regla de la derivada del producto, junto con (2), obtenemos

$$f(x) = x^k \cdot x \Longrightarrow f'(x) = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k$$

Pero este resultado es la fórmula (1) para $n = k + 1$.

Así hemos probado (1) por inducción para todos los enteros positivos.

Con estos tres ejemplos como referencia podemos explicar la estructura general de la demostración por inducción como sigue: Se quiere probar que una fórmula matemática $A(n)$ que depende de n es cierta para todos los números naturales n. En los dos ejemplos anteriores, las fórmulas $A(n)$ eran

$$A(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

$$A(n) : f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Los pasos necesarios en cada prueba son: primero verificar que $A(1)$ es cierto, lo que significa que la fórmula es correcta para $n = 1$; luego demostrar que para cada número natural k, si $A(k)$ es cierta, entonces también debe serlo $A(k + 1)$.

En este caso, $A(k)$ se llama *la hipótesis de inducción*, y el paso de $A(k)$ a $A(k + 1)$ se llama el *paso general* de la demostración.

Cuando se prueba el paso general para un número arbitrario k, entonces, por inducción, la fórmula $A(n)$ es cierta para todo n. Podemos escribir ahora el principio general

El principio de inducción matemática

Supongamos que $A(n)$ es una fórmula para todos los números naturales n y que

(**a**) $A(1)$ es cierta.

(**b**) Si la hipótesis de inducción $A(k)$ es cierta, entonces $A(k+1)$ es cierta para cada número natural k.

Entonces, $A(n)$ es cierta para todos los números naturales n. (B.16)

El principio de inducción parece intuitivamente evidente. Si, para cada k, el que $A(k)$ sea cierta implica que $A(k+1)$ también lo es entonces, como $A(1)$ es cierta, $A(2)$ debe serlo, que a su vez implica que $A(3)$ es cierta, y así sucesivamente. Tenemos la siguiente analogía. Supongamos una escalera con un número infinito de escalones. Supongamos que podemos subir el primer escalón y, además, que cada vez que subimos un escalón podemos subir el siguiente. Entonces, podemos subir hasta cualquier escalón.

El principio de inducción matemática se puede generalizar fácilmente al caso de una fórmula $A(n)$ para cada número natural mayor o igual que un número natural arbitrario n_0. Si se prueba que $A(n_0)$ es cierta, y que si $A(k)$ es cierta, $A(k+1)$ también lo es, para $k \geq n_0$, entonces $A(n)$ es cierta para $n \geq n_0$.

Problemas

1 Demostrar por inducción (B.5) en Sección (B.2):

$$1+2+3+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1) \qquad (*)$$

2 Demostrar las fórmulas (B.6) y (B.7) de la Sección B.2 por inducción.

3 Demostrar por inducción:

(a) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

(b) $3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^n = \tfrac{1}{2}(3^{n+1}-3)$

4 $1^3+2^3+3^3 = 36$ es divisible por 9. Demostrar por inducción que la suma $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ de tres cubos consecutivos siempre es divisible por 9.

5 Demostrar por inducción que, para $k \neq 1$,

$$a+ak+\cdots+ak^{n-1} = a\frac{1-k^n}{1-k}$$

(Véase también (6.10) de la Sección 6.5.)

6 Sea n un entero positivo y considérese la expresión $s_n = n^2-n+41$. Comprobar que s_n es un número primo (es decir, que sólo es divisible por 1 y por sí mismo) para $n = 1$, 2, 3, 4, y 5. Con algún trabajo, se puede probar que s_n es primo para $n = 6, 7, \ldots, 40$. ¿Es s_n un número primo para todo n? (Este problema fue propuesto por primera vez por el matemático suizo L. Euler.)

C

Funciones trigonométricas

—y los soñadores nutren a la matemática
—así como ella a ellos.
—D'Arcy W. Thompson (1940)

Muchos fenómenos, físicos y económicos, parecen repetirse con una regularidad predecible. Como ejemplos están: la corriente eléctrica alterna en física, la respiración y el pulso en fisiología, y las variaciones estacionales en economía como el incremento de demanda de combustible de calefacción. Muchos economistas han buscado patrones periódicos en variables macroeconómicas, como producto nacional o tipos de interés. Ésta es la razón de que el término "ciclo económico" sea ahora de uso general en economía.

Hay "funciones periódicas" especiales que se usan para describir estos fenómenos matemáticamente. Entre éstas, las *funciones trigonométricas* son las más importantes. Muchos estudiantes habrán visto estas funciones en trigonometría, para calcular ángulos y distancias en triángulos y polígonos triangulados. Los resultados son útiles en astronomía, navegación y muchos otros campos. Pero en economía, las funciones trigonométricas se usan principalmente para describir fenómenos periódicos. En este Apéndice se da una breve introducción.

C.1 DEFINICIONES Y RESULTADOS BÁSICOS

De acuerdo con nuestra definición de la Sección 2.1 *toda* regla da una función si asigna un número y sólo uno del rango a cada número del dominio. La regla se puede definir de varias formas. Para funciones trigonométricas la manera de definirlas puede parecer bastante rara, pero está de acuerdo con la definición general de función.

Consideremos la circunferencia de la Figura C.1, de radio 1 y centro en el origen. Sea A el punto de coordenadas $(1, 0)$ en la circunferencia. Para cada número real x, midamos un arco de longitud $|x|$ sobre la circunferencia a partir de A. Si $x > 0$, el arco se toma en la dirección positiva (esto es, en dirección contraria a las agujas del reloj), y en la negativa si $x < 0$. Así tenemos un punto P_x con unas ciertas coordenadas (u, v). El arco x se mide con la misma unidad de longitud que el radio. Como el radio de la circunferencia es $r = 1$, la longitud de la circunferencia es

$2\pi r = 2\pi$. Si $x = \pi/2$, el punto $P_{\pi/2}$ es el que está a un cuarto de circunferencia de A en el sentido contrario a las agujas del reloj, y tiene coordenadas $(0, 1)$. Para P_π, se recorre la mitad de la circunferencia, y tiene coordenadas $(u, v) = (-1, 0)$; para $P_{3\pi/2}$, se tiene $(u, v) = (0, -1)$; para $P_0 = P_{2\pi}$, se tiene $(u, v) = (1, 0)$, y así sucesivamente. Para el punto P_x de la Figura C.1, se tiene $u \approx 0{,}45$ y $v \approx 0{,}9$.

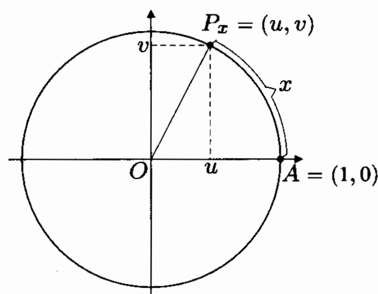


FIGURA C.1 sen *x* = *v* y cos *x* = *u*.

En general, cuando x crece, P_x recorre la circunferencia unidad, y los valores de u y v oscilan. Cuando P_x pasa por puntos en los que había estado antes, los valores de u y v se repiten. En particular, x, $x \pm 2\pi$, $x \pm 4\pi$, etcétera, definen el mismo punto en la circunferencia. Así, $P_x = P_{x+2n\pi}$ para $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Este método asigna a cada número real x el punto P_x de coordenadas (u, v).

> La función **seno** es la regla que asigna el número v a x.
> La función **coseno** es la regla que asigna el número u a x.

En notación estándar se abrevia *seno* por sen y *coseno* por cos. Así,

$$\operatorname{sen} x = v \qquad \text{y} \qquad \cos x = u \tag{C.1}$$

Los dominios de las funciones seno y coseno son el conjunto de los números reales. Sus rangos son en ambos casos el intervalo cerrado $[-1, 1]$, porque u y v toman todos los valores de este intervalo cuando P_x recorre la circunferencia. Nótese también que un cambio pequeño de x resulta en un cambio muy pequeño de P_x, luego las coordenadas u y v cambiarán sólo ligeramente, y así $v = \operatorname{sen} x$ y $u = \cos x$ son funciones continuas de x. De hecho, en la Figura C.1, vemos que un cambio en x implica cambios en u y v menores en valor absoluto.

Si x es tal que $\cos x \neq 0$, se define la función **tangente** como el cociente de $\operatorname{sen} x$ por $\cos x$. En notación estándar, se abrevia *tangente* por tan, y se escribe

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \tag{C.2}$$

Medición de ángulos en radianes

En trigonometría es habitual definir el seno, coseno, y tangente de *ángulos*, que se miden en radianes. La medida del ángulo AOP_x en **radianes** es la longitud del arco x. Como en geometría elemental y en las tablas de funciones trigonométricas se opera normalmente en grados, es necesario saber convertir grados a radianes y viceversa. Sabemos que $360° = 2\pi$ radianes, porque cuando $x = 2\pi$, la recta OP_x ha rotado $360°$. Así se tiene:

$$1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ radianes} \approx 0{,}017 \text{ radianes}, \quad 1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}3^\circ \tag{C.3}$$

Para algunos ángulos especialmente importantes, se dan las conversiones entre grados y radianes en la Figura C.2. La escala de grados para medir ángulos se construye sobre una elección arbitraria de la unidad para que la circunferencia completa esté dividida en 360°. Esto se corresponde con el antiguo calendario babilonio, que dividía el año en 360 días —una aproximación muy grosera.[1] Desde un punto de vista matemático, la escala de radianes es la más natural para medir ángulos. La razón es que las fórmulas de cálculo son más sencillas cuando se miden los ángulos en radianes, en lugar de hacerlo en grados.

No hay un método general para hallar los valores exactos de las funciones trigonométricas en el caso general. Se pueden encontrar aproximaciones en las tablas y en la mayoría de las calculadoras científicas.

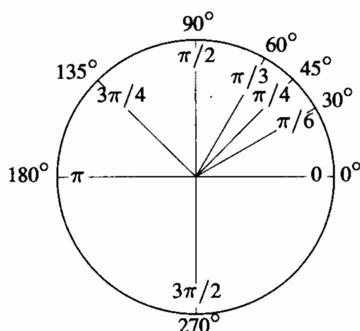


FIGURA C.2

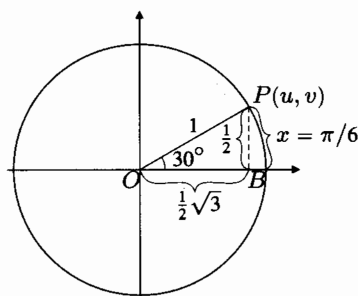


FIGURA C.3

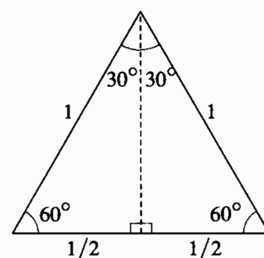


FIGURA C.4

Sin embargo, para valores especiales de x, se puede calcular $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ usando geometría elemental. Considérese la Figura C.3 en que $x = \pi/6$. El ángulo BOP mide 30° y los ángulos del triángulo BOP miden 30°, 60° y 90°. La Figura C.4 recuerda un hecho básico sobre esos triángulos. Así, en la Figura C.3, el segmento $PB = \frac{1}{2}OP = \frac{1}{2}$. Por el Teorema de Pitágoras, $(OB)^2 = (OP)^2 - (BP)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, y se tiene $OB = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Las coordenadas de P deben ser, por tanto, $u = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $v = \frac{1}{2}$. De (C.1) y (C.2), se obtiene entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Se puede confeccionar la Tabla C.1 por razonamientos geométricos análogos.

Gráficas de las funciones trigonométricas

La construcción que de la Figura C.1 implica que $P_{x+2\pi} = P_x$ para todo x, luego

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \tag{C.4}$$

Se dice que el seno y el coseno son **periódicas** de **periodo** 2π. Aún más, (véase Problema 5),

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \tag{C.5}$$

[1] Parece que los babilonios querían que el número de días del año fuera divisible por 12, el número de signos del Zodíaco.

TABLA C.1 *Valores especiales de las funciones trigonométricas*

x	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$	$\frac{3\pi}{4} = 135°$	$\pi = 180°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$	$2\pi = 360°$
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	-1	0
cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$*$	-1	0	$*$	0

$*$ *No definido.*

luego la tangente es **periódica** de **periodo** π.

Se ha visto anteriormente que los rangos del seno y el coseno son iguales al intervalo $[-1, 1]$, luego

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$$

Las gráficas de estas funciones están en la Figura C.5. La curva del coseno se obtiene desplazando la del seno $\pi/2$ unidades a la izquierda. Esto se deduce de la relación

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \tag{C.6}$$

(véase Problema 5).

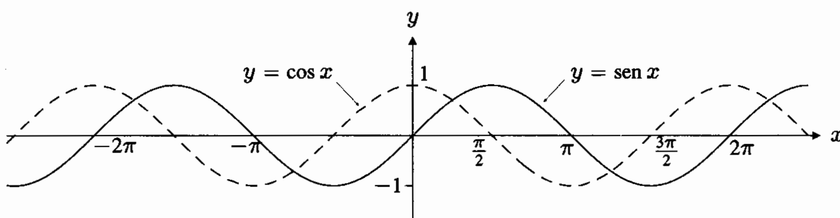


FIGURA C.5

La gráfica de la función tangente se muestra en la Figura C.6. Nótese que es positiva si y sólo si las funciones seno y coseno tienen el mismo signo. Además, tg x no está definida cuando $x = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, con n entero, porque entonces $\cos x = 0$.

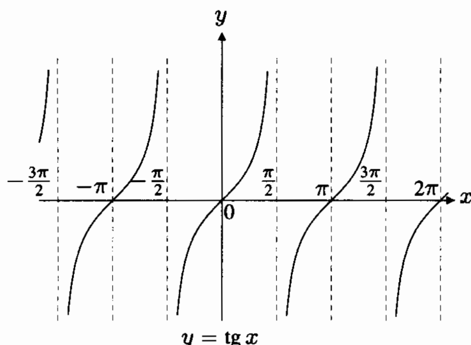


FIGURA C.6

Fórmulas trigonométricas

Hay un gran número de fórmulas trigonométricas que han fastidiado a estudiantes de instituto durante generaciones. Damos aquí sólo dos de ellas; los problemas dan algunas fórmulas y resultados adicionales.

Escribamos $\operatorname{sen}^2 x$ en lugar de $(\operatorname{sen} x)^2$, $\cos^2 x$ en lugar de $(\cos x)^2$ y $\operatorname{tg}^2 x$ en lugar de $(\operatorname{tg} x)^2$. Se usa una notación análoga para potencias mayores de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, $\cos^3 x = (\cos x)^3$.

La primera fórmula que damos es muy sencilla. Considérese el punto $P_x(u, v)$ de la Figura C.1. Como está sobre la circunferencia unidad, se tiene $u^2 + v^2 = 1$. Como $u = \cos x$ y $v = \operatorname{sen} x$, se deduce que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{C.7}$$

Otra fórmula útil es la siguiente:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{C.8}$$

Se indica una demostración de (C.8) en el Problema 14. Usando esta igualdad básica, se pueden deducir fácilmente igualdades similares para $\cos(x + y)$, $\operatorname{sen}(x + y)$ y $\operatorname{sen}(x - y)$ (véanse los Problemas 3 y 4).

Funciones más complejas

Hasta ahora hemos discutido algunas propiedades importantes de las tres funciones trigonométricas básicas: sin, cos y tan. Como se mencionó anteriormente, en economía se usan principalmente para describir fenómenos periódicos. Con frecuencia es necesario usar funciones más complicadas.

Hemos visto que $y = \operatorname{sen} x$ es periódica con periodo 2π. La gráfica de la función es como una ola, de la que se dice que tiene **periodo** (o **longitud de onda**) 2π. Sin embargo, si se representa gráficamente la función dada por $y = \operatorname{sen}(x/2)$, tenemos una gráfica parecida, pero el periodo es dos veces el anterior, es decir 4π. Cuando x crece desde 0 hasta 4π, $x/2$ crece desde 0 hasta 2π, luego $\operatorname{sen}(x/2)$ es periódica con periodo 4π. Más generalmente, $y = \operatorname{sen}(ax)$ es periódica con periodo $2\pi/a$ porque, cuando x crece desde 0 hasta $2\pi/a$, ax crece desde 0 a 2π. El valor de $y = \operatorname{sen}(ax)$ oscilará también entre -1 y 1, y se dice que la **amplitud** es igual a 1. Para tener una función periódica con amplitud A, se toma $y = A \operatorname{sen} ax$, que varía entre $-A$ y A. Por tanto,

$$y = A \operatorname{sen}(ax) \quad \text{tiene periodo } 2\pi/a \text{ y amplitud } A$$

El recíproco del período, $a/2\pi$, se llama la **frecuencia**. Es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

La gráfica de $y = A \operatorname{sen}(ax)$ tiene intersección con el eje x en $x = 0$. Para obtener una curva trasladada una cierta distancia del origen en la dirección de x se pone $y = A \operatorname{sen}(ax + b)$. Para obtener una curva trasladada en la dirección de y se pone

$$y = A \operatorname{sen}(ax + b) + B \tag{C.9}$$

La gráfica de esta función será una curva sinusoidal de amplitud A y periodo $2\pi/a$. Estará desplazada una distancia de $-b/a$ en la dirección de x, y una distancia B en la dirección de y con respecto a $y = A \operatorname{sen}(ax)$. Véase la Figura C.7 en la que $a > 0$ y $b < 0$.

Problemas

1 Usar un diagrama como el de la Figura C.3 para verificar los valores de la Tabla C.1 para $x = \pi/4$.

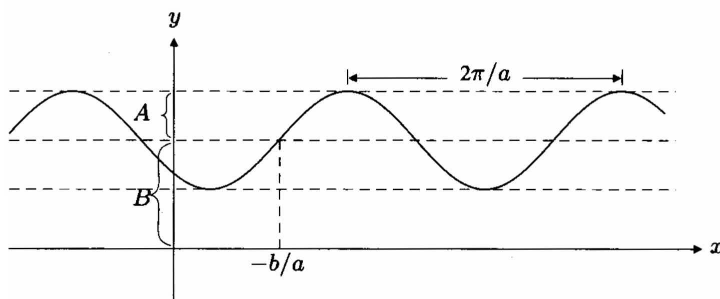


FIGURA C.7

2 Verificar que, para todo x, se tiene

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

3 Escríbase $\cos(x+y) = \cos[x-(-y)]$ y úsense los resultados del Problema 2 y (C.8) para demostrar que

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

4 Usar (C.8) para demostrar que $\cos(y-\pi/2) = \operatorname{sen} y$. De aquí se deduce que $\operatorname{sen}(y-\pi/2) = \cos(y-\pi) = -\cos y$, usando otra vez (C.8). Nótese que $\operatorname{sen}(x+y) = \cos[x+(y-\pi/2)]$ y demostrar que

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y\,, \qquad \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

5 Usar los resultados de los Problemas 3 y 4 para demostrar (C.5) y (C.6).

6 Hallar los valores de:

(a) $\operatorname{sen}(\pi - \pi/6)$ (b) $\cos(\pi + \pi/6)$ (c) $\operatorname{sen}(-3\pi/4)$

(d) $\cos(5\pi/4)$ (e) $\operatorname{tg}(7\pi/6)$ (f) $\operatorname{sen}(\pi/12)$

7 Simplificar:

(a) $\sqrt{2}\operatorname{sen}(x+\pi/4) - \cos x$ (b) $\dfrac{\operatorname{sen}[\pi - (\alpha+\beta)]}{\cos[2\pi - (\alpha+\beta)]}$ (c) $\dfrac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen}(a-x)}{\cos(a+x) - \cos(a-x)}$

8 Demostrar que

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

(*Indicación:* Poner $x+y = A$ y $x-y = B$ en las dos fórmulas del Problema 4 y restar.)

9 Demostrar que, para todo par de números reales x e y,

$$\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

10 Dibujar las gráficas de las siguientes funciones y dar sus periodos y amplitudes.

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ (b) $g(x) = 3\operatorname{sen}(x/2)$ (c) $h(x) = 2\operatorname{sen}(3x+4)+2$

11 Explicar por qué las siguientes funciones representan respectivamente una oscilación que se amortigua y una oscilación explosiva.

(a) $f(x) = (1/2)^x \operatorname{sen} x$ (b) $g(x) = 2^x \cos 2x$

12 Hallar funciones cuyas gráficas sean las de las Figuras C.8 a C.10. En la Figura C.10 las curvas con trazo discontinuo tienen ecuaciones $y = \pm 2e^{-x/\pi}$.

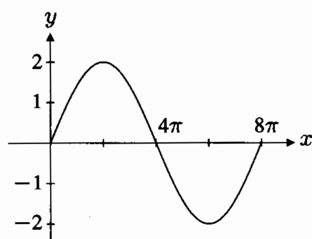


FIGURA C.8

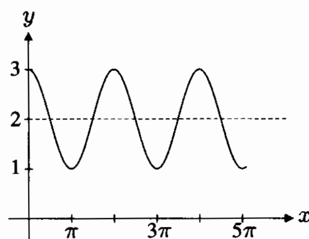


FIGURA C.9

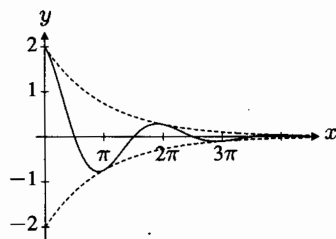


FIGURA C.10

Problemas avanzados

13 Consideremos el triángulo ABC de la Figura C.11. El cuadrado de la distancia de $A = (b, 0)$ a $B = (a\cos x, a \operatorname{sen} x)$ es igual a c^2. Demostrar el siguiente

Teorema de Pitágoras extendido

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x \tag{C.10}$$

14 Considérese la Figura C.12 en la que el ángulo POQ es $x - y$. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras Extendido, se tiene $|QP|^2 = |OQ|^2 + |OP|^2 - 2|OQ||OP|\cos(x - y)$. Usar esta igualdad para probar (C.8).

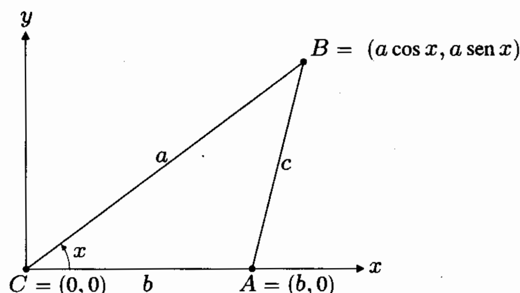


FIGURA C.11

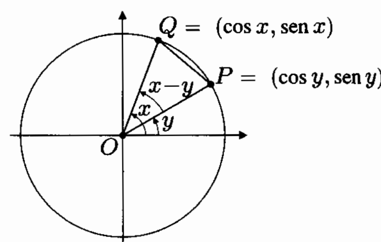


FIGURA C.12

C.2 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Considérese la gráfica de la función seno de la Figura C.5. Es periódica, luego también será periódica su derivada. ¿Puede el lector explicar por qué? La pendiente de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$ parece ser 1, igual que el valor de $\cos x$ en $x = 0$. También la pendiente en $x = \pi/2$ es 0, que es igual a $\cos \pi/2$. Por tanto, no debería sorprendernos que

$$y = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x \tag{C.11}$$

Para *demostrar* (C.11) es necesario considerar el cociente de Newton de $f(x) = \operatorname{sen} x$, que es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

Usando la igualdad del Problema 8 de la Sección C.1 se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=\frac{2\cos\left[\frac{1}{2}(x+h+x)\right]\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(x+h-x)\right]}{h}=\cos(x+\tfrac{1}{2}h)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h} \qquad (*)$$

Supongamos que pudiéramos probar que $\operatorname{sen} u/u \to 1$ cuando $u \to 0$. Poniendo $u = \frac{1}{2}h$ y $h \to 0$ daría $[\operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)]/\frac{1}{2}h \to 1$ cuando $h \to 0$, luego el límite de $(*)$ cuando $h \to 0$ sería $\cos x$. Esto probaría (C.11).

Por tanto, necesitamos demostrar que $(\operatorname{sen} u)/u \to 1$ cuando $u \to 0$. La Tabla C.2 muestra algunos valores de $(\operatorname{sen} u)/u$ para valores positivos de u próximos a 0.

TABLA C.2

u	1	0,5	0,3	0,1	0,01
$\frac{\operatorname{sen} u}{u}$	0,841	0,959	0,985	0,998	0,9998

Se puede probar usando la Figura C.13 que $\lim_{u\to 0}(\operatorname{sen} u)/u = 1$.

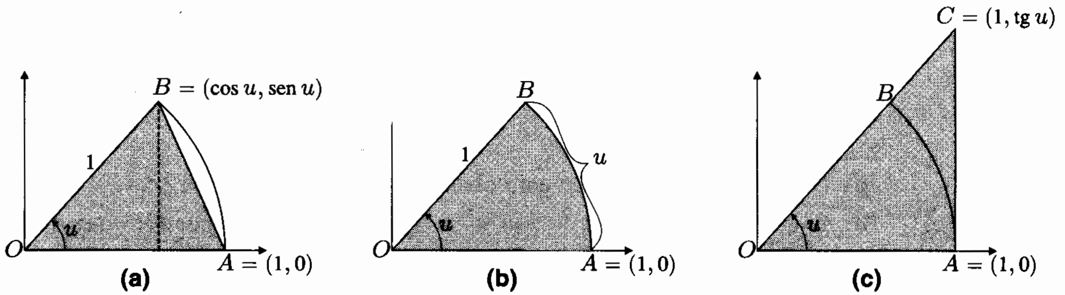


Figura C.13

Evidentemente,

$$\text{área del triángulo } OAB \le \text{área del sector } OAB \le \text{área del triágulo } OAC$$

El triángulo OAB tiene área $\frac{1}{2}(1\cdot \operatorname{sen} u) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u$. En el triángulo OAC de la Figura C.13(c), la longitud de OA es $OC\cdot\cos u$, luego $OC = 1/\cos u$. Entonces, $AC = OC\cdot\operatorname{sen} u = \operatorname{tg} u$. Así, el triángulo OAC tiene área $\frac{1}{2}\operatorname{tg} u$. Finalmente, el arco u es una fracción $u/2\pi$ de la longitud 2π de la circunferencia con radio 1. Por tanto, el sector OAB tiene un área igual a una fracción $u/2\pi$ del área π del círculo con radio 1 —esto es, su área es $\frac{1}{2}u$. Así,

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} u \le \frac{1}{2}u \le \frac{1}{2}\operatorname{tg} u = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

Para $u \in (0, \pi/2)$, se tiene $\cos u > 0$. En consecuencia, estas desigualdades implican que $(\operatorname{sen} u)/u \le 1$ y $\cos u \le (\operatorname{sen} u)/u$. Por tanto,

$$\cos u \le \frac{\operatorname{sen} u}{u} \le 1 \qquad (**)$$

Las desigualdades $(**)$ también son ciertas para $u \in (-\pi/2, 0)$, porque $\cos(-u) = \cos u$ y $\operatorname{sen}(-u) = -\operatorname{sen} u$, luego $[\operatorname{sen}(-u)]/(-u) = (\operatorname{sen} u)/u$. Recuérdese que $\cos u \to 1$ cuando

$u \to 0$. Así, por la regla del encaje para límites (6.27) de la Sección 6.7, se tiene que

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1 \tag{C.12}$$

Si u es una función de x, la regla de la cadena da

$$y = \operatorname{sen} u, \quad u = u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u' \cos u \tag{C.13}$$

Sea $g(x) = \cos x$. De acuerdo con (C.6), se tiene $g(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$, luego (C.13) da $g'(x) = \cos(x + \pi/2)$. Pero el Problema 3 de la Sección C.1 implica que $\cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen} x$. Por tanto,

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{sen} x \tag{C.14}$$

La regla de la derivada del cociente aplicada a $y = \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$ da (véase el Problema 2)

$$y = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \qquad (\text{si } \cos x \neq 0) \tag{C.15}$$

Combinando estas reglas de derivación con las que se han desarrollado anteriormente, se pueden derivar muchas expresiones que contengan funciones trigonométricas.

Ejemplo C.1

Derivar las siguientes funciones:

$$\textbf{(a)}\ y = \operatorname{sen} 2x \qquad \textbf{(b)}\ y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\,. \qquad \textbf{(c)}\ y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + x}$$

Solución:

(a) Usar (C.13) con $u = 2x$ para obtener $y' = 2\cos u = 2\cos 2x$.

(b) $y = (\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 \Rightarrow y' = 2(\operatorname{sen} x)\cos x + 2(\cos x)(-\operatorname{sen} x) = 0$. Vemos que $y' \equiv 0$, luego que y debe ser constante. Como $y = 1$ cuando $x = 0$, la constante deber ser 1. Así encontramos una vez más la relación $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

(c) La regla de derivación del cociente da

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x + x)\cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x + 1)}{(\cos x + x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + x\cos x + \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x}{(\cos x + x)^2} = \frac{1 + x\cos x - \operatorname{sen} x}{(\cos x + x)^2} \end{aligned}$$

Funciones trigonométricas inversas

Considérese el problema de resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} x = y \tag{C.16}$$

en x. La Figura C.14 representa el problema. Si $y > 1$ ó $y < -1$, entonces la ecuación $\operatorname{sen} x = y$ no tiene solución, mientras que tiene infinitas si $y \in [-1, 1]$.

Supongamos que exigimos que $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. En este intervalo, $\operatorname{sen} x$ es estrictamente creciente porque $(\operatorname{sen} x)' = \cos x > 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$. En este caso, la ecuación (C.16) tiene una única solución x en este intervalo para cada $y \in [-1, 1]$. Denotemos esta solución por $x = \arcsin y$. Con la terminología de la Sección 7.6, hemos demostrado que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, con dominio $[-\pi/2, \pi/2]$ y rango $[-1, 1]$, tiene una función inversa g. Se llama a esta inversa la función **arco seno**. Si usamos x como la variable libre para la inversa, se tiene

$$g(x) = \arcsin x, \qquad x \in [-1, 1] \tag{C.17}$$

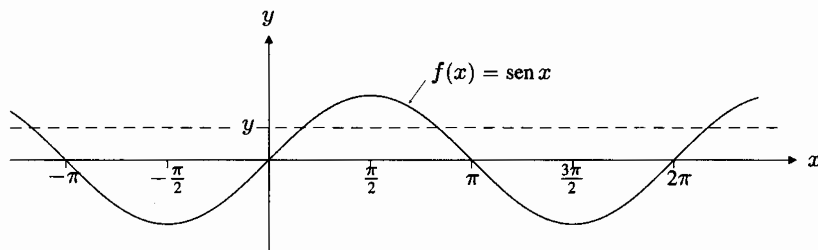


FIGURA C.14

Por definición, $\arcsin x$ es *el número en* $[-\pi/2, \pi/2]$ *cuyo seno es igual a* x ($\arcsin x$ es "el ángulo (arco) cuyo seno es x"). Por ejemplo, se tiene $\arcsin 1/2 = \pi/6$. La gráfica de $y = \arcsin x$ se muestra en la Figura C.15. De acuerdo con (7.22) de la Sección 7.6, la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \arcsin x$ son simétricas respecto a la recta $y = x$.

La derivada de $g(x) = \arcsin x$ se calcula más fácilmente por derivación implícita. De la definición de $g(x)$, se deduce que $\operatorname{sen} g(x) = x$ para todo $x \in (-1, 1)$. Si *suponemos* que $g(x)$ es derivable, la derivación por la regla de la cadena da $\cos[g(x)] \cdot g'(x) = 1$. Así,

$$g'(x) = \frac{1}{\cos g(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 g(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

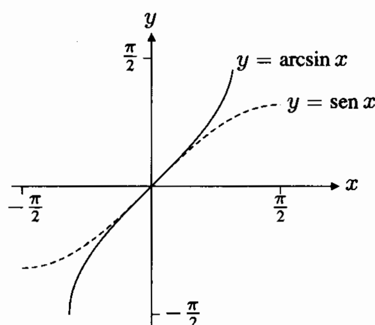


FIGURA C.15

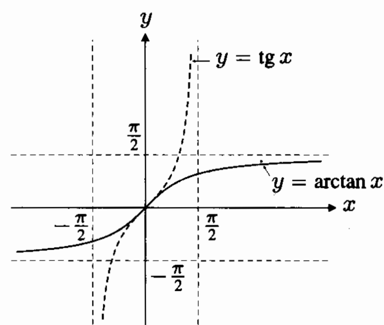


FIGURA C.16

De otra manera, se podría haber usado (7.24) de la Sección (7.6). Por tanto,

$$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (-1 < x < 1) \tag{C.18}$$

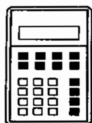
Se puede demostrar de la misma forma que $y = \cos x$ definida en $[0, \pi]$ tiene una función inversa $y = \arccos x$ definida en $[-1, 1]$, y que

$$y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (-1 < x < 1) \tag{C.19}$$

Consideremos finalmente $y = \operatorname{tg} x$ definida en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Como $y' = 1/\cos^2 x > 0$, la función es estrictamente creciente, y el rango es $(-\infty, \infty)$. Por tanto, tiene una inversa $y = \arctan x$, definida en $(-\infty, \infty)$ y con rango $(-\pi/2, \pi/2)$. Por derivación implícita, esta vez de la ecuación $\operatorname{tg} y = x$ (de forma que $y = \arctan x$), se tiene

$$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{C.20}$$

La gráfica de $y = \arctan x$ se muestra en la Figura C.16.



Las calculadoras que tienen funciones trigonométricas suelen tener también sus inversas. Se designan por sen^{-1}, $\cos^{-1}$ y tg^{-1}. Si se escribe 0,5 y se pulsa la tecla $\boxed{\text{sen}^{-1}}$, la respuesta es 30, porque las calculadoras operan generalmente en grados. Si se usan radianes, dará la respuesta $\pi/6$, o, más bien 0,5235987.

Problemas

1 Calcular las derivadas de las siguientes funciones

(a) $y = \text{sen}\,\frac{1}{2}x$ (b) $y = x\cos x$ (c) $y = \text{tg}\,x^2$ (d) $y = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}$

2 Probar la regla de derivación (C.15). (Recuérdese que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.)

3 Calcular las derivadas de las siguientes funciones

(a) $y = \text{sen}\,x + \cos x$ (b) $y = x^5\,\text{sen}\,x + \sqrt{x}\cos x + 3$ (c) $y = \dfrac{\sqrt{x}\cos x}{x^2+1}$

4 Calcular lo siguiente:

(a) $\dfrac{d}{dx}(1 - \cos ax)$ (b) $\dfrac{d}{dt}(at\,\text{sen}\,bt)$ (c) $\dfrac{d}{dt}(\text{sen}\{\cos[\text{sen}(at+b)]\})$

5 Usar la regla de l'Hôpital, si fuera necesario, para calcular

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,2x}{x}$ (b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{sen}\,mt}{\text{sen}\,nt}$ $(n \neq 0)$

(c) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ (d) $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\text{sen}\,ax}{x}$ $(x \neq 0)$

6 Hallar el máximo y el mínimo de $f(x) = (\text{sen}\,x - x - 1)^3$ en el intervalo $I = [0, 3\pi/2]$.

7 Los estudios de ciclos económicos usan con frecuencia funciones de la forma

$$p(t) = C_0 + C_1\cos\lambda t + C_2\,\text{sen}\,\lambda t$$

Demostrar que $p''(t) + \lambda^2 p(t)$ es una constante K, y hallarla.

8 Si $y = f(x)$ es una función derivable que verifica

$$x\cos y - y\,\text{sen}\,x = 0$$

¿qué es y'? Hallar la ecuación de la tangente a la curva en $(\pi, \pi/2)$.

9 Calcular la derivada de $f(x) = 3\,\text{sen}\,2x + 4\cos 4x$.

10 Calcular las siguientes integrales (para las dos últimas integrales, usar la integración por partes, Sección 11.1):

(a) $\displaystyle\int \text{sen}\,x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \text{sen}^2 x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

11 Calcular las siguientes integrales por un cambio de variable apropiado, como se hizo en la Sección 11.2

(a) $\displaystyle\int \text{tg}\,x\,dx = \int\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos x\,e^{\text{sen}\,x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \cos^5 x\,\text{sen}\,x\,dx$

12 Calcular:

(a) $\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (b) $\arccos 0$ (c) $\arccos\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (d) $\arctan\sqrt{3}$

13 Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $\arcsin 2x$ (b) $\arctan(x^2+1)$ (c) $\arccos\sqrt{x}$

14 Demostrar que

$$\frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\right]=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

Problemas avanzados

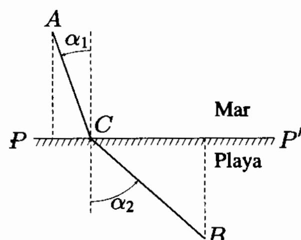


FIGURA C.17

15 En la Figura C.17, la recta PP' representa la línea de playa. Un bañista en dificultades en A (en el mar) es visto por un socorrista en el punto B (en la playa). El socorrista puede nadar a v_1 km/h y correr a v_2 km/h. Demostrar que para ir de B a A lo más rápidamente posible, el socorrista debe cruzar PP' en C, donde la posición de C es tal que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1}=\frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}$$

C.3 NÚMEROS COMPLEJOS

La Sección 1.4 explicaba cómo el concepto de número se puede extender sucesivamente de los naturales a los reales, pasando por los enteros y los racionales. Cada una de estas extensiones agranda el conjunto de ecuaciones que tienen solución. Sin embargo, ecuaciones cuadráticas sencillas como $x^2+1=0$ y $x^2+4x+8=0$ no tienen soluciones en el sistema de los números reales. Pero introduciendo los números complejos, todas las ecuaciones cuadráticas tienen solución. Más aún, en el sistema de los números complejos, *toda* ecuación algebraica de la forma

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

tiene soluciones (supuesto que el miembro de la izquierda no es una constante distinta de cero).

Definición de los números complejos

La fórmula estándar (A.34) para resolver la ecuación $x^2+4x+8=0$ da las expresiones $-2+\sqrt{-4}$ y $-2-\sqrt{-4}$. Hasta ahora no hemos dado ningún significado a éstas. Pero si nos tomamos la libertad de poner $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}$, obtenemos las "soluciones"

$$-2+2\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad -2-2\sqrt{-1} \tag{$*$}$$

Aquí, -2 y 2 son números bien conocidos, pero $\sqrt{-1}$ no lo es. Si pretendemos que $\sqrt{-1}$ sea un número x cuyo cuadrado es -1, podemos hacer que x satisfaga la ecuación $x^2=-1$.

Tratando estas expresiones como si verificaran las reglas algebraicas habituales, además de que $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ significa -1, las expresiones del tipo $a+b\sqrt{-1}$ se pueden usar para resolver ecuaciones cuadráticas sin raíces reales.

Este hecho motiva la introducción de un nuevo tipo de número. Supongamos que el símbolo i denota un "número" que verifica la ecuación $x^2 + 1 = 0$. (Los matemáticos prefieren usar el símbolo i en lugar de $\sqrt{-1}$.)

Por definición, el **sistema de los números complejos** es el conjunto de todos los símbolos de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. El número a se llama la **parte real** y b se llama la **parte imaginaria** del número complejo. Además, se definen las operaciones de suma y multiplicación por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \tag{C.21}$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \tag{C.22}$$

La igualdad (C.22) es la que resulta si se multiplica $a + bi$ por $c + di$ de acuerdo con las reglas algebraicas, obteniendo la expresión $ac+(ad+bc)i+bdi^2$, y sustituyendo i^2 por -1. En la práctica, cuando se multiplican números complejos, usualmente se hace de esta forma, en lugar de aplicar la regla (C.22) directamente.

También es una práctica habitual denotar los números complejos por letras del final del alfabeto, tales como $z = a + bi$ ó $w = c + di$. Dos números complejos se dicen iguales si son iguales sus partes imaginaria y real —esto es, $z = w$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Si la parte imaginaria de un número complejo es 0, se escribe $a + 0i = a$. De hecho, los números complejos de la forma $a + 0i$ se comportan igual que los números reales respecto de la suma y la multiplicación. En particular, el 0 $(= 0 + 0i)$ y el 1 $(= 1 + 0i)$ obedecen a las mismas reglas algebraicas como números reales o como números complejos.

Si $a+bi$ y $c+di$ son dos números complejos arbitrarios, la **diferencia** entre ellos, $(a+bi)-(c+di)$, es el número complejo $x+yi$ tal que sumado con $c+di$, da $a+bi$; así, $a+bi = (c+di)+(x+yi)$. Se deduce que $a + bi = (c + x) + (d + y)i$. Por definición de igualdad de números complejos, $a = c + x$ y $b = d + y$, luego $x = a - c$ y $y = b - d$. Así, se tiene

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \tag{C.23}$$

Supongamos que $z = a + bi$ y que $z \neq 0 + 0i = 0$. Queremos saber si existe un número complejo que merezca ser llamado el "inverso" de z. Un número tal $x+iy$ debe verificar $(a+bi)(x+yi) = 1$. De $(ax - by) + (ay + bx)i = 1$ se deduce que $ax - by = 1$ y $ay + bx = 0$. Resolviendo este sistema de ecuaciones en x e y da $x = a/(a^2 + b^2)$ e $y = -b/(a^2 + b^2)$. Nótese que, al ser $z \neq 0$, se tiene $a^2 + b^2 \neq 0$. Con estos valores de x e y, el número complejo $x + yi$ se llama el **inverso** de $z = a + bi$:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \tag{C.24}$$

Esta definición de inverso de un número complejo conduce a la siguiente definición de división de números complejos:

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi)\frac{1}{c + di} = (a + bi)\frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \tag{C.25}$$

Una forma más sencilla de obtener (C.25) es multiplicar el numerador y el denominador por $c - di$, lo que da

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Ejemplo C.2

Si $z = 3 + 4i$ y $w = 2 - 5i$, calcular lo siguiente:

(a) $z + w$ **(b)** zw **(c)** z/w

Solución:

(**a**) $z + w = (3 + 4i) + (2 - 5i) = 5 - i$

(**b**) $zw = (3 + 4i)(2 - 5i) = 6 - 15i + 8i - 20i^2 = 26 - 7i$

(**c**) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{3 + 4i}{2 - 5i} = \dfrac{(3 + 4i)(2 + 5i)}{(2 - 5i)(2 + 5i)} = \dfrac{6 + 15i + 8i - 20}{4 + 25} = \dfrac{-14 + 23i}{29}$

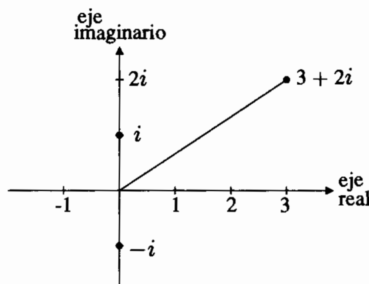


FIGURA C.18 Diagrama de Argand.

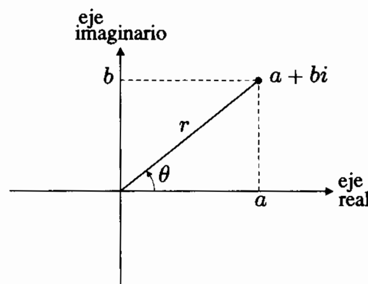


FIGURA C.19 Coordenadas polares.

Forma trigonométrica de los números complejos

Cada número complejo $z = a + bi$ se puede identificar obviamente con el par (a, b), luego con el punto del plano representado por este par. La Figura C.18 muestra la representación de los números i, $-i$, y $3 + 2i$. El plano que representa los números complejos se llama **diagrama de Argand**. El eje horizontal representa los números de la forma $a + 0i$, y se llama el **eje real**, y el eje vertical, que representa los números de la forma $0 + bi$, se llama el **eje imaginario**.

En lugar de representar el número complejo $z = a + bi$ por el par (a, b), podríamos haber usado *coordenadas polares*. En referencia a la Figura C.19, sea θ el ángulo (medido en radianes) entre el eje positivo real y el vector desde el origen al punto (a, b), y sea r la distancia del origen al punto. Entonces $a = r\cos\theta$ y $b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, luego

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{C.26}$$

Esta última expresión es la **forma trigonométrica (o polar)** de un número complejo z. El ángulo θ se llama el **argumento** del complejo z. Nótese que la longitud del vector desde el origen al punto (a, b) es $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Este número se llama el *módulo* del número complejo, y se denota por $|z|$. Así,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{es el } \textbf{módulo} \text{ de } z = a + bi \tag{C.27}$$

La multiplicación y división de números complejos tiene una elegante interpretación geométrica si se representa en su forma trigonométrica. Se tiene

$$r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{C.28}$$

porque los Problemas 3 y 4 de la Sección C.1 implican que $\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2$ y $\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2) = \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2$. Así, *el producto de dos números complejos es el número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos*.

De forma parecida se puede demostrar que

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \tag{C.29}$$

Si $r_1 = r_2 = 1$ y $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ en (C.28), se obtiene $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta$. Análogamente, $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = (\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta)(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta$. Por inducción, se demuestra que

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta \qquad \textbf{(Fórmula de De Moivre)} \qquad \text{(C.30)}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$

Nota

Ésta es una introducción corta a los números complejos. La necesidad de extender el sistema de los números reales surgió en el siglo XVI, cuando los matemáticos italianos estudiaron sistemáticamente las ecuaciones de grado 2, 3 y 4. Durante mucho tiempo, los números complejos fueron vistos como objetos "imaginarios" y místicos. Actualmente, la extensión del concepto de número de los reales a los complejos está motivada por la misma razón que la extensión de los racionales a los reales. En ambos casos, se quiere que ciertas ecuaciones tengan soluciones.

Hoy en día, los números complejos son indispensables en matemáticas. La ciencia moderna no podría subsistir sin ellos. Sin embargo, no juegan un papel demasiado importante en economía. En este libro permiten una descripción adecuada de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales y en diferencias de segundo orden. También facilitan el estudio de autovalores de matrices.

Problemas

1 Si $z = 2 - 5i$ y $w = 3 + 3i$, simplificar las siguientes expresiones:

(a) $z + w$ (b) zw (c) $\dfrac{z}{w}$ (d) $|z|$

2 Representar los números complejos $z = 2 - 2i$, $w = 1 + 3i$, y $z + w$ en un diagrama de Argand.

3 Escribir los siguientes números en la forma $a + bi$:

(a) $\dfrac{3 + 2i}{1 - i}$ (b) $\dfrac{4 - 3i}{i}$ (c) $\dfrac{(3 - 2i)(2 - i)}{(-1 - i)(3 + 2i)}$ (d) $\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)^3$

4 Escribir los siguientes números en forma trigonométrica:

(a) $\sqrt{3} + 3i$ (b) -1 (c) $-2 - 2\sqrt{3}i$ (d) $1 - i$

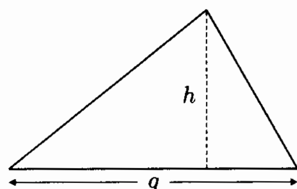
D

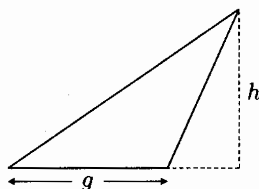
Geometría

No entre aquí nadie que no sepa Geometría.
—Entrada de la Academia de Platón

Las siguientes fórmulas y resultados son útiles a veces en economía.

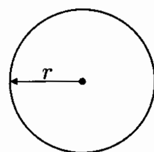
Triángulos





Área: $A = \frac{1}{2}gh$

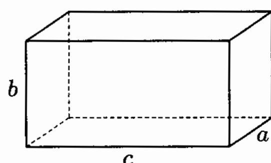
Circunferencias



Área: $A = \pi r^2$ $(\pi = 3{,}1415\ldots)$

Longitud: $L = 2\pi r$

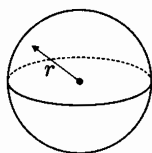
Prismas rectangulares



Volumen: $V = abc$

Superficie: $S = 2ab + 2ac + 2bc$

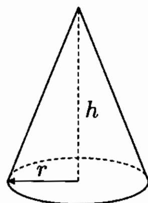
Esferas



Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Superficie: $S = 4\pi r^2$

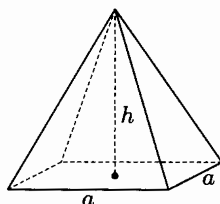
Conos



Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Superficie: $S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

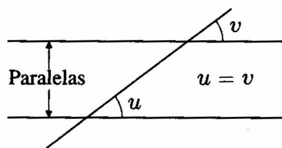
Pirámides

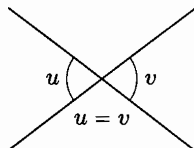


Volumen: $V = \frac{1}{3}a^2 h$

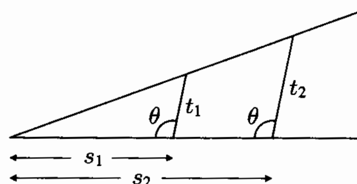
Superfice: $S = a^2 + a\sqrt{a^2 + 4h^2}$

Ángulos



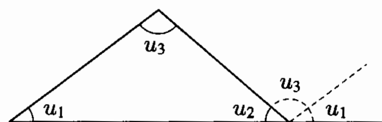


Proporciones



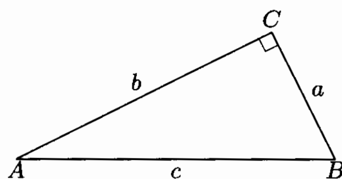
$t_1/s_1 = t_2/s_2$

Suma de los ángulos de un triángulo



$$u_1 + u_2 + u_3 = 180^\circ$$

Teorema de Pitágoras



$$\angle C = 90^\circ \iff a^2 + b^2 = c^2$$

Soluciones a los problemas impares

Capítulo 1

1.3

1. (a) $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$. (b) $F + bx$. (c) $(F + cx)/x = F/x + c$. (d) Después del aumento del $p\%$, el salario es $L + pL/100 = L(1 + p/100)$. Un aumento del $q\%$ de este nuevo sueldo da el nuevo salario anual: $L(1 + p/100)(1 + q/100)$. (e) $V = x(18 - 2x)(18 - 2x) = 4x(9 - x)^2$ (véanse las Figuras 1 y 2).

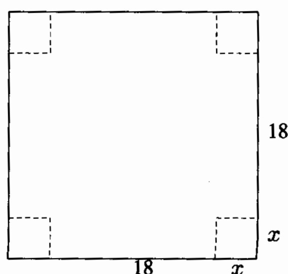


FIGURA 1

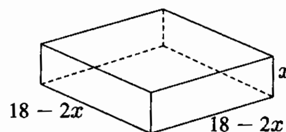


FIGURA 2

3. (a) $y = \frac{3}{5}(x + 2)$. (b) $x = \dfrac{b + d}{a - c}$ (si $a \neq c$). (c) Elevando al cuadrado cada miembro de la ecuación se obtiene $A^2K^2L = Y_0^2$. Despejando L se tiene $L = Y_0^2/A^2K^2$. (d) $y = \dfrac{m}{q} - \dfrac{p}{q}x$ (si $q \neq 0$). (e) $\dfrac{1}{1 + r} - a = c\left(\dfrac{1}{1 + r} + b\right)$. Multiplicando por $1 + r$ y despejando r, da $r = \dfrac{(1 - a) - c(1 + b)}{a + bc}$. (f) $Y = \dfrac{I_p + G - ak + b}{1 - a + at}$.

5. $2\pi(r + 1) - 2\pi r = 2\pi$, donde r es el radio de la Tierra (que se aproxima a una esfera).

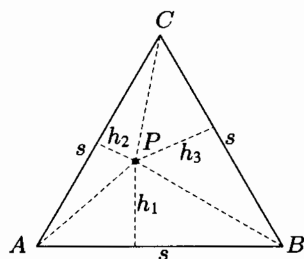


FIGURA 3

7. Sea s la longitud de cada lado, y sea K el área. Entonces K es la suma de las áreas de los triángulos APB, APC, y BPC de la Figura 3, y se tiene $\frac{1}{2}sh_1 + \frac{1}{2}sh_2 + \frac{1}{2}sh_3 = K$. Así, $h_1 + h_2 + h_3 = 2K/s$, que es independiente de la posición de P.

1.4

1. (a) Racional (nótese que esto no es sino una aproximación del número irracional π). (b) $\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$, un número natural. (c) $3 - 2 = 1$, un número natural. (d) $3\pi - 1/4$ es irracional: si $3\pi - 1/4$ fuese racional, existirían enteros p y q tales que $3\pi - 1/4 = p/q$. Así, $\pi = (4p + q)/12q$, lo que implicaría que π es racional, una contradicción.
3. (a) $x \neq 4$. (b) $x \neq 0$ y $x \neq -2$. (c) $x \neq -5$ y $x \neq 1$ (la ecuación cuadrática $x^2 + 4x - 5 = 0$ tiene las soluciones $x = -5$ y $x = 1$). (d) $x \neq -2$ (la ecuación cuadrática $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$ tiene como única solución $x = -2$).
5. $F/x + c < q$, lo que da $x > F/(q - c)$. Para $F = 100.000$, $c = 120$, y $q = 160$: $100.000/x + 120 < 160$, esto es, $100.000/x < 40$, luego $x > 100.000/40 = 2.500$.
7. (a) $|5 - 3(-1)| = |5 + 3| = 8$, $|5 - 3 \cdot 2| = 1$, $|5 - 3 \cdot 4| = 7$. (b) $x = 5/3$. (c) $|5 - 3x| = 5 - 3x$ para $x \leq 5/3$, $|5 - 3x| = 3x - 5$ para $x > 5/3$.
9. (a) $4{,}999 < x < 5{,}001$. (b) $|x - 5| < 0{,}001$.

1.5

1. (a) $2x - 4 = 2 \Longrightarrow x = 3$. (b) $x = 3 \Longrightarrow 2x - 4 = 2$. (c) $x = 1 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$. (d) $x^2 > 4 \Longleftrightarrow x > 2$ ó $x < -2$.
3. (a) $x \geq 0$ es necesaria, pero no suficiente. (b) $x \geq 50$ es suficiente, pero no necesaria. (c) $x \geq 4$ es necesaria y suficiente.
5. (a) $x = 3$. (b) $x = 0$ ó $x = -5$. (c) $x = -3$ ó $x = 3$.
7. (a) Si y sólo si. (Nótese: $\sqrt{4}$ significa 2, no ± 2). (b) Si. (c) Sólo si. (d) Si y sólo si. (e) Sólo si.
9. (a) $x < 0$ ó $y < 0$. (b) $x < a$ para algún x al menos. (c) x y/o y es menor que 5 (¿sería más fácil si la proposición fuera: ni Ron ni Rita tienen menos de 5 años?). (d) Existe un $\varepsilon > 0$ tal que B no se verifica para ningún $\delta > 0$. (e) Puede que a alguien no le gusten los gatos. (f) Alguien no ama nunca a nadie.

1.6

1. (b), (d), y (e) expresan la misma condición. (a) y (c) son distintos.
3. Debemos probar que el hecho de que 2 divida a p^2 implica que 2 divide a p. Supongamos que 2 no divide a p. Entonces, $p = 2m + 1$, para algún natural m. En ese caso, $p^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$, que es impar, luego no es divisible por 2.

1.7

1. (a) $5 \in C$, $D \subset C$, y $B = C$ son ciertos. Los otros tres enunciados son falsos. (b) $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$, $A \setminus B = \{3,4\}$, $B \setminus A = \{5,6\}$, $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{3,4,5,6\}$, $A \cup B \cup C \cup D = \{2,3,4,5,6\}$, $A \cap B \cap C = \{2\}$, y $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$.
3. (a) $B \subset M$. (b) $F \cap B \cap C \neq \emptyset$. (c) $F \setminus (T \cup C) \subset B$.
5. (a) hasta (e) se deducen inmediatamente de las definiciones y de los diagramas de Venn obvios. Es fácil ver que los dos conjuntos de (f) están formados por las áreas (1), (2), (3), (4), y (7) de la Figura 1.8 de la Sección 1.7.
7. Los $2^3 = 8$ subconjuntos de $\{a,b,c\}$ son: él mismo, el conjunto vacío, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, y $\{b,c\}$. Los $2^4 = 16$ subconjuntos de $\{a,b,c,d\}$ son los 8 anteriores junto con $\{d\}$, $\{a,d\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$, y $\{a,b,c,d\}$.
9. (a) Véase la Figura 4. $n(A \cup B)$ es la suma de los números de elementos de (1), (2), y (3) respectivamente —esto es, $n(A \setminus B)$, $n(A \cap B)$, y $n(B \setminus A)$. $n(A) + n(B)$ es el número de elementos de (1) y (2) juntos, más el número de elementos de (2) y (3) juntos. Así, los elementos de (2) se cuentan dos veces. Por tanto, se debe restar el número de elementos de (2) (es decir, $n(A \cap B)$) para tener la igualdad. (b) Véase otra vez la Figura 4. $n(A \setminus B)$ es el número de elementos de (1). $n(A) - n(A \cap B)$ es el número de elementos de (1) y (2) juntos, menos el número de elementos de (2). Por tanto, es el número de elementos de (1).

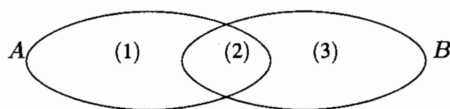


FIGURA 4

11. (b) no es válida en general. Por ejemplo, para los conjuntos del Problema 1, $(A \cap C) \triangle B = \{2\} \triangle \{2,5,6\} = \{5,6\}$, mientras que $(A \triangle B) \cap (C \triangle B) = \{3,4,5,6\} \cap \emptyset = \emptyset$ (alternativamente, véase la Figura 1.8 de la Sección 1.7).

Capítulo 2

2.2

1. (a) $f(0) = 0^2 + 1 = 1$, $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$, $f(1/2) = 5/4$, y $f(\sqrt{2}) = 3$. (b) (i) Para todo x. (ii) Cuando $(x+1)^2 + 1 = (x^2+1) + 2$, es decir, cuando $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 3$, ó $2x + 2 = 3$, es decir, $x = 1/2$. (iii) $x = \pm\sqrt{1/2}$.
3. (a) $f(0) = 0$, $f(a) = a^2$, $f(-a) = a^2 - 4a^2 = -3a^2$, y $f(2a) = 0$. (b) $3f(a) + f(-2a) = 3a^2 + [a^2 - (-2a - a)^2] = 3a^2 + a^2 - 9a^2 = -5a^2$.
5. (a) $C(0) = 1.000$, $C(100) = 41.000$, y $C(101) - C(100) = 501$. (b) $C(x+1) - C(x) = 2x + 301$ = incremento de coste al producir una unidad en exceso x del bien.
7. (a) $D(8) = 4$, $D(10) = 3{,}4$, y $D(10{,}22) = 3{,}334$. (b) $P = 10{,}9$.
9. (a) $f(tx) = 100(tx)^2 = 100t^2x^2 = t^2 100x^2 = t^2 f(x)$. (b) $P(tx) = (tx)^{1/2} = t^{1/2}x^{1/2} = t^{1/2}P(x)$.
11. (a) $f(a+b) = A(a+b) = Aa + Ab = f(a) + f(b)$. (b) $f(a+b) = 10^{a+b} = 10^a \cdot 10^b = f(a) \cdot f(b)$.
13. (a) $x \leq 5$. (b) $x \neq 0$ y $x \neq 1$. (c) $-3 < x \leq 1$ ó $x > 2$. (d) $x > 1$.
15. $D_g = [-2, \infty)$, $R_g = (-\infty, 1]$ (El mayor valor de $g(x)$ es 1 y se alcanza para $x = -2$. Si x aumenta de 1 a ∞, $g(x)$ disminuye de 1 a $-\infty$.)

17. $$f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = \frac{a\left(\dfrac{ax+b}{cx-a}\right)+b}{c\left(\dfrac{ax+b}{cx-a}\right)-a} = \frac{a(ax+b)+b(cx-a)}{c(ax+b)-a(cx-a)} = \frac{a^2x+bcx}{a^2+bc} = x.$$

2.3

1. Véase la Figura 5.

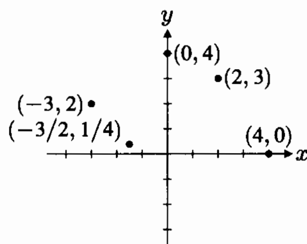


FIGURA 5

3. Véanse las Figuras 6 a 8.

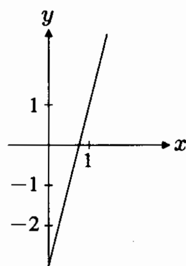


FIGURA 6

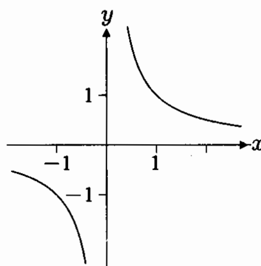


FIGURA 7

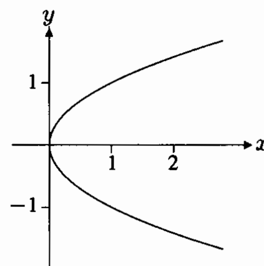


FIGURA 8

5. (a) $\sqrt{2}$. (b) $\sqrt{29}$. (c) $\frac{1}{2}\sqrt{205}$. (d) $\sqrt{x^2+9}$. (e) $2|a|$. (f) $\sqrt{8}$.

7. (a) 5,362. (b) $\sqrt{(2\pi)^2+(2\pi-1)^2} = \sqrt{8\pi^2-4\pi+1} \approx 8{,}209$.

9. (a) $(x+5)^2+(y-3)^2 = 4$: centro $(-5,3)$, radio 2. (b) $(x+3)^2+(y-4)^2 = 12$: centro $(-3,4)$, radio $\sqrt{12}$.

11. La condición es $\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-4)^2+y^2}$, ó $(x-6)^2+y^2 = 4^2$.

13. (a) Las dos expresiones dan el precio total por unidad (precio del bien más coste de transporte) para el producto transportado a (x,y) desde A y B respectivamente. (b) La condición es $p+10\sqrt{x^2+y^2} = p+5\sqrt{(x-60)^2+y^2}$, que simplificado, da $(x+20)^2+y^2 = 40^2$.

15. $x^2+y^2+Ax+By+C=0 \iff x^2+Ax+y^2+By+C=0 \iff x^2+Ax+(\frac{1}{2}A)^2+y^2+By+(\frac{1}{2}B)^2 = \frac{1}{4}(A^2+B^2-4C) \iff (x+\frac{1}{2}A)^2+(y+\frac{1}{2}B)^2 = \frac{1}{4}(A^2+B^2-4C)$. Esta última es la ecuación de una circunferencia de centro $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$. Si $A^2+B^2=4C$, la gráfica consiste en un único punto: $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$. Para $A^2+B^2<4C$, el conjunto de soluciones es vacío.

2.4

1. (a) En todo x. (b) $x=0$. (c) En todo x. (d) $x=0$ (Para $x>0$, la ecuación $y^4=x$ tiene *dos* soluciones.) (e) $x=\pm 1$. (f) Para todo $x\neq 3$. (g) En todo x. (h) En todo x.

3. Supongamos que c es positivo. Entonces $f(x) + c$ se obtiene elevando la gráfica de $f(x)$ c unidades. $f(x + c)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ c unidades a la izquierda. $-f(x)$ se obtiene por reflexión de la gráfica de $f(x)$ en el eje x. $f(-x)$ se obtiene por reflexión de la gráfica de $f(x)$ en el eje y.

2.5

1. (a) Pendiente $= (8 - 3)/(5 - 2) = 5/3$. (b) $-2/3$. (c) 51/5.

3. L_1 es $y = x + 2$, con pendiente 1; L_2 es $y = -\frac{3}{5}x + 3$, con pendiente $-3/5$; L_3 es $y = 1$, con pendiente 0; L_4 es $y = 3x - 14$, con pendiente 3; L_5 es $y = \frac{1}{9}x + 2$, con pendiente 1/9.

5. (a), (b), y (d) son lineales; (c) no lo es.

7. (a) L_1 es $(y - 3) = 2(x - 1)$ ó $y = 2x + 1$. (b) L_2 es $y - 2 = \frac{3-2}{3-(-2)}[x - (-2)]$ ó $y = x/5 + 12/5$. (c) L_3 es $y = -x/2$. (d) L_4 es $x/a + y/b = 1$, ó $y = -bx/a + b$. Las gráficas están en las Figuras 9 y 10.

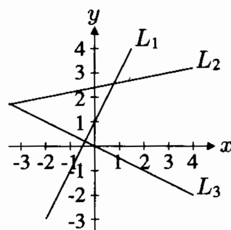


FIGURA 9

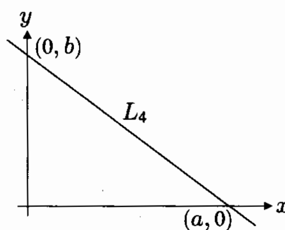


FIGURA 10

9. La fórmula punto-punto da $y - 200 = \dfrac{275 - 200}{150 - 100}(x - 100)$ ó $y = \frac{3}{2}x + 50$.

11. (a) abril de 1960 corresponde a $t = 9/4$, luego $N(9/4) = -17.400 \cdot (9/4) + 151.000 = 111.850$. (b) $-17.400t + 151.000 = 0$ implica que $t = 8{,}68$, que se corresponde con septiembre de 1966.

13. Para (a), cuyas gráficas están en la Figura 11, la solución es $x = 3$, $y = -2$. Para (b), en la Figura 12, la solución es $x = 2$, $y = 0$. Para (c), en la Figura 13, no existen soluciones porque las rectas son paralelas.

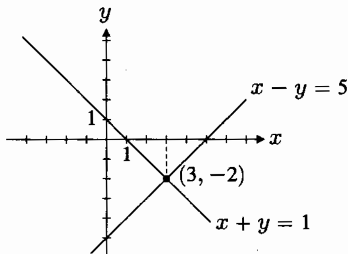


FIGURA 11

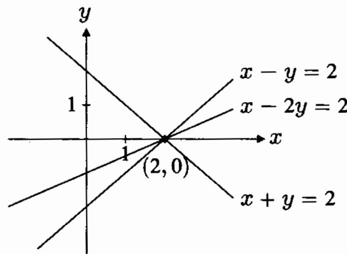


FIGURA 12

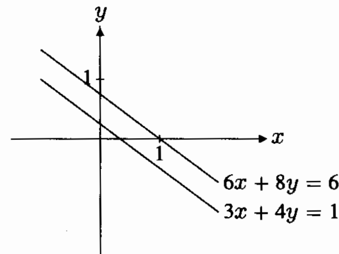


FIGURA 13

15. Véase la Figura 14. $C = 0{,}8824Y - 1{,}3941$. La pendiente es una aproximación de la propensión marginal al consumo.

17. Véase la Figura 15. Cada flecha muestra hacia qué lado de la recta se verifica la desigualdad en cuestión. El triángulo sombreado es el conjunto de soluciones.

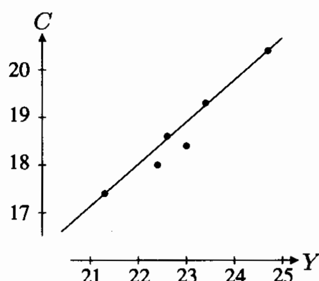


FIGURA 14

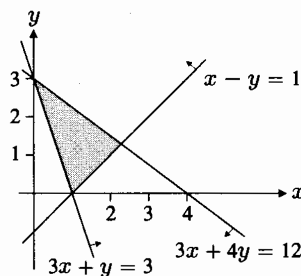


FIGURA 15

Capítulo 3

3.1

1. (a)

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = x^2 - 4x$	5	0	-3	-4	-3	0	5

(b) Véase la Figura 16. (c) $f(x) = (x-2)^2 - 4$. El mínimo es $(2, -4)$. (d) $x = 0$ y $x = 4$.

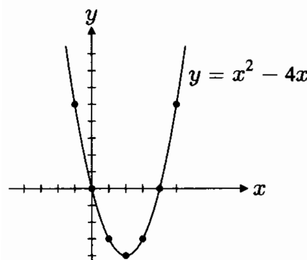


FIGURA 16

3. (a) $x^2+4x = (x+2)^2-4$. Mínimo $x = -2$, valor -4. (b) $x^2+6x+18 = (x+3)^2+9$. Mínimo $x = -3$, valor 9. (c) $-3x^2 + 30x - 30 = -3(x-5)^2 + 45$. Máximo $x = 5$, valor 45. (d) $9x^2 - 6x - 44 = 9(x - 1/3)^2 - 45$. Mínimo $x = 1/3$, valor -45. (e) $-x^2 - 200x + 30.000 = -(x+100)^2 + 40.000$. Máximo $x = -100$, valor 40.000. (f) $x^2 + 100x - 20.000 = (x+50)^2 - 22.500$. Mínimo $x = -50$, valor -22.500.

5. (a) $x = 2p$ y $x = p$. (b) $x = p$ y $x = q$. (c) $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

7. El mayor valor de A se alcanza para $x = 250$. ($A = -x^2 + 500x = -(x-250)^2 + 62.500$).

9. $x = 4(r-1)/(r^2+1)$. (Úsese (3.4).)

11. Usando (3.3), se ve que $f(x) = a(x-\bar{x})^2 - A$, con $\bar{x} = -b/2a$, y $A = (b^2 - 4ac)/4a$. Se tiene que $f(\bar{x}-t) = a(\bar{x}-t-\bar{x})^2 - A = a(-t)^2 - A = at^2 - A$, y $f(\bar{x}+t) = a(\bar{x}+t-\bar{x})^2 - A = at^2 - A$. Así, $f(\bar{x}-t) = f(\bar{x}+t)$ para todo t, y la gráfica es simétrica respecto de la recta $x = \bar{x}$.

3.2

1. (a) $\pi(Q) = -\frac{1}{2}Q^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)Q$. (b) Usando (3.4), $Q^* = \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma$ maximiza los beneficios si $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma > 0$. Si $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma \leq 0$, entonces $Q^* = 0$. (c) $\pi(Q) = -\frac{1}{2}Q^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - t)Q$

y $Q^* = \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - t$ si $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - t > 0$ (d) Ingresos por tasa de exportación= $tQ^* = t(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - t)$. Los ingresos máximos se obtienen para $t = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)$.

3.3

1. (a) 1 y -2. (b) 1, 5, y -5. (c) -1.
3. (a) $x + 4$. (b) $x^2 + x + 1$. (c) $-3x^2 - 12x$.
5. (a) $x^3 - x - 1$ no es 0 para $x = 1$, luego la división tiene un resto. (b) $2x^3 - x - 1$ es 0 para $x = 1$, luego la división no tiene resto. (c) $x^3 - ax^2 + bx - ab$ es 0 para $x = a$, luego la división no tiene resto. (d) $x^{2n} - 1$ es 0 para $x = -1$, luego la luego la división no tiene resto.
7. (a) $\frac{1}{2}(x + 1)(x - 3)$. (b) $-2(x - 1)(x - 2)(x + 3)$. (c) $\frac{1}{2}(x - 2)^2(x + 3)$.

3.4

1. (a) 2. (b) 1/3. (c) 5. (d) 1/8.
3. (a) 4/3. (b) 2,5. (c) 1/5.
5. (a) $a^{1/5}$. (b) $a^{163/60}$. (c) $9a^7/2$. (d) $a^{1/4}$.
7. (b) y (c) son válidas. Las demás no son válidas en general.
9. La superficie es $4{,}84 \cdot (100)^{2/3}\,\text{m}^2 \approx 104{,}27, \text{m}^2$. Se necesitan $104{,}27/5$ litros (algo menos de 21).
11. (a) $a - b$. (b) $(a + x)/2bx^{3/2}$.

3.5

1. El tiempo de duplicación t^* viene dado por la ecuación $(1{,}0072)^{t^*} = 2$. Usando una calculadora, se obtiene $t^* \approx 96{,}6$.
3. (a) El ahorro después de t años: $100\left(1 + 12/100\right)^t = 100 \cdot (1{,}12)^t$
(b)

x	1	2	5	10	20	30	50
$100 \cdot (1{,}12)^x$	112	125,44	176,23	310,58	964,63	2.995,99	28.900,21

5. Las gráficas están en la Figura 17.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
2^{-x}	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

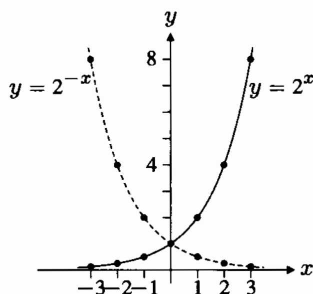


FIGURA 17

7. Si $5{,}1 \cdot (1{,}035)^t = 3{,}91 \cdot 10^{11}$, se tiene $(1{,}035)^t = 3{,}91 \cdot 10^{11}/5{,}1 = 0{,}7667 \cdot 10^{11}$. Usando una calculadora se obtiene que $t \approx 728$, luego el año es 728+1.969=2.697. Ese año cada habitante de Zimbabwe no tendría más que 1 m^2 de territorio.
9. $(1 + p/100)^{15} = 2$, luego $p \approx 4{,}7\%$.
11. (b) y (d) no definen funciones exponenciales. (En (f): $y = (1/2)^x$.)
13. Resolver la ecuación $y = Ab^x$ en A y b usando los dos puntos indicados en cada gráfica. Esto da $y = 2 \cdot 2^x$, $y = 2 \cdot 3^x$, e $y = 4(1/2)^x$.

3.6

1. Sólo (c) no define una función (rectángulos con distintas áreas pueden tener el mismo perímetro).
3. La función no puede ser inyectiva porque al menos dos personas deben tener el mismo grupo sanguíneo.

Capítulo 4

4.2

1. $f(5+h) - f(5) = 4(5+h)^2 - 4 \cdot 5^2 = 4(25+10h+h^2) - 100 = 40h + 4h^2$, luego $[f(5+h) - f(5)]/h = 40 + 4h \to 40$ si $t \to 0$ y por tanto $f'(5) = 40$. Esto está de acuerdo con (4.8) cuando $a = 4$ y $b = c = 0$.
3. $f'(a) < 0, \quad f'(b) = 0, \quad f'(c) > 0, \quad f'(d) < 0.$
5. (a) $f'(0) = 3$. (b) $f'(1) = 2$. (c) $f'(3) = -1/3$. (d) $f'(0) = -2$. (e) $f'(-1) = 0$. (f) $f'(1) = 4$.
7. (a) $dD(P)/dP = -b$. (b) $C'(x) = 2qx$.
9. (a) $f(x+h) - f(x) = a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$. Aquí $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$ y $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$. Usando el álgebra elemental, $[f(x+h) - f(x)]/h = 3ax^2 + 2bx + c + 3ahx + ah^2 + bh$, que tiende evidentemente a $3ax^2 + 2bx + c$ cuando $h \to 0$. (b) Si $a = 1$ y $b = c = d = 0$, se sigue el resultado del Ejemplo 4.3. Igualmente se sigue el del Problema 6 cuando $a = 0$.

4.3

1. $C'(100) = 203$ y $C'(x) = 2x + 3$.
3. (a) $S'(Y) = b$. (b) $S'(Y) = 4Y + 10$.
5. (a) $R'(x) = a$, $C'(x) = 2a_1x + b_1$, y $\pi'(x) = a - 2a_1x - b_1$. El beneficio marginal es 0 cuando $x = (p - b_1)/2a_1$. (b) $R'(x) = 2ax$, $C'(x) = a_1$, y $\pi'(x) = 2ax - a_1$. El beneficio marginal es 0 cuando $x = a_1/2a$. (b) Con $R(x)ax - bx^3$, $R'(x) = a - 2bx$, $C'(x) = a_1$, y $\pi'(x) = a - 2bx - a_1$. El beneficio marginal es 0 cuando $x = (a - a_1)/2b$.

4.4

1. (a) 3. (b) $-1/2$. (c) $(13)^3 = 2.197$. (d) 40. (e) 1. (f) $-3/4$.
3. El $\lim_{t \to a} h(t)$ es igual a 0 para $a = -1$, a 1 para $a = 0$, y a 3 para $a = 2$. Para $a = 3$ y 4, no existe el límite.
5. (a) Para $h \neq 2$,

$$\frac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3h}}{h-2} = \frac{\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3h}\right)3h}{(h-2)3h} = \frac{h-2}{(h-2)3h} = \frac{1}{3h},$$

que tiende a 1/6 cuando $h \to 2$. (b) $-\infty$ (No existe el límite.) (c) 2 (*Indicación:* $t-3$ es un factor común de $32t-96$ y t^2-2t-3.) (d) $\sqrt{3}/6$ (*Indicación:* Multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{h+3}+\sqrt{3}$.) (e) $-2/3$ (*Indicación:* $t+2$ es un factor común.) (f) 1/4 (*Indicación:* $4-x = (2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})$.)

7. (a) 0,6931. (b) 1,0986. (c) 2,7183.

4.5

1. (a) 0. (b) $4x^3$. (c) $90x^9$. (d) 0 (¡Recuérdese que π es una constante!)
3. (a) $6x^5$. (b) $33x^{10}$. (c) $50x^{49}$. (d) $28x^{-8}$. (e) x^{11}. (f) $4x^{-3}$. (g) $(-3/2)x^{-3/2}$. (h) $3x^{-5/2}$.
5. Sea $x-a=h$. Entonces $x=a+h$, y el resultado se sigue de la definición habitual de derivada (4.3). Para $f(x)=x^2$, la ecuación da $f'(a)=2a$.
7. (a) Sea $f(x)=x^2$. Entonces $f'(x)=2x$, y el límite es igual a $f'(5)=2\cdot 5=10$. (b) Sea $f(x)=x^5$. La derivada es $f'(x)=5x^4$, y el límite es $f'(1)=5\cdot 1^4=5$. (c) Sea $f(x)=5x^2+10$. Entonces $f'(x)=10x$, y el éste es el valor del límite.

4.6

1. (a) 1. (b) $1+2x$. (c) $15x^4+8x^3$. (d) $32x^3+x^{-1/2}$. (e) $1/2-3x+15x^2$. (f) $-21x^6$.
3. (a) $-6x^{-7}$. (b) $(3/2)x^{1/2}-(1/2)x^{-3/2}$. (c) $(-3/2)x^{-5/2}$. (d) $-2/(x-1)^2$. (e) $(-4x-5)/x^6$. (f) $34/(2x+8)^2$. (g) $-33x^{-12}$. (h) $(-3x^2+2x+4)/(x^2+x+1)^2$.
5. $R'(P)=D(P)+PD'(P)$.
7. (a) $y=-3x+4$. (b) $y=x-1$. (c) $y=(17x-19)/4$. (d) $y=-(x-3)/9$.
9. (a) $\dfrac{2(AD-BC)p}{(Cp^2+D)^2}$. (b) $-6y^{-7}-16y^{-9}$. (c) $-2f'(x)/[1+f(x)]^2$.
11. Si $f(x)=1/x^n$, por la regla de derivación del cociente, $f'(x)=(0\cdot x^n-1\cdot nx^{n-1})/(x^n)^2 = -nx^{-n-1}$, que es la regla de la potencia.

4.7

1. (a) $y''=20x^3-36x^2$. (b) $y''=(-1/4)x^{-3/2}$. (c) $y''=(-2)(x+1)^{-3}$.
3. (a) $y''=18x$. (b) $Y'''=36$. (c) $d^3z/dt^3=-2$. (d) $f^{(4)}(1)=84.000$.
5. $y''=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$, $y'''=f'''(x)g(x)+3f''(x)g'(x)+3f'(x)g''(x)+f(x)g'''(x)$.
7. $f(x)=x^{16/3}$ verifica esa propiedad. Derivando, $f^{(5)}(x)=(16/3)(13/3)(10/3)(7/3)(4/3)x^{1/3}$ para todo x, pero sólo para $x\neq 0$ se tiene $f^{(6)}(x)=(16/3)(13/3)(10/3)(7/3)(4/3)(1/3)x^{-2/3}$.

Capítulo 5

5.1

1. (a) $f(x)=9x^4+6x^2+1$, luego $f'(x)=36x^3+12x$. (b) Usando (5.1): $f'(x)=2(3x^2+1)^{2-1}6x = 36x^3+12x$.
3. (a) $\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$. (b) $\frac{3}{2}x^2(x^3+1)^{-1/2}$. (c) $-\frac{3}{2}(x-1)^{-2}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{-1/2}$. (d) $-66x(1-x^2)^{32}$. (e) $3x^2\sqrt{1-x}-\dfrac{x^3}{2\sqrt{1-x}}$. (f) $\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}(1-x)^{1/5}-\frac{1}{5}(1+x)^{1/3}(1-x)^{-4/5}$.

5. (a) $1+f'(x)$ (b) $2f(x)f'(x)-1$. (c) $4[f(x)]^3f'(x)$. (d) $2xf(x)+x^2f'(x)+3[f(x)]^2f'(x)$. (e) $f(x)+xf'(x)$. (f) $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. (g) $[2xf(x)-x^2f'(x)]/[f(x)]^2$. (h) $[2xf(x)f'(x)-3(f(x))^2]/x^4$. (i) $\frac{1}{3}\{f(x)+[f(x)]^3+x\}^{-2/3}\{f'(x)+3[f(x)]^2f'(x)+1\}$.
7. $dy/dv = Aapqv^{p-1}(av^p+b)^{q-1}$.
9. $f'(x) = m(x-a)^{m-1}(x-b)^n + n(x-a)^m(x-b)^{n-1}$. Factorizando esta expresión, $f'(x) = [m(x-b)+n(x-a)](x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1} = 0$ en $x_0 = (na+mb)/(n+m)$. Evidentemente $a < (na+mb)/(n+m) < b$ si y sólo si $a(n+m) < na+mb < b(n+m)$. Pero $a(n+m) < na+mb$ si y sólo si $(a-b)m < 0$, lo que es cierto porque $a < b$ y m es positivo. Aún más, $na+mb < b(n+m)$ si y sólo si $0 < n(b-a)$, lo que también es cierto.
11. Úsese la regla del producto y (5.1). $m = n = 1$ da la regla del producto. $m = -n = 1$ da la regla el cociente.

5.2

1. (a) $dy/du = 20u^3$ y $du/dx = 2x$ luego $dy/dx = (dy/du)\cdot(du/dx) = 40u^3x = 40x(1+x^2)^3$. (b) $dy/dx = (1-6u^5)(du/dx) = [1-6(1/x+1)^5](-1/x^2)$.
3. (a) $y' = -5(x^2+x+1)^{-6}(2x+1)$. (b) $y' = \frac{1}{2}[x+(x+x^{1/2})^{1/2}]^{-1/2}[1+\frac{1}{2}(x+x^{1/2})^{-1/2}(1+\frac{1}{2}x^{-1/2})]$. (c) $y' = ax^{a-1}(px+q)^b + x^abp(px+q)^{b-1}$.
5. $dY/dt = F'[h(t)]\cdot h'(t)$.
7. $h'(x) = f'(x^2)2x$.
9. (a) $\dot{x}/x = 2\dot{a}/a+\dot{b}/b$. (b) $\dot{x}/x = 5\dot{a}/a-\dot{b}/b$. (c) $\dot{x}/x = (\alpha+\beta)(\alpha a^{\alpha-1}\dot{a}+\beta b^{\beta-1}\dot{b})/(a^\alpha+b^\beta)$. (d) $\dot{x}/x = \alpha\dot{a}/a+\beta\dot{b}/b$.
11. (a) $h(x) = f(g(x))$, donde $g(x) = 1+x+x^2$ y $f(u) = u^{1/2}$, luego $h'(x) = (1/2)(1+x+x^2)^{-1/2}(1+2x)$. (b) $h(x) = f(g(x))$, donde $g(x) = x^{100}+28$ y $f(u) = u^{-1}$, luego $h'(x) = -(x^{100}+28)^{-2}100x^{99}$.
13. (a) $y' = 5(x^4)^4\cdot 4x^3 = 20x^{19}$. (b) $y' = 3(1-x)^2(-1) = -3+6x-3x^2$.
15. $dR/dt = (dR/dS)(dS/dK)(dK/dt) = \alpha S^{\alpha-1}\beta\gamma K^{\gamma-1}Apt^{p-1}$.

5.3

1. (a) La derivación con respecto a x da $1\cdot y + xy' = 0$, luego $y' = -y/x$. Como $y = 1/x$, esto da $y' = -1/x^2$. (b) $y' = (1+3y)/(1-3x)$. Como $y = (x-2)/(1-3x)$, se tiene $y' = -5/(1-3x)^2$. (c) $y' = 5x^4/6y^5$. Como $y = x^{5/6}$, esto da $y' = (5/6)x^{-1/6}$.
3. $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{2u+v}{3v^2-u}$. Luego, $dv/du = 0$ cuando $v = -2u$. Sustituyendo este valor en la ecuación original se obtiene que $dv/du = 0$ en $(u,v) = (1/8,-1/4)$.
5. $dQ/dP = -19/P^{3/2}$.
7. $Y = f(Y) + I + \overline{A} - g(Y)$. Derivando con respecto a I y usando la regla de la cadena, $dY/dI = f'(Y)(dY/dI) + 1 - g'(Y)(dY/dI)$. Despejando dY/dI se tiene $dY/dI = 1/[1-f'(Y)+g'(Y)]$. Las importaciones deben incrementar cuando aumentan los ingresos, luego $g'(Y) > 0$. Así $dY/dI > 0$.
9. Derivando con respecto a x da $g'(f(x))f'(x) = 1$, luego $f'(x) = 1/g'(f(x))$ (si $g'(f(x)) \neq 0$).

5.4

1. Si $f(x) = \sqrt{1+x}$, entonces $f'(x) = 1/2\sqrt{1+x}$, luego $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1/2$. Por tanto, (5.5) da $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}(x-0) = 1+\frac{1}{2}x$. Véase la Figura 18.
3. (a) $1/(1+x) \approx 1-x$. (b) $(1+x)^5 \approx 1+5x$. (c) $(1-x)^{1/4} \approx 1-x/4$.

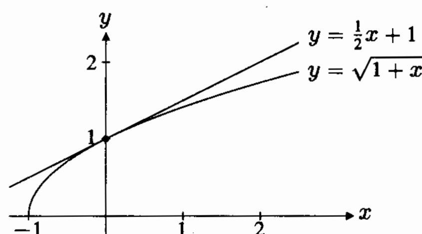


FIGURA 18

5. (a) $\sqrt[3]{1{,}1} = (1 + 1/10)^{1/3} \approx 1 + (1/3)(1/10) \approx 1{,}033$. (b) $\sqrt[5]{33} = 2(1 + 1/32)^{1/5} \approx 2(1 + 1/160) = 2{,}0125$. (c) $\sqrt[3]{9} = 2(1+1/8)^{1/3} \approx 2(1+1/24) \approx 2{,}083$. (d) $(1{,}02)^{25} = (1+1/50)^{25} \approx 1+1/2 = 1{,}5$. (e) $\sqrt{37} = (36+1)^{1/2} = 6(1+1/36)^{1/2} \approx 6(1+1/72) \approx 6{,}083$. (f) $(26{,}95)^{1/3} = (27 - 5/100)^{1/3} = 3(1 - 0{,}05/27)^{1/3} \approx 3 - 0{,}05/27 \approx 2{,}998$.

7. $V(r) = (4/3)\pi r^3$. Aproximación lineal: $V(2 + 0{,}03) - V(2) \approx 0{,}03 \cdot V'(2) = 0{,}48\pi$. Incremento real: $V(2{,}03) - V(2) = 0{,}487236\pi$.

5.5

1. (a) $(1 + x)^5 \approx 1 + 5x + 10x^2$. (b) $AK^\alpha \approx A + \alpha A(K - 1) + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)A(K - 1)^2$. (c) $(1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2)^{1/2} \approx 1 + \frac{3}{4}\varepsilon - \frac{1}{32}\varepsilon^2$. (d) $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x + x^2$.

3. La derivación implícita da (∗) $3x^2y + x^3y' + 1 = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$. Sustituyendo $x = 0$ e $y = 1$ da $1 = (\frac{1}{2})1^{-1/2}y'$, luego $y' = 2$. Derivando (∗) una vez más con respecto a x da $6xy + 3x^2y' + 3x^2y' + x^3y'' = -\frac{1}{4}y^{-3/2}(y')^2 + \frac{1}{2}y^{-1/2}y''$. Sustituyendo $x = 0$, $y = 1$, e $y' = 2$ da $y'' = 2$. Luego $y(x) \approx 1 + 2x + x^2$.

5. Úsese (5.10) con $f(x) = (1 + x)^n$ y $x = p/100$. Entonces $f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$ y $f''(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2}$. La aproximación se deduce de aquí.

5.6

1. (a) -3. (b) 100. (c) $1/2$. (d) $-3/2$.

3. (a) Un incremento en los precios del 10% conduce a un descenso del tráfico del 4% aproximadamente. (b) Una razón podría ser que para viajes de larga distancia, más personas toman el avión si las tarifas de ferrocarril suben.

5. $\mathrm{El}_x f(x)^p = \dfrac{x}{f(x)^p} p\,(f(x))^{p-1} f'(x) = p\dfrac{x}{f(x)} f'(x) = p\,\mathrm{El}_x f(x)$.

7. (a) $\mathrm{El}_x A = (x/A)(dA/dx) = 0$. (b) $\mathrm{El}_x(fg) = \dfrac{x}{fg}(fg)' = \dfrac{x}{fg}(f'g + fg') = \dfrac{xf'}{f} + \dfrac{xg'}{g} = \mathrm{El}_x f + \mathrm{El}_x g$. (c) $\mathrm{El}_x \dfrac{f}{g} = \dfrac{xg}{f}\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{xg}{f}\left(\dfrac{gf' - fg'}{g^2}\right) = \dfrac{xf'}{f} - \dfrac{xg'}{g} = \mathrm{El}_x f - \mathrm{El}_x g$. (d) $\mathrm{El}_x(f+g) = \dfrac{x(f' + g')}{f + g} = \dfrac{f\dfrac{xf'}{f} + g\dfrac{xg'}{g}}{f + g} = \dfrac{f\mathrm{El}_x f + g\mathrm{El}_x g}{f + g}$. (e) es como (d), pero sustituyendo $+g$ por $-g$ y $-g'$ por $-g'$. (f) $z = f(g(u))$, $u = g(x) \Rightarrow \mathrm{El}_x z = \dfrac{x}{z}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{u}\dfrac{u}{z}\dfrac{dz}{du}\dfrac{du}{dx} = \mathrm{El}_u f(u)\,\mathrm{El}_x u$.

9. (a) $5 + \mathrm{El}_x f(x)$. (b) $\frac{3}{2}\mathrm{El}_x f(x)$. (c) $\dfrac{x + \frac{1}{2}\sqrt{f(x)}\,\mathrm{El}_x f(x)}{x + \sqrt{f(x)}}$. (d) $-\mathrm{El}_x f(x)$.

Capítulo 6

6.1

1. (a) -4. (b) 0. (c) 2. (d) $-\infty$. (e) ∞. (f) $-\infty$.
3. (a) (i) $-\infty$. (ii) ∞. (iii) 0. (iv) A. (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = B$.
5. (a) $y = x - 1$ ($x = -1$ es una asíntota vertical). (b) $y = 2x - 3$ (c) $y = 3x + 5$ ($x = 1$ es una asíntota vertical). (d) $y = 5x$ ($x = 1$ es una asíntota vertical).

6.2

1. (b) y (d) son continuas; las otras no lo son necesariamente. (Para (c), considérese el Problema 6.)
3. f es discontinua en $x = 0$. g es continua en $x = 2$. La gráficas de f y g están en las Figuras 19 y 20.

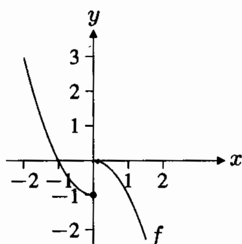


FIGURA 19

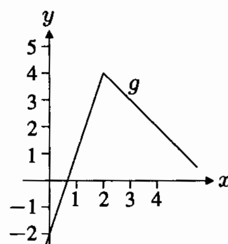


FIGURA 20

5. $a = 5$, luego $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = a - 1$.
7. No. Sea $f(x) = g(x) = 1$ para $x < a$, sea $f(x) = -1$, y $g(x) = 3$ para $x \geq a$. Entonces f y g son ambas discontinuas en $x = a$, pero $f(x) + g(x) = 2$ para todo x, y por tanto, $f + g$ es contiua para todo x. (¡Dibújese una figura!) Sea $h(x) = -f(x)$ para todo x; h también es discontinua en $x = a$, mientras que $f(x)h(x) = -1$ para todo x, y por tanto $f \cdot h$ es continua para todo x.

6.3

1. $f'(0^+) = 1$ y $f'(0^-) = 0$. Véase la Figura 21.
3. Si $x > 0$, entonces $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, y $f'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por tanto, la gráfica tiene una cúspide en $x = 0$. Véase la Figura 22.

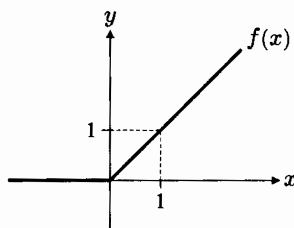


FIGURA 21

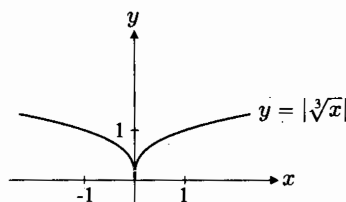


FIGURA 22

6.4

1. (a) $\alpha_n = \dfrac{(3/n) - 1}{2 - (1/n)} \to -\dfrac{1}{2}$ cuando $n \to \infty$. (b) $\beta_n = \dfrac{1 + (2/n) - (1/n^2)}{3 - (2/n^2)} \to \dfrac{1}{3}$ cuando $n \to \infty$. (c) $3 \cdot (-1/2) + 4 \cdot (1/3) = -1/6$. (d) $(-1/2) \cdot (1/3) = -1/6$. (e) $(-1/2)/(1/3) = -3/2$. (f) $\sqrt{(1/3) - (-1/2)} = \sqrt{5/6} = \sqrt{30}/6$.

6.5

1. $s_n = (3/2)\left[1 - (1/3)^n\right] \to 3/2$ cuando $n \to \infty$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 3/2$.
3. (a) Razón $k = 1/p$. Converge a $1/(p-1)$ si $|p| > 1$. (b) Razón $k = 1/\sqrt{x}$. Converge a $x\sqrt{x}/(\sqrt{x} - 1)$ si $\sqrt{x} > 1$, esto es, si $x > 1$. (c) Razón $k = x^2$. Converge a $x^2/(1 - x^2)$ si $|x| < 1$. (d) Razón $k = 1/(1 + x)$. Converge a $1 + 1/x$ si $|1/(1 + x)| < 1$, esto es, si $x > 0$ y si $x < -2$.
5. Si x denota el número de años a partir de 1971 que durarán las reservas de hierro de la Tierra, se tiene $794 + 794 \cdot 1{,}05 + \cdots + 794 \cdot (1{,}05)^x = 249 \cdot 10^3$. Usando (6.10), se obtiene $794[1 - (1{,}05)^x]/(1 - 1{,}05) = 249 \cdot 10^3$ ó $1{,}05^x \approx 16{,}68$. Usando una calculadora, se obtiene $x \approx 57{,}7$, y las reservas se agotarán mediado el año 2029.
7. (a) Serie geométrica de razón 100/101, converge a 100. (b) Diverge de acuerdo con (6.18). (c) Converge de acuerdo con (6.18). (d) Diverge porque el término n-ésimo $(1 + n)/(4n - 3) \to 1/4$ cuando $n \to \infty$. (e) Serie geométrica de razón $-1/2$, converge a $-1/3$. (f) Serie geométrica de razón $1/\sqrt{3}$, converge a $\sqrt{3}/(\sqrt{3} - 1)$.

6.6

1. Úsese (6.21) con $n = 15$, $r = 12/100 = 0{,}12$, y $a = 3.500$ para obtener

$$A_{15} = \frac{3.500}{0{,}12}\left[1 - \frac{1}{(1{,}12)^{15}}\right] \approx 23.838$$

3. Sea $r = p/100$. Entonces, aplicando (6.21) con $a = 1.000$ y $n = 5$ da $A_5 = (1.000/r)[1 - 1/(1+r)^5] = 4.340$. Para $p = 5\%$, el valor es 4.329,48\$; para $p = 4{,}5\%$, el valor es 4.389,98\$. Como $dA_5/dr < 0$ se deduce que p es algo menor que el 5%.
5. La Ecuación (6.23) se simplifica como $\dfrac{a}{1 + r} + \dfrac{a}{(1 + r)^2} + \cdots = -a_0$. Por (6.22) se tiene $a/r = -a_0$, luego $r = -a/a_0$.
7. Por hipótesis, $f(0) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} > 0$. También se tiene que $f(r) \to a_0 < 0$ cuando $r \to \infty$. Aún más, $f'(r) = -a_1(1 + r)^{-2} - \cdots - (n - 1)a_{n-1}(1 + r)^{-n} < 0$, luego $f(r)$ es estrictamente decreciente. Esto garantiza que hay una única tasa interna de rendimiento.

6.7

1. Con $f(x) = 5x + 2$, $a = -1$, y $A = -3$, se tiene $|f(x) - A| = |5x + 2 - (-3)| = |5x + 5| = 5|x + 1|$. Sea $\varepsilon > 0$. Escójase $\delta = \varepsilon/5$. El resultado se sigue de (6.24).
3. Como $f(x)$ y $h(x)$ tienden ambas a 2 cuando x tiende a 0, (6.27) implica que $\lim_{x \to 0} g(x) = 2$.

Capítulo 7

7.1

1. (a) Sea $f(x) = x^7 - 5x^5 + x^3 - 1$. Entonces f es continua, $f(-1) = 2$, y $f(1) = -4$, luego de acuerdo con el Teorema 7.2, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución en $(-1, 1)$. Análogamente se resuelven (b) y (c).

3. La altura del lector es una función continua del tiempo. En algún momento su altura fue menos de un metro. Probablemente, el lector mide ahora más de un metro. El teorema del valor intermedio (y el sentido común) aseguran la conclusión.
5. (a) Véase la Figura 23. (b) Defínase $g(x) = f(x) - x$. Entonces $g(a) \geq 0$ y $g(b) \leq 0$. Si $g(a)$ ó $g(b)$ es 0, f tiene un punto fijo. Si $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$, entonces $g(x) = 0$ para algún x^* de (a, b) por el teorema del valor intermedio y x^* es un punto fijo de f.

7.2

1. f es continua en $[0, 5]$, luego se aplica el teorema de los valores extremos.
3. f tiene un máximo $x = 1$ y mínimo en todos los $x > 1$. (Dibuje el lector una gráfica). Sin embargo la función es discontinua en $x = 1$, y su dominio de definición no es cerrado ni acotado.

7.3

1. (a) $\xi = 3/2$. (b) $\xi = \sqrt{2}/2$. (c) $\xi = \sqrt{12}$. (d) $\xi = \sqrt{3}$.
3. $\xi = \pm 1/\sqrt{27}$. Las condiciones del teorema del valor medio no se verifican porque f no es derivable en $x = 0$. Véase la Figura 24.

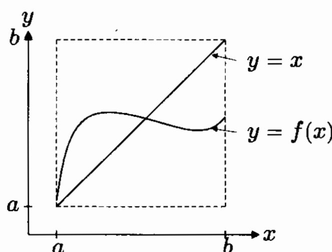


FIGURA 23

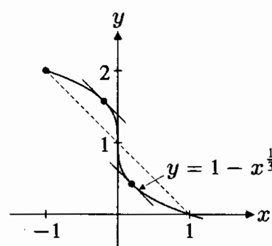


FIGURA 24

7.4

1. $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - (1 + c)^{-4}x^3$.
3. $(1 + 1/8)^{1/3} = 1 + 1/24 - 1/576 + R_3(1/8)$, donde $0 < R_3(1/8) < 5/(81 \cdot 8^3)$. Por tanto, $\sqrt[3]{9} = 2(1 + 1/8)^{1/3} \approx 2{,}080$, con tres cifras decimales exactas.
5. La idea es la misma del Problema 4. La expresiones crecen mucho y no las reproducimos aquí.

7.5

1. (a) $\lim_{x\to 1}(x - 1)/(x^2 - 1) = \lim_{x\to 1} 1/2x = 1/2$. (b) $\lim_{x\to a} 2x/1 = 2a$ (c) $\lim_{x\to -2}(3x^2 + 6x)/(3x^2 + 10x + 8) = \lim_{x\to -2}(6x + 6)/(6x + 10) = 3$.
3. La segunda fracción no es "0/0". El límite correcto es 5/2.
5. El límite no existe si $b \neq d$. Si $b = d$, el límite es "0/0" y por la regla de l'Hôpital, es

$$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{2}a(ax + b)^{-1/2} - \frac{1}{2}c(cx + d)^{-1/2}]/1 = a/2\sqrt{b} - c/2\sqrt{d} = (a - c)/2\sqrt{b}$$

7. Se tiene

$$\sqrt[n]{x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n} - x = x\left(\sqrt[n]{1 + a_1/x + \cdots + a_n/x^n} - 1\right)$$
$$= \frac{\sqrt[n]{1 + a_1/x + \cdots + a_n/x^n} - 1}{1/x}$$

Úsese a continuación la Regla de l'Hôpital.

7.6

1. $p = 64/3 - 10D/3$.
3. (a) $x = -y/3$. (b) $x = 1/y$. (c) $x = y^{1/3}$.
5. (a) $g(x) = (x^3+1)^{1/3}$. (b) $g(x) = (2x+1)/(x-1)$. (c) $g(x) = [1-(x-2)^5]^{1/3}$.
7. (a) $f'(x) = 4x - 4x^3 > 0$ para $x \in (0,1)$, luego $R_f = [0,1]$. (b) $g(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$.
9. (a) $f(x) = x/2$ y $g(x) = 2x$ son funciones inversas una de otra. (b) $f(x) = 3x-2$ y $g(x) = \frac{1}{3}(x+2)$ son funciones inversas. (c) $C = \frac{5}{9}(F-32)$ y $F = \frac{9}{5}C + 32$ son funciones inversas.
11. f^{-1} determina cuánto cuesta comprar un determinado número de kilogramos de carne.
13. $f'(x) = 4x^2(3-x^2)/3\sqrt{4-x^2} > 0$ para $x \in (0,\sqrt{3})$, luego f tiene una inversa en $[0,\sqrt{3}]$. $g'(\sqrt{3}/3) = 1/f'(1) = 3\sqrt{3}/8$.

Capítulo 8

8.1

1. (a) $y' = -3e^{-3x}$. (b) $y' = 6x^2e^{x^3}$. (c) $y' = (-1/x^2)e^{1/x}$. (d) $y' = 5(4x-3)e^{2x^2-3x+1}$.
3. (a) $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$, $f''(x) = e^x(2+x)$. f es creciente si $x > -1$. (b) Véase la Figura 25.
5. Véase la Figura 26.

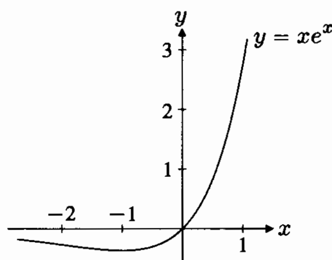


FIGURA 25

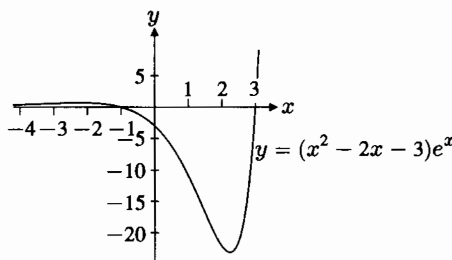


FIGURA 26

7. $y = xe^x$ tiene como derivada a $y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$, luego la fórmula es correcta para $n = 1$. *Supongamos* que la derivada k-ésima es $y^{(k)} = (x+k)e^x$. Por la regla del producto, $y^{(k+1)} = (d/dx)(x+k)e^x = e^x + (x+k)e^x = [x+(k+1)]e^x$. Por tanto, la fórmula es también cierta para $n = k+1$. Por inducción, es válida en general.

8.2

1. (a) $\ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3$. (b) $\frac{1}{2}\ln 3$. (c) $\ln\sqrt[5]{3^2} = \ln 3^{2/5} = \frac{2}{5}\ln 3$. (d) $\ln(1/81) = \ln 3^{-4} = -4\ln 3$.
3. (a) $3^x4^{x+2} = 8$ cuando $3^x4^x4^2 = 8$, o $12^x = 1/2$. Por tanto, $x = -\ln 2/\ln 12$. (b) $\ln x^3 + \ln x^4 = 6$, ó $\ln x^7 = 6$, luego $7\ln x = 6$ y $x = e^{6/7}$. (c) $4^x(1-4^{-1}) = 3^x(3-1)$, luego $(4/3)^x = 8/3$, lo que implica que $x = \ln(8/3)/\ln(4/3)$. (También $(4/3)^{x-1} = 2$, luego otra respuesta correcta es $x = 1 + \ln(4/3)$.)

5. Se mostrará cómo probar (c) y (e). Para (c), cuando $x > 0$, se tiene $\ln(e^3x^2) = \ln e^3 + \ln x^2 = 3\ln e + 2\ln x = 3 + 2\ln x$. Para (e), nótese que $p_i \ln(1/p_i) = p_i(\ln 1 - \ln p_i) = -p_i \ln p_i$ cuando $p_i > 0$.

7. (a) Falso. (Sea $A = e$.) (b) y (c) son ciertas.

9. (a) $x > -1$. (b) $1/3 < x < 1$. (c) $x \neq 0$. (d) $x > 1$ ó $x < -1$. (e) $x > 1$. (f) $x \neq e^e$ y $x > 1$.

11. (a) $\dfrac{1}{x\ln x}$. (b) $\dfrac{-x}{1-x^2}$. (c) $e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$. (d) $e^{x^3}\left(3x^2\ln x^2 + \dfrac{2}{x}\right)$. (e) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$.
(f) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x-1}$.

13. (a) $\ln f(x) = \frac{1}{3}[\ln(x+1) - \ln(x-1)]$, luego $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{-2}{3(x^2-1)}$. (b) $\ln f(x) = x\ln x$, luego $f'(x)/f(x) = \ln x + 1$. (c) $\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln(x-2) + \ln(x^2+1) + \ln(x^4+6)$, luego $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{2x-4} + \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{4x^3}{x^4+6}$.

15. (a) $f'(x) = e^{x-1} - 1$ es < 0 si $x < 1$, y > 0 si $x > 1$. Pero $f(1) = 0$ luego $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Véase la Figura 27. (b) $f(-1) = e^{-2} + 1 > 1$, $f(1) = 0$, y $f(3) = e^2 - 3 > 1$. Por el teorema del valor intermedio, tiene que haber soluciones de $f(x) = 1$ en cada uno de los intervalos $(-1, 1)$ y $(1, 3)$. Como $f'(x) < 0$ para $x > 1$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$, hay sólo una solución en cada intervalo y éstas son las dos únicas soluciones. (c) g está definida para todo $x \neq 1$, $x \neq x_1$, y $x \neq x_2$, donde x_1 y x_2 son las dos soluciones de (b). $g(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. (d) Véase la Figura 28.

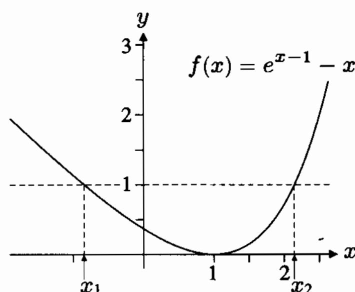


FIGURA 27

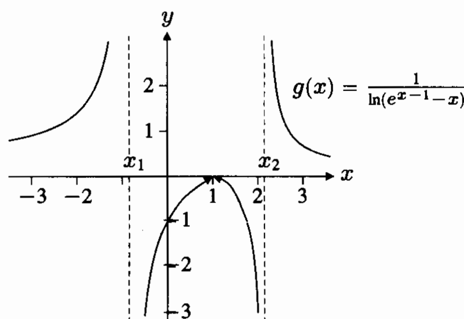


FIGURA 28

17. (a) $F(x) = e^{-e^{-x}}$. (b) $f(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}} = \exp(-x)\exp[-\exp(-x)]$. (c) $f'(x) = f(x)(e^{-x} - 1)$.

19. (a) $xy'/y = ax$. (b) $3 + 2x$. (c) $1 + \dfrac{x}{(x+1)\ln(x+1)}$. (d) $\dfrac{x^{-\delta}}{x^{-\delta}+1}$.

21. $\ln y = v\ln u$, luego $y'/y = v'\ln u + vu'/u$.

23. Es necesario despejar y de $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$. Multiplíquese la ecuación por e^y para obtener $\frac{1}{2}e^{2y} - \frac{1}{2} = xe^y$ ó $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$. Poniendo $e^y = z$ se obtiene $z^2 - 2xz + 1 = 0$, con solución $z = x \pm \sqrt{x^2+1}$. El signo menos hace z negativo, luego $z = e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Esto da como función inversa $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

8.3

1. (a) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2$. (b) $3/2$, porque $125 = 5^3$. (c) -2 (d) -6.

3. (a) $y' = 5 \cdot 3^x \ln 3$. (b) $y' = 2^x \ln 2 \ln x + 2^x/x$. (c) $y' = \log_2 x + 1/\ln 2$. (d) $y' = x/[(1+x^2)\ln 2]$.

5. (a) $0 < x \leq 1/e$. (b) $x^2 - x - 1 \geq 1$, luego $x \leq -1$ or $x \geq 2$. (c) Debe ser $x > 3$. Entonces $\ln x + \ln(x-3) = \ln x(x-3) \leq \ln 4$, y por tanto $x(x-3) \leq 4$. Así, $3 < x \leq 4$.

7. Aplicando la regla de l'Hôpital, $\lim_{\lambda \to 0^+}(x^\lambda - y^\lambda)/\lambda = \lim_{\lambda \to 0^+}(x^\lambda \ln x - y^\lambda \ln y)/1 = \ln x - \ln y$.

9. Sustituyendo $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ y $e^{-x} \approx 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$ en la ecuación y reduciendo, se obtiene $x(x^2-1) \approx 0$. Así $x = 0$ (exacta), $x \approx -1$, y $x \approx 1$.

8.4

1. (a) $\dot{x}/x = 5/(5t+10)$. (b) $\dot{x}/x = 1/(t+1)\ln(t+1)$. (c) $\dot{x}/x = 1$. (d) $\dot{x}/x = \ln 2$. (e) $\dot{x}/x = 2t$. (f) $\dot{x}/x = (e^t - e^{-t})/(e^t + e^{-t})$. Obsérvese que (c) y (d) tiene tasa relativa de crecimiento constante, lo que está de acuerdo con (8.22).

3. (a) $P(25) \approx 6.595$ (millones). (b) Tiempo de duplicación: $t = (\ln 2)/0{,}02 \approx 34{,}7$ años.

5. (a) 710. (b) Algo más de 21 días. (c) Sí, después de unos 35 días, 999 tendrán o habrán tenido la gripe, y $N(t) \to 1.000$.

7. (a) $f'(x) = k - A\alpha e^{-\alpha x} = 0$ cuando $x_0 = (1/\alpha)\ln(A\alpha/k)$. (b) $x_0 > 0$ si y sólo si $A\alpha > k$. Entonces $f'(x) < 0$ si $x < x_0$ y $f'(x) > 0$ si $x > x_0$. (c) x_0 crece cuando p_0 y V crecen; x_0 decrece cuando δ y k crecen.

9. $\ln m = -0{,}02 + 0{,}19 \ln N$. Cuando $N = 480.000$, se tiene $m \approx 11{,}77$.

11. $\ln z = \ln 694.500 - 0{,}3 \ln p$, y $p = (694.500/z)^{10/3}$.

13. (a) Véase la Figura 29.

T	36.3	35.0	33.9	32.4	24.7	24.2
ln n	5.04	4.89	4.70	4.54	3.64	3.58

(b) $f(T) = 1{,}99e^{0{,}12T}$. (c) La caída de temperatura que reduce a la mitad la frecuencia de pulsación es $(\ln 2)/0{,}12 \approx 5{,}8$ grados.

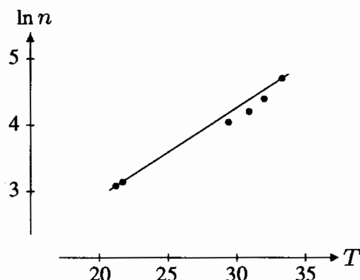


FIGURA 29

15. $t_0 = 1.972 + 8.000 \ln 0{,}886$, que da la fecha aproximada 1004.

8.5

1. (a) (i) $1.000(1{,}05)^{10}\$ \approx 1.629\$$ (ii) $1.000(1{,}05)^{50}\$ \approx 11.467\$$. (b) (i) $1.000(1 + 0{,}05/12)^{120}\$ \approx 1.647\$$ (ii) $1.000(1 + 0{,}05/12)^{600}\$ \approx 2.119\$$. (c) (i) $1.000e^{0{,}05 \cdot 10}\$ \approx 1.649\$$ (ii) $1.000e^{0{,}05 \cdot 50}\$ \approx 12.182\$$.

3. $h'(u) = u/(1+u)^2 > 0$ para $u > 0$, luego $h(u) > 0$ si $u > 0$, lo que implica que $g'(x)/g(x) = h(r/x) > 0$ para todo $x > 0$. Así $g(x)$ es estrictamente creciente si $x > 0$. Como $g(x) \to e^r$ cuando $x \to \infty$, se deduce que $g(x) < e^r$ para todo $x > 0$. El interés continuo es mejor para el prestario.

Capítulo 9

9.2

1. $y' = 1{,}06 - 0{,}08x$. Así y tiene un máximo $x = 1{,}06/0{,}08 = 13{,}25$.
3. (a) $V'(x) = 12(x-3)(x-9)$. Así V tiene máximo $x = 3$, con valor 423. (b) La caja tiene volumen máximo cuando el cuadrado que se corta de cada esquina tiene una longitud de 3 cm. (c) La derivación logarítmica da $V'(x)/V(x) = 3(3-x)/x(9-x)$.
5. (a) Máximo $x = 0$, valor 2. Sin mínimo. (b) Máximo $x = 2$, valor 3. Sin mínimo. (c) Mínimo $x = -2$, valor -3. Sin máximo. (d) Mínimo $x = 0$, valor -1. Sin máximo. (e) Máximo $x = 1$, valor 2. Sin mínimo. (f) Máximo $x = 0$, valor 1. Mínimo $x = \pm 1$, valor 1/2.
7. $\overline{T}'(Y) = a(bY + c)^{p-1}(pbY - bY - c)/Y^2$, que es 0 cuando $Y^* = c/b(p-1)$. Este debe ser el mínimo porque $\overline{T}'(Y)$ es negativa para $Y < Y^*$ y positiva para $Y > Y^*$.

9.3

1. Máximo $x = 0$, valor 80. Mínimo $x = 5$, valor -20. Véase la Figura 30.

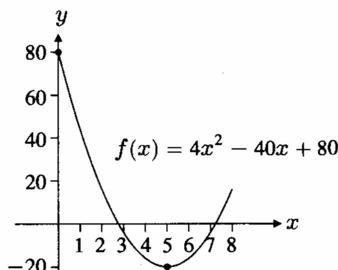


FIGURA 30

3. Escójanse ambos números iguales a 8. (Si $x+y = 16$, es $xy = x(16-x) = -x^2+16x$, con $x \in (0, 16)$, y esta función de x tiene máximo $x = 8$.)
5. (a) $Q^* = (p - \beta)/2\gamma$. (b) (i) $Q = 450$. (ii) $Q = 500$. (iii) $Q = 0$.
7. $y' = xe^{-x}(2-x)$ es positiva en $(0, 2)$ y negativa en $(2, 4)$, luego y tiene máximo $x = 2$, con valor $4e^{-2} \approx 0{,}52$.
9. $A(Q) = C(Q)/Q = aQ^2 + bQ + c + d/Q$. Así $A'(Q) = 2aQ + b - d/Q^2$, luego $A'(Q) \to -\infty$ cuando $Q \to 0^+$, y $A'(Q) \to \infty$ cuando $Q \to \infty$. Aún más, $A''(Q) = 2a + 2d/Q^3$, que es positiva para todo $Q > 0$. Por tanto $A'(Q)$ es estrictamente creciente desde $-\infty$ a ∞ en $(0, \infty)$. Así, existe un único punto Q^* en el que $A'(Q^*) = 0$, y Q^* minimiza $A(Q)$. Para $b = 0$, $A(Q)$ tiene mínimo $Q^* = (d/2a)^{1/3}$.

9.4

1. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ en $x = \pm 2$, y $f''(x) = 6x$. Así $x = 2$ es un mínimo local, mientras que $x = -2$ es un máximo local.
3. (a) $D_f = [-6, 0) \cup (0, \infty)$; $f(-2) = f(-6) = 0$; $f(x) > 0$ en $(-6, -2) \cup (0, \infty)$. (b) Máximo local de valor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $x = -4$. Mínimo local de valor $(8/3)\sqrt{3}$ en $x = 6$ y mínimo local $x = -6$, de valor 0 (donde $f'(x)$ no está definida). (c) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, y $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. f no tiene ni máximo ni mínimo.

5. (a) $f(t) = \dfrac{P(t)e^{-rt}}{1-e^{-rt}} = \dfrac{P(t)}{e^{rt}-1}$. (b) $f'(t) = \dfrac{P'(t)(e^{rt}-1) - P(t)re^{rt}}{(e^{rt}-1)^2}$, y $t^* > 0$ maximiza $f(t)$ sólo si $f'(t^*) = 0$, esto es, si $P'(t^*)(e^{rt^*}-1) = rP(t^*)e^{rt^*}$, lo que implica que $P'(t^*) = r\,P(t^*)/(1-e^{-rt^*})$.
7. a y d son mínimos locales, mientras que c es un máximo local para f.
9. (a) $f'(x) = \dfrac{-12x^3+6x}{(x^4-x^2+1)^2}$. $x = 0$ es un mínimo local; $x = \pm\sqrt{2}/2$ son máximos globales. (b) Véase la Figura 31.
11. (a) $f'(x) = 4x/3(x^2-1)^{1/3}$ y $f''(x) = 4(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})/9(x^2-1)^{4/3}$. (b) $x = -1$ y $x = 1$ son mínimos locales (y globales). $x = 0$ es un máximo local. La gráfica se muestra en la Figura 32.

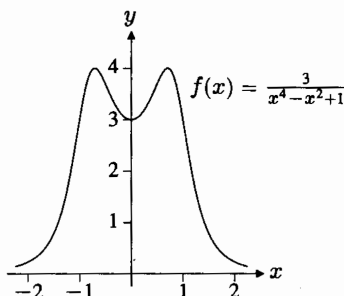


FIGURA 31

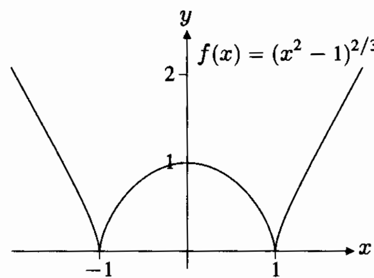


FIGURA 32

9.5

1. $f'(x) = -2x/3$ y $f''(x) = -2/3 < 0$ para todo x, luego f es cóncava.
3. (a) $R = p\sqrt{x}$, $C = wx + F$, y $\pi(x) = p\sqrt{x} - wx - F$. (b) $\pi'(x) = p(1/2\sqrt{x}) - w = 0$, ó $p(1/2\sqrt{x}) = w$. (Coste marginal = precio por unidad fabricada.) (c) $\pi''(x) = -\frac{1}{4}px^{-3/2} < 0$ para todo $x > 0$, luego se maximiza el beneficio. (d) No existe máximo porque $\pi(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$.
5. (a) $f''(x) = 2x(x^2-3)(1+x^2)^{-3}$, luego f es convexa en $[-\sqrt{3}, 0]$ y en $[\sqrt{3}, \infty)$. Los puntos de inflexión son $x = -\sqrt{3}$, 0, y $\sqrt{3}$. (b) $g''(x) = 4(1+x)^{-3} > 0$ cuando $x > -1$, luego g es (estrictamente) convexa en $(-1, \infty)$. No hay puntos de inflexión. (c) $h''(x) = (2+x)e^x$, luego h es convexa en $[-2, \infty)$ y $x = -2$ es un punto de inflexión.
7. $C''(x) = 6aQ + 2b$, luego $C(Q)$ es cóncava en $[0, -b/3a]$ y convexa en $[-b/3a, \infty)$. $Q = -b/3a$ es un punto de inflexión.
9. (a) $f'(v) = \frac{1}{3}(v-1)^{-2/3}$ es positiva en $[0,1)$ y en $(1,\infty)$. Como $f(v)$ es continua en $v = 1$, es (estrictamente) creciente en $[0,\infty)$. Aún más, $f''(v) = -\frac{2}{9}(v-1)^{-5/3}$, luego $f''(v) > 0$ en $[0,1)$ y $f''(v) < 0$ en $(1,\infty)$. Véase la gráfica de x_2 en la Figura 33. (b) $f'(v_m) = p$, luego $v_m = 1+(3p)^{-3/2}$. (c) Véase la gráfica de π en la Figura 33. (d) $\pi(v) = 0$ cuando $v-1 = (pv-1)^3$, ó $p^3v^3 - 3p^2v^2 + (3p-1)v = 0$. Esta ecuación tiene siempre a $v = 0$ como raíz. Cualquier otra raíz verifica la ecuación cuadrática $p^3v^2 - 3p^2v + 3p - 1 = 0$. Para $0 < p < 1/3$, la única raíz positiva es $v = (3 + \sqrt{4/p - 3})/2p$; para $1/3 < p < 4/3$, existen dos raices positivas, que son $v = (3 \pm \sqrt{4/p-3})/2p$; para $p = 1/3$, $v = 9$; para $p = 4/3$, $v = 9/8$; para $p > 4/3$, la única raíz es $v = 0$. (e) Las soluciones son: para $0 < p < 4/3$, v_m viene dada por (b). Para $p = 4/3$, $v = 0$ y $v = 9/8$. Para $p > 4/3$, $v = 0$.

9.6

1. (a) Álgebra elemental. (b) $D \geq 0$, luego f es cóncava. (c) $D > 0$ si $\lambda \in (0,1)$ y $a \neq b$, luego f es estrictamente cóncava. (d) $f''(x) = -2 < 0$, luego de acuerdo con (9.17), f es estrictamente cóncava.

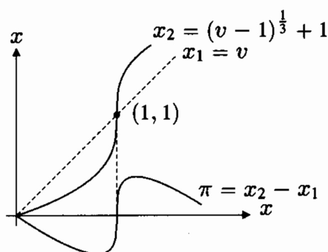


FIGURA 33

3. (a) Convexa, por ser suma de funciones convexas. (b) Cóncava, por ser suma de funciones cóncavas. (c) Cóncava, por ser suma de funciones cóncavas. (d) Convexa, por ser suma de funciones convexas. (Véase la nota que precede la desigualdad de Jensen.)

5. Aplíquese (9.14) al conjunto sombreado de la Figura 34, que es el conjunto de puntos debajo de la gráfica de $h(x)$.

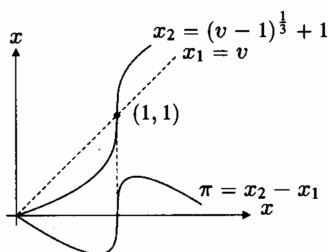


FIGURA 33

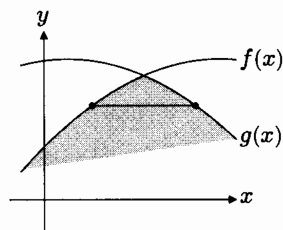


FIGURA 34

Capítulo 10

10.1

1. $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ y $A = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}$.

3. Véase la Figura 35. $F(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$ luego $F(-1) = -\frac{1}{2}(-1)^{-2} = -\frac{1}{2}$ y $F(-2) = -\frac{1}{2}(-2)^{-2} = -\frac{1}{8}$. Como $f(x)$ es negativa en $[-2, -1]$, es $A = -[F(-1) - F(-2)] = -[-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{8})] = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

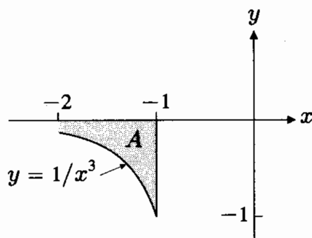


FIGURA 35

10.2

1. (a) $\frac{1}{14}x^{14} + C$. (b) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$. (c) $2\sqrt{x} + C$. (d) $\frac{8}{15}x^{15/8} + C$, porque $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{7/8}$.

3. (a) $\frac{2}{5}y^2\sqrt{y} - \frac{8}{3}y\sqrt{y} + 8\sqrt{y} + C$. (b) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + C$, porque $x^3/(x+1) = x^2 - x + 1 - 1/(x+1)$. (c) $\frac{1}{32}(1+x^2)^{16} + C$.

5. Derívese el miembro de la derecha para obtener $x\sqrt{ax+b}$.

7. $c(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 40$.

9. (a) $f'(x) = 2x + 1$ y $f(x) = x^2 + x + 2$. (b) $f'(x) = -1/x + \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1$ y $f(x) = -\ln x + (1/20)x^5 + x^2 - x - 1/20$.

10.3

1. (a) $\int_0^1 x\,dx = \Big|_0^1 \frac{1}{2}x^2 = (\frac{1}{2})1^2 - (\frac{1}{2})0^2 = 1/2$. (b) $\Big|_1^2 (x^2 + \frac{1}{3}x^3) = 16/3$. (c) $\Big|_{-2}^3 (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4) = 5/12$.

3. (a) $x = 1.000\sqrt{3}$ maximiza el beneficio. Véase la Figura 36. (b) $I = \frac{1}{2.000}\Big|_{1.000}^{3.000} (4.000x - \frac{1}{2}x^2 - 3.000.000 \ln x) = 2.000 - 1.500 \ln 3 \approx 352$.

5. (a) t^2. (b) $-e^{-t^2}$. (c) $2e^{-t^2}$. (d) $\ln t(1 - t^{-1/2}/4)$. (e) $\frac{1}{3}t^{4/3} - \frac{1}{6}t^{1/6}$ (f) $2/\sqrt{t^4+1}$.

7. $A = \int_0^3 (\sqrt{3x} - x^2 + 2x)\,dx = 6$. Véase la Figura 37.

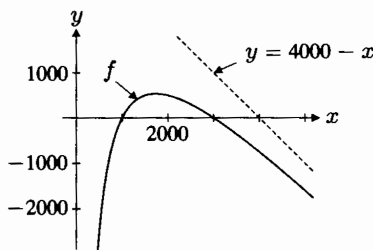


FIGURA 36

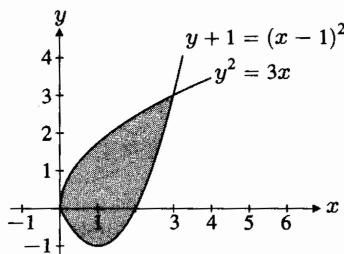


FIGURA 37

9. $W(T) = K(1 - e^{-\rho T})/\rho T$. Se tiene que $W(T) \to 0$ cuando $T \to \infty$, y usando la regla de l'Hôpital, $W(T) \to K$ cuando $T \to 0^+$. Para $T > 0$, se tiene $W'(T) = Ke^{-\rho T}(1 + \rho T - e^{\rho T})/\rho T^2 < 0$ porque $e^{\rho T} > 1 + \rho T$ (Véase Problema 14 de la Sección 8.2). Se concluye que $W(T)$ es estrictamente decreciente y que $W(T) \in (0, K)$.

10.4

1. $x(t) = x_0 - \int_0^t \bar{u}e^{-as}\,ds = x_0 - \bar{u}(1 - e^{-at})/a$. Se verifica que $x(t) \to x_0 - \bar{u}/a$ cuando $t \to \infty$. Si $x_0 \geq \bar{u}/a$, el depósito no se vaciará nunca.

3. (a) $K(5) - K(0) = \int_0^5 (3t^2 + 2t + 5)\,dt = 175$. (b) $K(T) - K_0 = (T^3 - t_0^3) + (T^2 - t_0^2) + 5(T - t_0)$.

5. (a) $\int_0^T ae^{-rt}\,dt = (a/r)(1 - e^{-rT})$ (b) a/r.

Capítulo 11

11.1

1. (a) Úsese (11.1) con $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{-x}$. Entonces $g(x) = -e^{-x}$ y $\int xe^{-x}\,dx = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$. (b) Úsese (11.1) con $f(x) = 3x$ y $g'(x) = e^{4x}$ para obtener $\frac{3}{4}xe^{4x} - \frac{3}{16}e^{4x} + C$. (c) Úsese (11.1) con $f(x) = 1 + x^2$ y $g'(x) = e^{-x}$ para obtener $-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 3e^{-x} + C$. (d) Úsese (11.1) con $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = x$ para obtener $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

3. La fórmula general se sigue de (11.1). $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$.

5. Sean $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = x^\rho$ y úsese (11.1).

7. Úsese (11.2) con $f(u) = u^2$ y $g'(u) = (\bar{u} - u)^{\gamma-1}$. Esto da $g(u) = -(1/\gamma)(\bar{u} - u)^\gamma$, luego $T^* = (2k/\gamma)\int_0^{\bar{u}} u(\bar{u} - u)^\gamma\, du$. Intégrese por partes otra vez para obtener

$$T^* = \frac{2k}{\gamma}\left[\Big|_0^{\bar{u}} \frac{u(\bar{u}-u)^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \int_0^{\bar{u}} \frac{(\bar{u}-u)^{\gamma+1}}{\gamma+1}\, du\right] = \frac{2k\bar{u}^{\gamma+2}}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}$$

11.2

1. (a) $\frac{1}{9}(x^2+1)^9 + C$. (Con $f(u) = u^8$, $u = g(x) = x^2 + 1$.) (b) $\frac{1}{11}(x+2)^{11} + C$. (Con $u = x + 2$.) (c) $\ln|x^2 - x + 8| + C$ (con $u = x^2 - x + 8$).

3. (a) Sustitúyase $u = \sqrt{1+x^2}$. Entonces $u^2 = 1 + x^2$, luego $u\,du = x\,dx$. Si $x = 0$, es $u = 1$; Si $x = 1$, $u = \sqrt{2}$. Así $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} u\,u\,du = \int_1^{\sqrt{2}} u^2\,du = \Big|_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{3}u^3 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. (b) 1/2 (Con $u = \ln y$.) (c) $\frac{1}{2}(e^2 - e^{2/3})$ (con $u = 2/x$).

5. (a) $1/70$ (El integrando es $-x^4(x^5-1)^{13}$, y póngase $u = x^5 - 1$.) (b) $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$. (Con $u = \sqrt{x}$.) (c) $8/3$ (Con $u = \sqrt{1+\sqrt{x}}$.)

7. (a) Redúzcase a común denominador en el miembro de la derecha. (b) (i) $3\ln 2 - \ln 3$. (ii) $16\ln 2 - 7\ln 3$.

9.
$$I = \frac{A(1+C)}{\beta C}\ln\left(\frac{1+CD}{1+CDe^{\beta t}}\right) + At$$

(La sustitución $x = CDe^{\beta\tau}$ implica que $dx = CD\beta e^{\beta\tau}\,d\tau = \beta x d\tau$. Aún más

$$\frac{A(1-De^{\beta\tau})}{1+CDe^{\beta\tau}}\,d\tau = \frac{A(1-x/C)}{1+x}\frac{dx}{\beta x} = \frac{A}{\beta C}\left(\frac{C}{x} - \frac{1+C}{1+x}\right)dx$$

y así sucesivamente.)



11. (a) $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$. (b) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$.

11.3

1. (a) $\int_1^b (1/x^3)\,dx = \int_1^b x^{-3}\,dx = \Big|_1^b(-\frac{1}{2}x^{-2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b^{-2} \to \frac{1}{2}$ cuando $b \to \infty$. Así $\int_1^\infty (1/x^3)\,dx = \frac{1}{2}$. (b) $\int_1^b x^{-1/2}\,dx = \Big|_1^b 2x^{1/2} \to \infty$ cuando $b \to \infty$, luego la integral es divergente. (c) 1. (d) $\int_0^a \dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\Big|_0^a \sqrt{a^2 - x^2} = a$.

3. Utilizando una notación simplificada y el resultado del Ejemplo 11.7 se tiene (a) $\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dt = -\Big|_0^\infty xe^{-\lambda x} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = 1/\lambda$. (b) $\int_0^\infty \left(x - \lambda^{-1}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\Big|_0^\infty \left(x - \lambda^{-1}\right)^2 e^{-\lambda x} + \int_0^\infty 2\left(x - \lambda^{-1}\right)e^{-\lambda x}\,dx = \lambda^{-2} + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx - 2\lambda^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \lambda^{-2} + 2\lambda^{-2} - 2\lambda^{-2} = \lambda^{-2}$. (c) $\int_0^\infty \left(x - \lambda^{-1}\right)^3 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\Big|_0^\infty \left(x - \lambda^{-1}\right)^3 e^{-\lambda x} + \int_0^\infty 3\left(x - \lambda^{-1}\right)^2 e^{-\lambda x}\,dx = -\lambda^{-3} + 3\lambda^{-1}\int_0^\infty \left(x - \lambda^{-1}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\lambda^{-3} + 3\lambda^{-1}\lambda^{-2} = 2\lambda^{-3}$.

5. (a) $f'(x) = 1/x^4 - 3\ln x/x^4 = 0$ en $x = e^{1/3}$. $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. $f(e^{1/3}) = 1/3e > 0$. Así f tiene máximo en $(e^{1/3}, 1/3e)$, pero ningún mínimo. (b) $\int_a^b x^{-3}\ln x\,dx = -\Big|_a^b \frac{1}{2}x^{-2}\ln x + \int_a^b \frac{1}{2}x^{-3}\,dx = \Big|_a^b(-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \frac{1}{4}x^{-2})$. Esta expresión diverge cuando $b = 1$ y $a \to 0$, pero $\int_1^\infty x^{-3}\ln x\,dx = 1/4$.

7. Si ambos límites existen, la integral es la suma de los límites $I_1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-2+\epsilon}^{3}(1/\sqrt{x+2})\,dx$ e $I_2 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-2}^{3-\epsilon}(1/\sqrt{3-x})\,dx$. Pero $I_1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \Big|_{-2+\epsilon}^{3}(2\sqrt{x+2}) = \lim_{\epsilon\to 0^+}(2\sqrt{5} - 2\sqrt{\epsilon}) = 2\sqrt{5}$, e $I_2 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \Big|_{-2}^{3-\epsilon}(-2\sqrt{3-x}) = \lim_{\epsilon\to 0^+}(-2\sqrt{\epsilon} + 2\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$. La respuesta es $4\sqrt{5}$.

9. $f(x) = 1/x^2$ no está definida en $x = 0$, luego f no es continua en $[-1, 1]$.

11. $\int_1^A [k/x - k^2/(1+kx)]\,dx = \Big|_1^A [k\ln x - k\ln(1+kx)] = \Big|_1^A k\ln[x/(1+kx)] = k\ln[A/(1+kA)] - k\ln[1/(1+k)] = k\ln[1/(1/A+k)] - k\ln[1/(1+k)]$, que tiende a $k\ln(1/k) - k\ln[1/(1+k)] = \ln(1+1/k)^k$ cuando $A \to \infty$. Así $I_k = \ln(1+1/k)^k$, que tiende a $\ln e = 1$ cuando $k \to \infty$.

13. La sustitución que se sugiere en la indicación y (11.13) son útiles en los tres casos. Para (b), también es necesario el resultado del Ejemplo 11.7. Para (c), la sustitución indicada da $I = (1/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty}(2\sigma^2 z^2 + 2\sqrt{2}\sigma\mu z + \mu^2)e^{-z^2}\,dz$. Nótese que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}$ por (11.13), y $\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-z^2}\,dz = 0$ por el Ejemplo 11.9. Finalmente, la integración por partes da $\int z^2 e^{-z^2}\,dz = -\frac{1}{2}ze^{-z^2} + \int \frac{1}{2}e^{-z^2}\,dz$, luego $\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Así, $I = (1/\sqrt{\pi})(2\sigma^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + 0 + \mu^2\sqrt{\pi}) = \sigma^2 + \mu^2$.

11.4

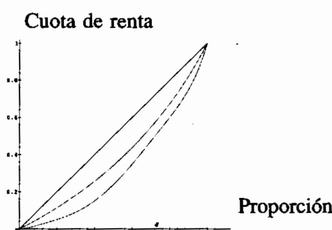


FIGURA 38

1. Véase la Figura 38. La curva de trazo continuo representa la distribución de la renta en EEUU en 1980. La curva de puntos representa la distribución de la renta en Holanda en 1959 (casi la misma que la curva de EEUU en 1980). La curva de trazos discontinuos da la distribución en Holanda en 1985.

Capítulo 12

12.1

1. (a) Sean x e y la producción total de las industrias A e I, respectivamente. Entonces $x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y + 60$ e $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + 60$. Así $\frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y = 60$ y $-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = 60$. (b) La solución es $x = 320/3$ e $y = 1040/9$.

3. $0{,}8x_1 - 0{,}3x_2 = 120$ y $-0{,}4x_1 + 0{,}9x_2 = 90$, la solución es $x_1 = 225$ y $x_2 = 200$.

12.2

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}$, y $-5\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix}$.

3. $a_1 = 0$, $a_2 = 1/3$, y $a_3 = 1$.

5. (a) $x_i = 0$ Para todo i. (b) Nada, porque $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ Para $\mathbf{x}$.

7. $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$

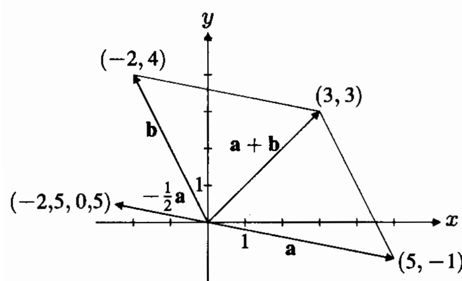


FIGURA 39

9. (a) (i) Es posible, con $\theta = 1/2$. (ii) Imposible. (iii) Imposible. (b) (i) La proporción de plomo es $\theta = 1/2$. (ii) Si se puede tirar el combustible, la proporción de plomo puede ser $\theta = 2/3$. (iii) Imposible en cualquier caso, porque $(1-\theta)4 + \theta 3 < 9$ para todo $\theta \in [0, 1]$.

12.3

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 3)$ y $-\frac{1}{2}\mathbf{a} = (-2{,}5, 0{,}5)$. Véase la Figura 39.
3. (a) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. (b) Supongamos que $x_1(1, 2, 1) + x_2(-3, 0, -2) = (-3, 6, 1)$. Entonces $x_1 - 3x_2 = -3$, $2x_1 = 6$, y $x_1 - 2x_2 = 1$. Las dos primeras ecuaciones dan $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$; y la última ecuación no se satisface.
5. (a) Una recta que pasa por $(0, 2, 3)$ paralela al eje x. (b) Un plano que contiene al eje z y que pasa por la recta $y = x$ en el plano xy.

12.4

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 5$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$, y $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 7$. Véase que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
3. Los pares de vectores de (a) y (c) son ortogonales.
5. Los vectores son ortogonales si y sólo si su producto escalar es 0, esto es, si y sólo si $x^2 - x - 8 - 2x + x = x^2 - 2x - 8 = 0$, lo que es cierto para $x = -2$ y $x = 4$.
7. Usar las reglas de (12.14).
9. (a) El ingreso de la compañía es $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}$. Sus costes son $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$. (b) Beneficio = ingresos − costes = $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$. Si $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} < 0$, la compañia tiene una pérdida igual a $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$.
11. (a) Vector de entrada $= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (b) Vector de producción $= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. (c) Costes $= (1, 3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$. (d) Ingresos $= (1, 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$. (e) Valor neto de la producción $= (1, 3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 3 = -1$.. (f) Pérdidas = costes − ingresos = $3 - 2 = 1$.

12.5

1. (a) $x_1 = 3 + 7t$, $x_2 = -2 + 4t$ y $x_3 = 2 - t$. (b) $x_1 = 1$, $x_2 = 3 - t$ y $x_3 = 2 + t$.
3. $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3$. (Un método para calcularlo: $(5, 2, 1) - (3, 4, -3) = (2, -2, 4)$ y $(2, -1, 4) - (3, 4, -3) = (-1, -5, 7)$ son dos vectores del plano. La normal (p_1, p_2, p_3) debe ser ortogonal a ambos vectores, luego $(2, -2, 4) \cdot (p_1, p_2, p_3) = 2p_1 - 2p_2 + 4p_3 = 0$ y $(-1, -5, 7) \cdot (p_1, p_2, p_3) = -p_1 - 5p_2 + 7p_3 = 0$. Una solución a estas dos ecuaciones es $(p_1, p_2, p_3) = (1, -3, -2)$. Usando la fórmula (12.23) con $(a_1, a_2, a_3) = (2, -1, 4)$ da $(1, -3, -2) \cdot (x_1 - 2, x_2 + 1, x_3 - 4) = 0$, ó $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3$.)

12.6

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $u = 3$ y $v = -2$.

5. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, y $5\mathbf{A}-3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -20 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

12.7

1. (a) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -2 & 17 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$. (b) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 26 & 3 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 14 & 6 & -12 \\ 35 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & -22 \end{pmatrix}$.
(c) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & -8 & 12 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{BA} = (17)$, una matriz 1×1. (d) $\mathbf{AB}$ no está definido. $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} w-y & y \\ y & w \end{pmatrix}$, con y, w arbitrarios. (*Indicación:* Sea $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ si y sólo si (1) $x+2y = x+2z$; (2) $2x+3y = y+2w$; (3) $z+2w = 2x+3z$; y (4) $2z+3w = 2y+3w$. Pero (1) y (4) se verifican si y sólo si $z = y$. Igualmente, (2) y (3) se verifican si y sólo si $x = w-y$.)

12.8

1. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 \\ 7 & 4 & 14 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Es fácil demostrar que $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ y $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ son ambos iguales a la matriz 2×2 $\mathbf{D} = (d_{ij})_{2\times 2}$ con $d_{ij} = a_{i1}b_{11}c_{1j} + a_{i1}b_{12}c_{2j} + a_{i2}b_{21}c_{1j} + a_{i2}b_{22}c_{2j}$ para $i = 1,2$ y $j = 1,2$.

5. (a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. (b) $(1, 2, -3)$.

7. (a) Verifíquese directamente. (b) $\mathbf{AA} = (\mathbf{AB})\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{BA}) = \mathbf{AB} = \mathbf{A}$, luego $\mathbf{A}$ es idempotente. Intercambiar $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ para probar que $\mathbf{B}$ es idempotente. (c) La hipótesis de inducción es $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}$, lo que es cierto para $k = 2$. Entonces $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \mathbf{AA} = \mathbf{A}$, lo que termina la demostración.

12.9

1. $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}' = (0, 1, -1, 2)$.

3. $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$.

5. ¡No! Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

7. (a) Verifíquese directamente. (b) $\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2+q^2 & 0 \\ 0 & p^2+q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si y sólo si $p^2+q^2 = 1$. (c) Supongamos que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son ortogonales, esto es, $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$ y $\mathbf{Q}'\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$. Entonces $(\mathbf{PQ})'(\mathbf{PQ}) = (\mathbf{Q}'\mathbf{P}')(\mathbf{PQ}) = \mathbf{Q}'(\mathbf{P}'\mathbf{P})\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'\mathbf{I}_n\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$, luego $\mathbf{PQ}$ es ortogonal. (d) Si $\mathbf{P}$ es ortogonal y $\mathbf{c}_i$ y $\mathbf{c}_j$ son dos columnas distintas de $\mathbf{P}$, entonces $\mathbf{c}_i'\mathbf{c}_j$ es el elemento en la fila i y columna j de $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}$, luego $\mathbf{c}_i'\mathbf{c}_j = 0$. Si $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_j$ son dos filas diferentes de$\mathbf{P}$, entonces $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j'$ es el elemento en la fila i y columna j de $\mathbf{PP}' = \mathbf{I}' = \mathbf{I}$, y de nuevo $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j' = 0$.

9. Supongamos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces (1) $a^2 + bc = 0$; (2) $ab + bd = 0$; (3) $ac + cd = 0$; (4) $bc + d^2 = 0$. Afirmamos que $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = a + d = 0$. Restando (4) de (1) se obtiene $a^2 - d^2 = 0$, ó $(a - d)(a + d) = 0$. Así, bien $a + d = 0$ y la demostración esta terminada, bien $a = d$. Pero si $a = d$, entonces (2) implica que $ab = 0$, luego (1) implica que $a^3 = -abc = 0$. Así, $a = 0$ y $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = a + d = 0$ incluso cuando $a = d$.

Capítulo 13

13.1

1. (a) 18. (b) 0. (c) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$. (d) $3^t 2^{t-1} - 3^{t-1} 2^t = 6^{t-1}$.

3. (a) $x_1 = 11/5$ y $x_2 = -7/5$. (b) $x = 4$ y $y = -1$. (c) Supuesto que $a^2 + b^2 \neq 0$, $x = \dfrac{a+2b}{a^2+b^2}$ y $y = \dfrac{2a-b}{a^2+b^2}$.

5. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = 4$, mientras que $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = 2$. ($\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se pueden elegir casi al azar.)

7. (a) $X_1 = M_2$ porque las exportaciones del país 1 son las importaciones del país 2. Análogamente, $X_2 = M_1$. (b) Sustituyendo X_1, X_2, M_1, M_2, C_1, y C_2 da las dos ecuaciones (1) $Y_1(1 - c_1 + m_1) - m_2 Y_2 = A_1$; (2) $Y_2(1 - c_2 + m_2) - m_1 Y_1 = A_2$ Usando la regla de Cramer con $D = (1 - c_2 + m_2)(1 - c_1 + m_1) - m_1 m_2$ se obtiene

$$Y_1 = \frac{1}{D}[A_2 m_2 + A_1(1 - c_2 + m_2)], \qquad Y_2 = \frac{1}{D}[A_1 m_1 + A_2(1 - c_1 + m_1)]$$

(c) Y_2 depende linealmente de A_1. Aumentando A_1 en una unidad cambia Y_2 por el factor m_1/D. Como c_1 es la proporción del ingreso consumido, se puede suponer que $0 < c_1 < 1$. Asímimo, $0 < c_2 < 1$. Como m_1 y m_2 son no negativos, se ve que $D > 0$ y que Y_2 crece cuando A_1 crece. Ésta es la explicación económica: Un incremento de A_1 aumenta los ingresos del país 1, Y_1. A su vez, esto incrementa las importaciones del país 1, M_1. Sin embargo, las importaciones del país 1 son las exportaciones del país 2, luego esto hace que los ingresos del país 2, Y_2, crezcan, y así sucesivamente.

9. $(d/dt)[a(t)b'(t) - a'(t)b(t)] = a(t)b''(t) - a''(t)b(t)$.

13.2

1. (a) -2. (b) -2. (c) adf. (d) $e(ad - bc)$.

3. (a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$. (b) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. (c) $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$.

5. (a) Las sucesivas sustituciones dan $Y = C + A_0 = a + b(Y - T) + A_0 = a + bY - b(d + tY) + A_0$. Así,

$$Y = \frac{A_0 + a - bd}{1 - b + bt}, \qquad C = \frac{a - bd + bA_0 - btA_0}{1 - b + bt}, \qquad T = \frac{d - bd + tA_0 + ta}{1 - b + bt}$$

(b) La ecuación matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ C \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ a \\ d \end{pmatrix}$$

y por la regla de Cramer la solución se calcula como en (a).

13.3

1. (a) 24. (b) 1. (c) $d - a$. (d) 0.
3. $-a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51}$. (Hay nueve líneas ascendentes.)

13.4

1. (a) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 29 & 36 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}'\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 15 & 23 \\ 22 & 34 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}'\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 13 & 29 \\ 16 & 36 \end{pmatrix}$. (b) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'| = -2$ y $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}'| = -2$, luego $|\mathbf{AB}| = 4 = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$, $|\mathbf{A}'\mathbf{B}'| = |\mathbf{A}'| \cdot |\mathbf{B}'| = 4$.
3. (a) 0 (una columna es sólo de ceros). (b) 0 (las filas 1 y 4 son proporcionales). (c) Restar $3a$ veces la segunda columna de la primera, para que la cuarta fila sea $(0, 1, 0, 0)$. Intercambiar las filas primera y cuarta, y las columnas primera y segunda. Explicar porqué se puede prescindir de la primera fila y de la primera columna. La respuesta es $6a^4 + 29a^2 - 6a - 1$.
5. $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = 10$.
7. De $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$ se deduce, usando (13.15) y (13.14), que $|\mathbf{P}'||\mathbf{P}| = |\mathbf{I}_n| = 1$. Como $|\mathbf{P}'| = |\mathbf{P}|$, se obtiene $|\mathbf{P}|^2 = 1$, luego $|\mathbf{P}| = \pm 1$.
9. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$. Calcúlese $\mathbf{A}^2$ y úsese (13.15).
11. (a) Para la primera igualdad se puede usar la definición de determinante. La segunda igualdad es fácil si se realizan las operaciones indicadas. Para la última igualdad, usar de nuevo la definición de determinante (escójase -1 de la primera columna...) (b) Si el lector puede demostrarlo, se merece un descanso.

13.5

1. (a) 2. (Sustráigase la fila 1 de las filas 2 y 3 para conseguir un determinante cuya primera columna tenga elementos $1, 0, 0$.Desarróllese luego por la primera columna.) (b) 30. (c) 0. (las columnas 2 y 4 son proporcionales.)
3. Para $n = 4$, el determinante de Vandermonde es $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$. Multiplicando las columnas tercera, segunda y primera por $-x_1$ y sumando los resultados a la columna siguiente, se obtiene el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2x_1 & x_2^3 - x_2^2x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_4x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

La última igualdad se obtiene porque $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$, y $x_4 - x_1$ son factores comunes en las filas segunda, tercera y cuarta, respectivamente, del determinante anterior. El último determinante es de nuevo un determinante de Vandermonde, y se deduce la conclusión.

13.6

1. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 2a + 1/4 + 3b & 4a + 3/2 + 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ si y sólo si $a + b = 4a + 3/2 + 2b = 0$ y $2a + 1/4 + 3b = 1$. Ésto es cierto si y sólo si $a = -3/4$ y $b = 3/4$.

5. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

7. (a) $\mathbf{AA}' = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{AA}'| = 89$, y $(\mathbf{AA}')^{-1} = \frac{1}{89}\begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -11 & 21 \end{pmatrix}$. (b) No, $\mathbf{AA}'$ es siempre simétrica (véase el Eejmplo 12.28 de la Sección 12.9 y la Nota 2).

9. $\mathbf{B}^2 + \mathbf{B} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{B}^3 - 2\mathbf{B} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$. De $\mathbf{B}^2 + \mathbf{B} = \mathbf{I}$, se obtiene $\mathbf{B}(\mathbf{B} + \mathbf{I}) = \mathbf{I}$, luego $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1/2 & 5 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

11. Sea $\mathbf{B} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$. Entonces $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{I}_m - \mathbf{B})(\mathbf{I}_m - \mathbf{B}) = \mathbf{I}_m - \mathbf{B} - \mathbf{B} + \mathbf{B}^2$. Pero

$$\mathbf{B}^2 = (\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{B}$$

Así, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_m - \mathbf{B} - \mathbf{B} + \mathbf{B} = \mathbf{I}_m - \mathbf{B} = \mathbf{A}$. (b) Verifíquese directamente.

13. $\mathbf{D}^3 = \mathbf{D}^2\mathbf{D} = (2\mathbf{D} + 3\mathbf{I}_n)\mathbf{D} = 2\mathbf{D}^2 + 3\mathbf{D} = 2(2\mathbf{D} + 3\mathbf{I}_n) + 3\mathbf{D} = 7\mathbf{D} + 6\mathbf{I}_n$. $\mathbf{D}^6 = \mathbf{D}^3\mathbf{D}^3 = (7\mathbf{D} + 6\mathbf{I}_n)(7\mathbf{D} + 6\mathbf{I}_n) = 49\mathbf{D}^2 + 84\mathbf{D} + 36\mathbf{I}_n = 49(2\mathbf{D} + 3\mathbf{I}_n) + 84\mathbf{D} + 36\mathbf{I}_n = 182\mathbf{D} + 183\mathbf{I}_n$. Para calcular $\mathbf{D}^{-1}$, nótese que de $\mathbf{D}^2 = 2\mathbf{D} + 3\mathbf{I}_n$ se obtiene $\mathbf{D}(\mathbf{D} - 2\mathbf{I}_n) = 3\mathbf{I}_n$, y así $\mathbf{D}\frac{1}{3}(\mathbf{D} - 2\mathbf{I}_n) = \mathbf{I}_n$. Por tanto, $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{3}\mathbf{D} - \frac{2}{3}\mathbf{I}_n$.

13.7

1. (a) $\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. (b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. (c) La matriz no tiene inversa.

3. $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{5}{62}\begin{pmatrix} 18 & 16 & 10 \\ 2 & 19 & 8 \\ 4 & 7 & 16 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}45 & 1{,}29 & 0{,}81 \\ 0{,}16 & 1{,}53 & 0{,}65 \\ 0{,}32 & 0{,}56 & 1{,}29 \end{pmatrix}$.

5. (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. (c) No existe inversa.

13.8

1. (a) $x = 1$, $y = -2$, y $z = 2$. (b) $x = -3$, $y = 6$, $z = 5$, y $u = -5$.

3. Demuéstrese que el determinante de la matriz de coeficientes es igual a $-(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$, y úsese el Teorema 13.7 de la Sección 13.8.

Capítulo 14

14.1

1. $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ implica que $8 = 2x - y$ y $9 = 5x + 3y$. Resolviendo estas ecuaciones, $x = 3$ e $y = -2$.

3. El determinante de la matriz de los tres vectores es 3, luego los vectores son linealmente independientes.

5. Supongamos que $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \gamma(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}$. Entonces $(\alpha + \gamma)\mathbf{a} + (\alpha + \beta)\mathbf{b} + (\beta + \gamma)\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Como **a**, **b**, y **c** son linealmente independientes, $\alpha + \gamma = 0$, $\alpha + \beta = 0$, y $\beta + \gamma = 0$. Se sigue que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, lo que significa que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, y $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ son linealmente independientes. Los vectores $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, y $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ son linealmente *dependientes* porque $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}$.

7. Ambas afirmaciones se deducen inmediatamente de las definciones.

14.2

1. (a) 1. (El determinante de la matriz es 0, luego el rango es menor que 2. Como no todos los coeficientes son 0, el rango es 1.) (b) 2. (c) 2. (d) 3. (e) 2. (f) 3

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$. Así, $r(\mathbf{AB}) = 0$ y $r(\mathbf{BA}) = 1$.

14.3

1. (a) No existen soluciones. (b) $x_1 = 1 + (2/3)b$, $x_2 = 1 + a - (5/3)b$, $x_3 = a$, y $x_4 = b$, con a, b arbitrarios. Dos grados de libertad. (c) $x_1 = (-1/3)a$, $x_2 = (5/3)a$, $x_3 = a$, y $x_4 = 1$, con a arbitrario. Un grado de libertad. (d) No existen soluciones. (e) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ es la única solución. Hay 0 grados de libertad. (f) $x_1 = a$, $x_2 = -a$, $x_3 = -a$, y $x_4 = a$, con a arbitrario. Un grado de libertad.

3. Para $a \neq 0$ y $a \neq 7$, el sistema tiene una solución única. Para $a = 0$ y $b = 9/2$, o para $a = 7$ y $b = 10/3$, existen infinitas soluciones. Para otros valores de los parámetros, no existen soluciones.

5. (a) Solución única para $p \neq 3$. Para $p = 3$ y $q = 0$, existen infinitas soluciones (un grado de libertad). Para $p = 3$ y $q \neq 0$, no existen soluciones. (b) Para $p \neq 3$, solamente $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ es ortogonal a los tres vectores. Para $p = 3$, el vector $\mathbf{z} = (-a, 0, a)$ es ortogonal a los tres vectores, para todos los valores de a. (c) Sean los n vectores $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, n$. Si $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ es ortogonal cada uno de estos n vectores, el producto escalar de $\mathbf{b}$ con cada $\mathbf{a}_i$ es 0,

$$a_{i1}b_1 + \cdots + a_{in}b_n = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Como $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ son linealmente idependientes, este sistema homogéneo tiene únicamente la solución $b_1 = \cdots = b_n = 0$, luego $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

14.4

1. Sean r, s, y t números reales arbitrarios. (a) Autovalores: -1, -5. Autovectores: $r\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (b) No existen autovalores reales. (c) Autovalores: 5, -5. Autovectores: $r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. (d) Autovalores: 2, 3, 4. Autovectores: $r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (e) Autovalores: -1, 0, 2. Autovectores: $r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (f) Autovalores: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Autovectores: $r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Por (14.8), $\lambda = 0$ es un autovalor si y sólo si $|\mathbf{A}| = 0$. Si $\lambda \neq 0$ es un autovalor de $\mathbf{A}$, es $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$. Pero $|\mathbf{A}^{-1} - (1/\lambda)\mathbf{I}| = |\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - (1/\lambda)\mathbf{A})| = |\mathbf{A}^{-1}||1/\lambda||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$, lo que muestra que $1/\lambda$ es un autovalor de $\mathbf{A}^{-1}$.

5. Los autovalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0{,}75$, y $\lambda_3 = 0{,}5$. Como $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, se deduce que $\mathbf{T}^n(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, para todo n.

7. $|\mathbf{A} - \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix}$. Súmense las últimas $n - 1$ filas a la primera. Como todas la columnas suman 1, los elementos de la primera fila son 0. Por tanto, $|\mathbf{A} - \mathbf{I}| = 0$, luego 1 es un autovalor de $\mathbf{A}$.

14.5

1. $\mathbf{D}^2 = \text{diag}(1/4, 1/9, 1/16)$, $\mathbf{D}^n = \text{diag}((1/2)^n, (1/3)^n, (1/4)^n)$, $\mathbf{D}^n \to \mathbf{0}$ cuando $n \to \infty$.
3. (a) La matriz tiene autovalores 2 y -1, de autovectores $(1,0)$ y $(1,-3)$, respectivamente. Tómese $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, y entonces, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \text{diag}(2,-1)$. (b) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \text{diag}(3,6,-6)$ (c) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \text{diag}(1,-4,3)$.

14.6

1. (a) La matriz tiene autovalores 1 y 3, con autovectores $(1,-1)$ y $(1,1)$, respectivamente. Normalizando los autovectores, la matriz ortogonal es $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, y entonces $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU} = \text{diag}(1,3)$.
(b) La matriz $\mathbf{A}$ tiene solamente dos autovalores, que son 0 y 2, pero tres autovectores linealmente independientes, que son $(1,-1,0)$, $(1,1,0)$, y $(0,0,1)$. Tómese $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y entonces $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU} = \text{diag}(0,2,2)$. (c) $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -4/5 & 3\sqrt{2}/10 & 3\sqrt{2}/10 \\ 3/5 & 2\sqrt{2}/5 & 2\sqrt{2}/5 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU} = \text{diag}(1,6,-4)$.
3. Sean $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2, \ldots$, $\mathbf{p}_n$ los vectores columna de $\mathbf{P}$. Entonces los elementos de la diagonal de la matriz producto $\mathbf{P}'\mathbf{P}$ son todos iguales a 1, porque la longitud de los vectores columna es 1. Aún más, los elementos que no están en la diagonal son 0, porque los vectores columna de $\mathbf{P}$ son ortogonales dos a dos. Así, $\mathbf{P}'\mathbf{P}$ es la matriz identidad, y por tanto, $\mathbf{P}$ es ortogonal.

Capítulo 15

15.1

1. $f(0,1) = 0$, $f(-1,2) = -4$, y $f(a,a) = a^3$.
3. (a) $f(-1,2) = 1$, $f(a,a) = 4a^2$, y $f(a+h,b) - f(a,b) = 2(a+b)h + h^2$. (b) $f(tx,ty) = (tx)^2 + 2(tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(x^2 + 2xy + y^2) = t^2 f(x,y)$.
5. (a) $F(K+1,L,M) - F(K,L,M)$ es el aumento de producción obtenido al aumentar el capital en una unidad. (b) $F(K,L,M) = AK^aL^bM^c$, donde A, a, b, y c son constantes positivas. (c) $F(tK,tL,tM) = t^{a+b+c}F(K,L,M)$.
7. (a) $y \neq x - 2$. (b) $x^2 + y^2 \leq 2$. (c) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Los conjuntos de los casos (b) y (c) se muestran en las Figuras 40 y 41.

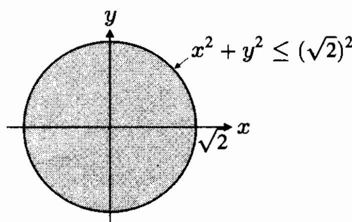


FIGURA 40

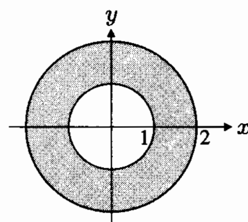


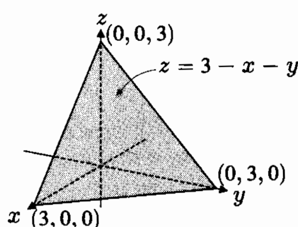
FIGURA 41

9. Conduciendo $(5/60)\cdot 0+(10/60)\cdot 30+(20/60)\cdot 60+(15/60)\cdot 80 = 45$ kilómetros en $5+10+20+15 = 50$ minutos, luego la velocidad media es $45 \times 60/50 = 54$ kph.

11. (a) Inmediato. (b) En este caso, (*) es: $\ln[(1/n)(x_1 + \cdots + x_n)] \geq (1/n)\ln x_1 + \cdots + (1/n)\ln x_n = \ln x_1^{1/n} + \cdots + \ln x_n^{1/n} = \ln(x_1^{1/n} \ldots x_n^{1/n}) = \ln \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, y la conclusión se deduce. (c) Las sustituciones indicadas dan la desigualdad $\sqrt[n]{(1/x_1)\cdots(1/x_n)} \leq (1/n)\left(1/x_1 + \cdots + 1/x_n\right)$. Esta desigualdad dice que $1/\bar{x}_G \leq 1/\bar{x}_H$, luego $\bar{x}_H \leq \bar{x}_G$.

15.2

1. Véanse las Figuras 42 y 43. (Nótese que sólo se han dibujado una parte de las gráficas en cada caso.)



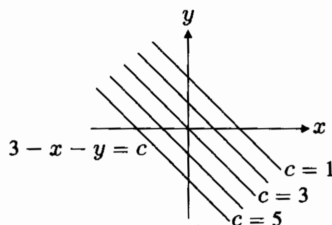
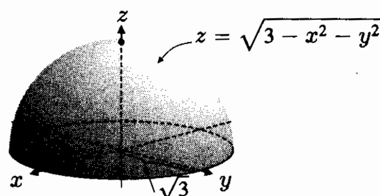


FIGURA 42



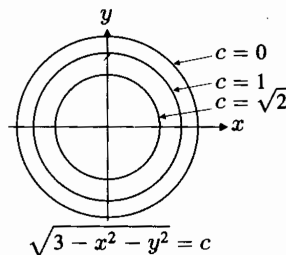


FIGURA 43

3. Nótese que $f(x, y) = e^{x^2-y^2} + (x^2 - y^2)^2$. Así, para todos los pares (x, y) tales que $x^2 - y^2 = c$, se tiene $f(x, y) = e^c + c^2$, luego $x^2 - y^2 = c$ está en una curva de nivel de altura $e^c + c^2$.

5. En el punto de intersección, f tendría dos valores distintos, lo que es imposible si f es una función.

15.3

1. (a) $\partial z/\partial x = 2x$, $\partial z/\partial y = 6y$. (b) $\partial z/\partial x = y$, $\partial z/\partial y = x$. (c) $\partial z/\partial x = 20x^3y^2 - 2y^5$, $\partial z/\partial y = 10x^4y - 10xy^4$. (d) $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = e^{x+y}$. (e) $\partial z/\partial x = ye^{xy}$, $\partial z/\partial y = xe^{xy}$. (f) $\partial z/\partial x = e^x/y$, $\partial z/\partial y = -e^x/y^2$. (g) $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 1/(x + y)$. (h) $\partial z/\partial x = 1/x$, $\partial z/\partial y = 1/y$.

3. (a) $z'_x = 3$, $z'_y = 4$, y $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yx} = z''_{yy} = 0$. (b) $z'_x = 3x^2y^2$, $z'_y = 2x^3y$, $z''_{xx} = 6xy^2$, $z''_{yy} = 2x^3$, y $z''_{xy} = z''_{yx} = 6x^2y$. (c) $z'_x = 5x^4 - 6xy$, $z'_y = -3x^2 + 6y^5$, $z''_{xx} = 20x^3 - 6y$, $z''_{yy} = 30y^4$, y $z''_{xy} = z''_{yx} = -6x$. (d) $z'_x = 1/y$, $z'_y = -x/y^2$, $z''_{xx} = 0$, $z''_{yy} = 2x/y^3$, y $z''_{xy} = z''_{yx} = -1/y^2$. (e) $z'_x = 2y(x + y)^{-2}$, $z'_y = -2x(x + y)^{-2}$, $z''_{xx} = -4y(x + y)^{-3}$, $z''_{yy} =$

$4x(x+y)^{-3}$, y $z''_{xy} = z''_{yx} = 2(x-y)(x+y)^{-3}$. (f) $z'_x = x(x^2+y^2)^{-1/2}$, $z'_y = y(x^2+y^2)^{-1/2}$, $z''_{xx} = y^2(x^2+y^2)^{-3/2}$, $z''_{yy} = x^2(x^2+y^2)^{-3/2}$, y $z''_{xy} = z''_{yx} = -xy(x^2+y^2)^{-3/2}$.

5. $xz'_x + yz'_y = x[2(ax+by)a] + y[2(ax+by)b] = 2a^2x^2 + 2abxy + 2abxy + 2b^2y^2 = 2(ax+by)^2$.

7. $f'_1 = \ln y - y^3 2^{xy} \ln 2$ y $f'_2 = (x/y) - 2y2^{xy} - xy^2 2^{xy} \ln 2$, luego $f'_1(1,1) = -2\ln 2$, $f'_2(1,1) = -3 - 2\ln 2$, $f''_{11}(1,1) = -2(\ln 2)^2$, $f''_{22}(1,1) = -5 - 8\ln 2 - 2(\ln 2)^2$, y $f''_{12}(1,1) = f''_{21}(1,1) = 1 - 6\ln 2 - 2(\ln 2)^2$.

9. (a) $\partial^{p+q} z/\partial y^q \partial x^p = (-1)^{q-1}(q-1)!\, e^x(1+y)^{-q}$, que, cuando se evalúa en $(x,y) = (0,0)$, es igual a $(-1)^{q-1}(q-1)!$ (Comiéncese por derivar con respecto a x. Evidentemente, $\partial^p z/\partial x^p = e^x \ln(1+y)$. A continuación, derivando con respecto a y da $\partial^{p+1} z/\partial y \partial x^p = e^x(1+y)^{-1}$, luego $\partial^{p+2} z/\partial y^2 \partial x^p = e^x(-1)(1+y)^{-2}$, y así sucesivamente.) (b) $(p+1)q - 1$. (Demuéstrese primero que $\partial^p z/\partial x^p = e^{x+y}[xy + (p+1)y - 1]$ por inducción en p. Después pruébese que $\partial^{p+q} z/\partial y^q \partial x^p = e^{x+y}[xy + (p+1)y + qx + (p+1)q - 1]$ por inducción en q.)

15.4

1. (a) $f'_x > 0$ y $f'_y < 0$ en P, mientras que $f'_x < 0$ y $f'_y > 0$ en Q. (b) (i) No existen soluciones. (ii) $x \approx 2$ y $x \approx 6$. (c) 3.

3. (a) $z = 2x + 4y - 5$. (b) $z = -10x + 3y + 3$.

15.5

1. (a) $f'_1 = 2x$, $f'_2 = 3y^2$, y $f'_3 = 4z^3$. (b) $f'_1 = 10x$, $f'_2 = -9y^2$, y $f'_3 = 12z^3$. (c) $f'_1 = yz$, $f'_2 = xz$, y $f'_3 = xy$. (d) $f'_1 = 4x^3/yz$, $f'_2 = -x^4/y^2z$, y $f'_3 = -x^4/yz^2$. (e) $f'_1 = 12x(x^2+y^3+z^4)^5$, $f'_2 = 18y^2(x^2+y^3+z^4)^5$, y $f'_3 = 24z^3(x^2+y^3+z^4)^5$. (f) $f'_1 = yze^{xyz}$, $f'_2 = xze^{xyz}$, y $f'_3 = xye^{xyz}$.

3. $\partial T/\partial x = ky/d^n$ y $\partial T/\partial y = kx/d^n$ son ambas positivas, luego el número de viajeros crece si cualquiera de las dos ciudades crecen, lo que es razonable. $\partial T/\partial d = -nkxy/d^{n+1}$ es negativa, luego el número de viajeros disminuye si la distancia entre las ciudades aumenta, lo que también es razonable.

5. (a) $E'_p = 2ape^{bq}$ y $E'_q = abp^2e^{bq}$. (b) $\partial R/\partial p_1 = \alpha\beta p_1^{\beta-1} + \gamma p_2 e^{p_1p_2}$ y $\partial R/\partial p_2 = \gamma p_1 e^{p_1p_2}$. (c) $\partial x/\partial v_i = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (Por ejemplo, cuando $n = 3$ e $i = 2$, es $(\partial/\partial v_2)(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = a_2$.)

7. $f'_u = v^w \cdot u^{v^w - 1}$, $f'_v = u^{v^w} \cdot w \cdot v^{w-1} \cdot \ln u$, y $f'_w = u^{v^w} \cdot v^w \cdot \ln u \cdot \ln v$.

15.6

1. (a) $\partial M/\partial Y = 0{,}14$ y $\partial M/\partial r = -0{,}84 \cdot 76{,}03(r-2)^{-1{,}84} = -63{,}8652(r-2)^{-1{,}84}$, luego $\partial M/\partial Y$ es positiva y $\partial M/\partial r$ es negativa, lo que está de acuerdo con la intuición económica estándar.

3. $F'_K = aF/K$, $F'_L = bF/L$, y $F'_M = cF/M$, luego $KF'_K + LF'_L + MF'_M = (a+b+c)F$.

5. $\partial U/\partial x_i = e^{-x_i}$, para $i = 1, \ldots, n$.

15.7

1. Beneficio $= (100 - Q_1)Q_1 + (80 - Q_2)Q_2 - 6(Q_1 + Q_2) = 94Q_1 - Q_1^2 + 74Q_2 - Q_2^2$. Esta expresión alcanza su máximo cuando $Q_1 = 47$ y $Q_2 = 37$, luego $P_1 = 53$ y $P_2 = 43$. El beneficio es entonces 3.578. Si la discriminación de precio es ilegal, es $P_1 = P_2 = P$, luego $Q_1 = 100 - P$, $Q_2 = 80 - P$, y la demanda total es $Q = 180 - 2P$. Así la demanda inversa es $P = 90 - \frac{1}{2}Q$, luego el beneficio es $(90 - \frac{1}{2}Q)Q - 6Q = 84Q - \frac{1}{2}Q^2$, que alcanza su máximo cuando $Q = 84$, y así $P = 48$. El beneficio es entonces 3.528, luego el beneficio perdido es 50.

3. $w = w_1 = w_2 = \alpha_1 + \beta_1 L_1 = \alpha_2 + \beta_2 L_2$, luego $L_1 = (w - \alpha_1)/\beta_1$ y $L_2 = (w - \alpha_2)/\beta_2$. La oferta total de trabajo es $L = L_1 + L_2 = [(\beta_1 + \beta_2)w - (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1]/\beta_1\beta_2$. La función inversa de oferta de trabajo es $w = (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \beta_1\beta_2 L)/(\beta_1 + \beta_2)$. El beneficio de la compañía es

$$\pi(L) = (P - w)L = \left(P - \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}\right)L - \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}L^2$$

Esta expresión alcanza su máximo para

$$L^* = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\beta_1\beta_2}\left(P - \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}\right) \quad \text{con} \quad \pi(L^*) = \frac{[\beta_1(P - \alpha_2) + \beta_2(P - \alpha_1)]^2}{4\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}$$

Después de algunas operaciones algebraicas, la pérdida de beneficios comparada con π^* dada en el Ejemplo 15.26 de la Sección 15.7 da $(\alpha_1 - \alpha_2)^2/4(\beta_1 + \beta_2)$. (Nótese que la pérdida es cero cuando $\alpha_1 = \alpha_2$, lo que debería ocurrir, porque en este caso, el monopsonista no estará interesado en discriminar de ninguna forma.)

15.8

1. (a) La matriz simétrica asociada es $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, que tiene determinante positivo. La forma cuadrática verifica (15.17), luego es definida positiva. (b) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$ verifica (15.19), luego la forma cuadrática es definida negativa. (c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ verifica (15.18), pero no (15.17), luego la forma cuadrática es semidefinida positiva. (d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ verifica (15.21), luego la forma cuadrática es indefinida. (e) Indefinida. (f) Semidefinida negativa.

3.

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0$, luego definida positiva, sujeta a la restricción.

(b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -89 < 0$, luego definida positiva, sujeta a la restricción.

(c) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 19 > 0$, luego definida *positiva*, sujeta a la restricción.

15.9

1. $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2$.

3. (a) Definida positiva. (b) Semidefinida positiva. (c) Definida negativa. (La matriz simétrica asociada es

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

cuyos menores principales dominantes son $D_1 = -3$, $D_2 = 2$, y $D_3 = -4$. Así, la forma cuadrática es definida negativa.)

Capítulo 16

16.1

1. (a) $dz/dt = F_1'(x,y)dx/dt + F_2'(x,y)dy/dt = 1 \cdot 2t + 2y \cdot 3t^2 = 2t + 6t^5$. (b)

$$\frac{dz}{dt} = \left(\ln y + \frac{y}{x}\right) \cdot 1 + \left(\frac{x}{y} + \ln x\right) \cdot \frac{1}{t} = \ln(\ln t) + \frac{\ln t}{t+1} + \frac{t+1}{t \ln t} + \frac{\ln(t+1)}{t}$$

3. $dY/dt = (10L - \frac{1}{2}K^{-1/2})\, dK/dt + (10K - \frac{1}{2}L^{-1/2})\, dL/dt = 35 - 7\sqrt{5}/100$ cuando $t = 0$.

5. $u = A\ln[1 + x^\alpha(ax^4+b)^{-\alpha/3}]$. Es suficiente maximizar con respecto a x bien $x^\alpha(ax^4+b)^{-\alpha/3}$, bien $\ln[x^\alpha(ax^4+b)^{-\alpha/3}] = \alpha[\ln x - \frac{1}{3}\ln(ax^4+b)]$. La condición de primer orden $1/x - 4ax^3/3(ax^4+b) = 0$ se verifica en $x^* = \sqrt[4]{3b/a}$, y $h(x^*) = \sqrt[3]{4b}$.

7. (a) $(2,1) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}/2$. (b) $(2e-1, e-1) \cdot (3/5, 4/5) = 2e - 7/5$.

16.2

1. (a) $\partial z/\partial t = y^2 + 2xy \cdot 2ts = 5t^4s^2 + 4t^3s^4$, $\partial z/\partial s = y^2 \cdot 2s + 2xyt^2 = 2t^5s + 4t^4s^3$. (b) $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{2(1-s)e^{ts+t+s}}{(e^{t+s}+e^{ts})^2}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{2(1-t)e^{ts+t+s}}{(e^{t+s}+e^{ts})^2}$.

3. (a) $\partial u/\partial x_i = F'(U) \cdot \partial U/\partial x_i$. (b) $\partial u/\partial x_i = \delta A_i \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1}\left(\sum_{j=1}^n A_j x_j^{\alpha_j}\right)^{\delta-1}$.

5. (a) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial r}$. (b) 28.

7. (a) $F'(t) = (2t)^2 \cdot 2 - t^2 \cdot 1 = 7t^2$. (b) $F'(t) = \int_1^2 e^{tx}\, dx = (e^{2t} - e^t)/t$ (c) $F'(t) = \dfrac{2}{t}(e^{2t^2} - e^{t^2})$ y

$$F'(t) = \frac{e^{2t^2}}{2t} \cdot 2 - \frac{e^{t^2}}{t} + \int_t^{2t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{tx}}{x}\right) dx$$
$$= \frac{e^{2t^2}}{t} - \frac{e^{t^2}}{t} + \int_t^{2t} e^{tx}\, dx = \frac{e^{2t^2}}{t} - \frac{e^{t^2}}{t} + \Big|_t^{2t} \frac{e^{tx}}{t} = \frac{2}{t}(e^{2t^2} - e^{t^2})$$

9. $e^{-\rho g(\rho)} f(g(\rho))g'(\rho) - \int_0^{g(\rho)} te^{-\rho t} f(t)\, dt$.

11. Los resultados son una generalización fácil de las fórmulas (2) y (5) de la sección sobre derivadas direccionales, usando la regla general de la cadena (16.6).

16.3

1. (16.9) Da $y' = -(4x+6y)/(6x+2y) = -(2x+3y)/(3x+y)$.

3. (a) $y' = x/y = \pm 1$. Hay que excluir el origen, véase la Figura 44. (b) $y' = 2x/3y^2 = (2/3)x^{-1/3}$. Hay que excluir el origen, véase la Figura 45.

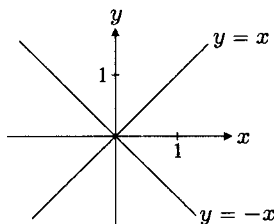


FIGURA 44

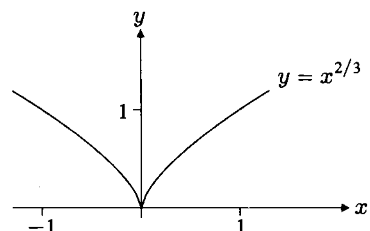


FIGURA 45

5. (a) $\frac{dx}{dt} = \frac{-[f'(x)]^2}{f(x)f''(x)} > 0$ para todo t. (b) Se tiene

$$\mathrm{El}_t f'(x) = \frac{t}{f'(x)}\frac{df'(x)}{dt} = \frac{t}{f'(x)}f''(x)\frac{dx}{dt} = \frac{t}{f'(x)}f''(x)\frac{-[f'(x)]^2}{f(x)f''(x)} = -\frac{tf'(x)}{f(x)} = -\frac{t}{t+x}$$

7. (a) $U'_x(x,y) = F'(f(x)+g(y))f'(x)$, y $U'_y(x,y) = F'(f(x)+g(y))g'(y)$, luego se tiene que $\ln[U'_x(x,y)/U'_y(x,y)] = \ln[f'(x)/g'(y)] = \ln f'(x) - \ln g'(y)$. El resultado se deduce fácilmente. (b) La confirmación de (2) es rutinaria. Entonces $Ax^a y^b = e^{f(x)+g(y)}$, donde $f(x) = \ln A + a\ln x$ y $g(y) = b\ln y$.

16.4

1. (a) $\mathrm{El}_x z = 1$ y $\mathrm{El}_y z = 1$. (b) $\mathrm{El}_x z = 2$ and $\mathrm{El}_y z = 5$. (c) $\mathrm{El}_x z = n + x$ y $\mathrm{El}_y z = n + y$ (d) $\mathrm{El}_x z = x/(x+y)$ y $\mathrm{El}_y z = y/(x+y)$.
3. $\mathrm{El}_i z = p + a_i x_i$, para $i = 1, \dots, n$.
5. Derívese cada miembro de la igualdad $y/x = \ln(xy)$ con respecto a x, para obtener $\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{y'}{y}$.
   Despejando y' se tiene $y' = \frac{(x+y)y}{x(y-x)}$, y $\mathrm{El}_x y = \frac{xy'}{y} = \frac{x+y}{y-x}$.
7. (a) $R_{yx} = (x/y)^{a-1} = (y/x)^{1-a}$ (b) $\sigma_{yx} = 1/(1-a)$.
9. $F(K,N) = \gamma_1(K^{-\alpha} + \gamma_2 N^{-\alpha})^{-v/\alpha}$, luego $F'_K/F'_N = K^{-\alpha-1}/\gamma_2 N^{-\alpha-1}$, lo que implica que $\sigma_{KN} = 1/(1+\alpha)$.
11. $z = -\ln[aK^{-\varrho} + (1-a)L^{-\varrho}]/\varrho \to$"0/0" cuando $\varrho \to 0$. Por la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{\varrho\to 0} z = \lim_{\varrho\to 0}\left[\frac{aK^{-\varrho}\ln K + (1-a)L^{-\varrho}\ln L}{aK^{-\varrho} + (1-a)L^{-\varrho}}\right]/1$$
$$= a\ln K + (1-a)\ln L = \ln K^a L^{1-a}.$$

16.5

1. $f(tx,ty) = (tx)^4 + (tx)^2(ty)^2 = t^4x^4 + t^2x^2t^2y^2 = t^4(x^4 + x^2y^2) = t^4 f(x,y)$, luego f es homogéneo de grado 4.
3. $f(tx,ty) = (tx)(ty)^2 + (tx)^3 = t^3(xy^2 + x^3) = t^3 f(x,y)$, luego f es homogéneo de grado 3. (16.19): $xf'_1(x,y) + yf'_2(x,y) = x(y^2 + 3x^2) + y2xy = 3x^3 + 3xy^2 = 3(x^3 + xy^2) = 3f(x,y)$. (16.20): Es fácil ver que $f'_1(x,y) = y^2 + 3x^2$ y $f'_2(x,y) = 2xy$ son homogéneos de grado 2. (16.21): $f(x,y) = x^3 + xy^2 = x^3[1 + (y/x)^2] = y^3[(x/y)^3 + x/y]$. (16.22): $x^2 f''_{11} + 2xy f''_{12} + y^2 f''_{22} = x^2(6x) + 2xy(2y) + y^2(2x) = 6x^3 + 4xy^2 + 2xy^2 = 3\cdot 2f(x,y)$.
5. Para (16.18) es necesario que $t^3x^3 + t^2xy = t^k(x^3 + xy)$ para todo $t > 0$. En particular, para $x = y = 1$, se tiene $t^3 + t^2 = 2t^k$. Para $t = 2$, se obtiene $12 = 2\cdot 2^k$, ó $2^k = 6$. Para $t = 4$, se obtiene $80 = 2\cdot 4^k$, ó $4^k = 40$. Pero 4^k debería ser el cuadrado de 2^k, luego los dos valores de k deben ser distintos, lo que implica que f no es homogéneo de ningún grado.
7. De $(*)$, con $k = 1$, se obtiene $f''_{11} = (-y/x)f''_{12}$ y $f''_{22} = (-x/y)f''_{21}$. Como $f''_{12} = f''_{21}$, también se tiene $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 = (-y/x)f''_{12}(-x/y)f''_{12} - (f''_{12})^2 = 0$.

16.6

1. (a) Homogéneo de grado 1. (b) No homogéneo. (c) Homogéneo de grado $-1/2$. (d) Homogéneo de grado 1. (e) No homogéneo. (f) Homogéneo de grado n.
3. Homogéneo de grado $0{,}136 + (-0{,}727) + 0{,}914 + 0{,}816 = 1{,}139$.

5. $v_i' = u_i' - a/(x_1 + \cdots + x_n)$, luego $\sum_{i=1}^n x_i v_i' = \sum_{i=1}^n x_i u_i' - \sum_{i=1}^n a x_i/(x_1 + \cdots + x_n) = a - a\sum_{i=1}^n x_i/(x_1 + \cdots + x_n) = a - a = 0$. Por el teorema de Euler, v es homogéneo de grado 0.

7. Sean C y D el numerador y denominador respectivamente de la expresión de σ_{yx} que se da en el Problema 10 de la Sección 16.4. Entonces, por el teorema de Euler, $C = -F_1'F_2'(xF_1' + yF_2') = -F_1'F_2'F$. Usando que $xF_{11}'' = -yF_{12}''$ e $yF_{22}'' = -xF_{21}'' = -xF_{12}''$, se deduce que $D = xy[(F_2')^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + (F_1')^2F_{22}''] = -F_{12}''[(yF_2')^2 + 2xyF_1'F_2' + (xF_1')^2] = -F_{12}''(xF_1' + yF_2')^2 = -F_{12}''F^2$. Así, $\sigma_{xy} = C/D = (-F_1'F_2'F)/(-F_{12}''F^2) = F_1'F_2'/FF_{12}''$.

9. Derívese $f(tx_1, \ldots, tx_n) = g(t)f(x_1, \ldots, x_n)$ con respecto a t y póngase $t = 1$, como en la prueba del Teorema 16.1. Esto da $\sum_{i=1}^n x_i f_i'(tx_1, \ldots, tx_n) = g'(1)f(x_1, \ldots, x_n)$. Por el teorema de Euler, f debe ser homogéneo de grado $g'(1)$. De hecho, $g(t) = t^k$, y $k = g'(1)$.

16.7

1. (a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3$. (b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yz + z^3 - y^2z^5}{xy + 3xz^2 - 5xy^2z^4}$. (c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yze^{xyz} - 3yz}{xye^{xyz} - 3xy} = -\dfrac{z}{x}$.

3. $z_x' = -\dfrac{yx^{y-1} + z^x \ln z}{y^z \ln y + xz^{x-1}}$ y $z_y' = -\dfrac{x^y \ln x + zy^{z-1}}{y^z \ln y + xz^{x-1}}$.

5. $z_x' = f(x/y) + xf'(x/y)(1/y)$ y $z_y' = xf'(x/y)(-x/y^2)$, luego se tiene que $xz_x' + yz_y' = xf(x/y) + (x^2/y)f'(x/y) + yx(-x/y^2)f'(x/y) = xf(x/y) = z$. Alternativamente, nótese que z es homogéneo de grado 1, luego la igualdad se deduce del teorema de Euler.

16.8

1. (a) $f(x, y) \approx 1 + x/2 + y/2$. (b) $f(x, y) \approx y$. (c) $f(x, y) \approx A(1 + ax + by)$.

3. (a) $f(1{,}02, 1{,}99) = 1{,}1909$. (b) $f(1{,}02, 1{,}99) \approx f(1, 2) + (0{,}02) \cdot 8 + (-0{,}01) \cdot (-3) = 1{,}19$, El error es 0,0009.

5. $v(1{,}01, 0{,}02) \approx v(1, 0) + v_1'(1, 0) \cdot 0{,}01 + v_2'(1, 0) \cdot 0{,}02 \approx 1{,}00667$.

7. (a) $dz = 3x^2\,dx + 3y^2\,dy$. (b) $dz = e^{y^2}(dx + 2xy\,dy)$. (c) $dz = \dfrac{2(x\,dx - y\,dy)}{x^2 - y^2}$.

9. (a) $dz = 2xu\,dx + x^2(u_x'\,dx + u_y'\,dy)$. (b) $dz = 2u(u_x'\,dx + u_y'\,dy)$. (c) $dz = [(y + yu_x')\,dx + (x + u + yu_y')\,dy]/(xy + yu)$.

11. $dU = \dfrac{\sqrt{y}}{e^U + Ue^U}dx + \dfrac{x}{2\sqrt{y}(e^U + Ue^U)}dy$.

13. (a) $d^2z = 2\,dx\,dy + 2(dy)^2$ (b) $dz = (3t^2 + 4t^3)dt$ y $d^2z = (6t + 12t^2)(dt)^2$. De otra parte, la expresión de d^2z deducida de (a) es igual a $(4t + 8t^2)(dt)^2$.

16.9

1. (a) $u^3dx + x3u^2du + dv = 2y\,dy$, $3v\,du + 3u\,dv - dx = 0$. Despejando du y dv y poniendo $D = 9xu^3 - 3v$, se tiene $du = D^{-1}(-3u^4 - 1)\,dx + D^{-1}6yu\,dy$, $dv = D^{-1}(3xu^2 + 3u^3v)\,dx + D^{-1}(-6yv)\,dy$. (b) $u_x' = D^{-1}(-3u^4 - 1)$, $v_x' = D^{-1}(3xu^2 + 3u^3v)$. (c) $u_x' = 283/81$ y $v_x' = -64/27$.

3. Fijada y, $F_x'\,dx + F_u'\,du + F_v'\,dv = 0$ y $G_x'\,dx + G_u'\,du + G_v'\,dv = 0$. Eliminando dv y despejando du en términos de dx, da $u_x' = -(F_x'G_v' - F_v'G_x')/(F_u'G_v' - F_v'G_u')$.

5. Fijada a, $I'(r)\,dr = S'(Y)\,dY$ y $a\,dY + L'(r)\,dr = dM$. Despejando dY y dr en términos de dM da

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{I'(r)}{aI'(r) + L'(r)S'(Y)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial r}{\partial M} = \frac{S'(Y)}{aI'(r) + L'(r)S'(Y)}.$$

7. $\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1} = \dfrac{\lambda p_2^2 + x_1(p_2 U''_{12} - p_1 U''_{22})}{p_1^2 U''_{22} - 2p_1 p_2 U''_{12} + p_2^2 U''_{11}}$. (Derivando con $dp_2 = dm = 0$ se obtienen las relaciones: (1′) $U''_{11}\,dx_1 + U''_{12}\,dx_2 = p_1 d\lambda + \lambda p_1$, (2′) $U''_{21}\,dx_1 + U''_{22}\,dx_2 = p_2 d\lambda$, y (3′) $p_1\,dx_1 + dp_1 x_1 + p_2\,dx_2 = 0$. Despéjese dx_1.)

16.10

1. (a) Derivando, (1′) $dY = dC + dI + dG$, (2′) $dC = f'_Y\,dY + f'_T\,dT + f'_r\,dr$, (3′) $dI = h'_Y\,dY + h'_r\,dr$. Así, $dY = (f'_T\,dT + dG + (f'_r + h'_r)\,dr)/(1 - f'_Y - h'_Y)$. (b) Como $\partial Y/\partial T = f'_T/(1 - f'_Y - h'_Y) < 0$, Y decrece cuando T crece. Pero si $dT = dG$, con $dr = 0$, es $dY = (1 + f'_T)dT/(1 - f'_Y - h'_Y)$, que es positivo siempre que $f'_T > -1$.

Capítulo 17

17.1

1. $x = 1$, $y = 2$ ($f'_1(x,y) = -4x + 4 = 0$, $f'_2(x,y) = -2y + 4 = 0$ para $x = 1$, $y = 2$).
3. (a) $x = 3$ y $y = -4$. (b) $f(x,y) = x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + 8y + 4^2 + 35 - 3^2 - 4^2 = (x-3)^2 + (y+4)^2 + 10 \geq 10$ para todo (x,y), mientras que $f(3,-4) = 10$.
5. $Q_1 = (a_1 - \alpha)/2b_1$, $Q_2 = (a_2 - \alpha)/2b_2$. (Resuélvase $\partial\pi(Q_1,Q_2)/\partial Q_1 = a_1 - \alpha - 2b_1 Q_1 = 0$ y $\partial\pi(Q_1,Q_2)/\partial Q_2 = a_2 - \alpha - 2b_2 Q_2 = 0$ en Q_1 y Q_2.)
7. $L_1 = (P - \alpha_1)/2\beta_1$ y $L_2 = (P - \alpha_2)/2\beta_2$.
9. P tiene máximo de valor 3.888 en $x = 36$, $y = 12$, $z = 9$. ($P = (108 - 3y - 4z)yz$. Así $\partial P/\partial y = 108z - 6yz - 4z^2 = 0$ y $\partial P/\partial z = 108y - 3y^2 - 8yz = 0$. Como y y z se suponen positivos, estas dos ecuaciones quedan como $6y + 4z = 108$ y $3y + 8z = 108$, con solución $y = 12$ y $z = 9$.)
11. $x = mp^{-k}/Q$, $y = mq^{-k}/Q$, y $z = mr^{-k}/Q$, donde $k = 1/(1-a)$, y $Q = p^{-ak} + q^{-ak} + r^{-ak}$. (La restricción da $z = (m - px - qy)/r$, y se puede maximizar $P = x^a + y^a + z^a$ con respecto a x e y. Las condiciones de primer orden son $P'_x = ax^{a-1} + az^{a-1}(-p/r) = 0$, y $P'_y = ay^{a-1} + az^{a-1}(-q/r) = 0$. Éstas dan (1) $x = p^{-k}r^k z$, (2) $y = q^{-k}r^k z$. Se deduce que (3) $y = p^k q^{-k} x$. Entonces (1) implica que $x = p^{-k}r^{ak}m - p^{1-k}r^{ak}x - q^{1-k}r^{ak}x$. Despejando x da $x = mp^{-k}/(p^{-ak} + q^{-ak} + r^{-ak})$. Luego (3) da la expresión correcta para y, y la de z sale de la restricción.)

17.2

1. (a) Mínimo en $(-1,3)$ de valor -10, porque $f(x,y)$ es ≥ -10 para todo (x,y), y $f(-1,3) = -10$. No existe máximo. (b) Máximo de valor 3 para todo (x,y) verificando $x^2 + y^2 = 2$. Mínimo $(0,0)$, valor $3 - \sqrt{2}$.
3. Como $F(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ es estrictamente creciente, el problema es equivalente a: $(x^2 + y^2 - 2x)$ con $(x,y) \in S$.
5. Sea $g(x) = 1$ en $[0,1)$, $g(x) = 2$ en $[1,2]$. Entonces g es discontinua en $x = 1$ y $\{x : g(x) \leq 1\} = [0,1)$, que es cerrado. (Dibuje el lector su propia gráfica de g).
7. (a) Sí. (b) No. (Como F es estrictamente creciente, f y g deben tener máximos en el mismo punto del dominio. (c) Sí. (d) No. (Como f es una constante, $F(f(x))$ debe ser constante.)

17.3

1. (a) $f'_1(x,y) = 4 - 4x$ y $f'_2(x,y) = -4y$. El único punto estacionario es $(1,0)$. (b) $f(x,y)$ tiene máximo $(1,0)$, de valor 2 y mínimo $(-5,0)$, de valor -70. (Existen máximo y mínimo, por el teorema de los valores extremos. En el punto estacionario, $f(1,0) = 2$. En la frontera, el valor de la función es

$4x - 50$, con $x \in [-5, 5]$. Así, su máximo a lo largo de la frontera es -30 en $x = 5$ y su mínimo es -70 en $x = -5$.)

3. Existen máximo y mínimo, por el Teorema 17.3. Máximo $(2, 1/2)$, con valor 1 y mínimo $(x, 0)$ con valor 0, y en $(x, x-1)$, con x arbitrario en $[1, 2]$.

5. Para $k \in (0,1)$, F tiene máximo de valor $\sqrt{k}$ en $(0, k)$. Para $k \in (1, \infty)$, F tiene máximo $(k, 0)$, y vale $k^{3/4}$. Para $k = 1$, F tiene máximos $(0, 1)$ y $(1, 0)$, con valor 1.

17.4

1. (a) $f_1' = 2x + 2y^2$, $f_2' = 4xy + 4y$, $f_{11}'' = 2$, $f_{12}'' = f_{21}'' = 4y$, y $f_{22}'' = 4x + 4$. (b) El punto estacionario verifica $x + y^2 = 0$ y $(x+1)y = 0$. Así, $y = 0$ y $x = 0$, ó $x = -1$ e $y = \pm 1$. El Teorema 17.5 implica que $(0, 0)$ es a un mínimo local, mientras que $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$ son puntos de silla.

3. (a) Las condiciones de primer orden $2axy + by + 2y^2 = 0$ y $ax^2 + bx + 4xy = 0$ tienen a $(x, y) = (2/3, 1/3)$ como solución. Así $a = 1$ y $b = -2$. También $c = 1/27$, luego $f(2/3, 1/3) = -1/9$. Por el Teorema 17.5, es un mínimo local. (b) Máximo de valor 193/27 en $(2/3, 8/3)$. Mínimo $(2/3, 1/3)$, de valor $-1/9$.

5. (a) $(1, 2)$ es un mínimo local; $(0, 0)$ y $(0, 4)$ son puntos de silla. (b) Estúdiese $f(x, 1)$ cuando $x \to -\infty$, y $f(-1, y)$ cuando $y \to \infty$. (c) Existen máximo y mínimo por el Teorema 17.3. f tiene un mínimo $(1, 2)$, donde vale $-4/e$, y un máximo de valor 0 en todo $(x, 0)$ y $(x, 4)$ verificando $x \in [0, 5]$, y en todo $(0, y)$ verificando $y \in [0, 4]$. (d) $y' = -f_x'/f_y' = (x-1)(y^2 - 4y)/x(2y - 4) = 0$ cuando $x = 1$ e $y = 4 - e$.

7. (a) $K = w^2L/r^2$ y $L = 2^{-8/3}p^{4/3}w^{-4/3}r^{2/3}(r + w)^{-2/3}$. Para $p = 32\sqrt{2}$, $r = w = 1$, se tiene $K = L = 16$. (b) El valor añadido por cada trabajador es

$$\frac{\pi + wL}{L} = \frac{p(\sqrt{\sqrt{kL} + \sqrt{L}} - rkL}{L} = \frac{p\sqrt{1 + \sqrt{k}}}{L^{3/4}} - rk.$$

(c) $L = 16$. El máximo de h es $h(16, 1) = 7$.

9. Los puntos estacionarios son: $(0, 0)$, $(a, -a)$, (a, a), $(-a, a)$, y $(-a, -a)$, donde $a = \sqrt{u_0}$, y u_0 es la única solución positiva de la ecuación $u^3 + u - 1 = 0$. (Las condiciones de primer orden son $4x(x^2y^4 + y^2 - 1) = 0$ y $4y(x^4y^2 + x^2 - 1) = 0$. Una posibilidad es $(x, y) = (0, 0)$. En otro caso, $x \neq 0 \iff y \neq 0$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$, se tiene que $x^2y^4 + y^2 = 1 = x^4y^2 + x^2$, luego $x^2 = y^2$. Por tanto, $y = \pm x$, y x debe verificar $x^6 + x^2 - 1 = 0$. Sea $u = x^2$. La ecuación $g(u) = u^3 + u - 1 = 0$ tiene una solución $(0, 1)$ por el teorema del valor intermedio. La solución es única porque $g'(u) = 3u^2 + 1 > 0$ para todo u.) No existen puntos óptimos globales. (Considérese $h(x, 0)$ y $h(x, x)$, cuando x tiende a infinito.) $(0, 0)$ es un máximo local; los otros son puntos de silla.

17.5

1. Solamente (a) y (d) son convexas.

3. A lo más un punto. (Si el conjunto tuviera dos puntos distintos, uno de los infinitos puntos del segmento que los une debería pertenecer al conjunto.)

5. Supongamos que (s_1, t_1) y (s_2, t_2) pertenecen a $S \times T$, con $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$. Si $\lambda \in [0, 1]$, se tiene $(1 - \lambda)(s_1, t_1) + \lambda(s_2, t_2) = ((1 - \lambda)s_1 + \lambda s_2, (1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2)$, que está en $S \times T$ porque $(1 - \lambda)s_1 + \lambda s_2 \in S$ y $(1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2 \in T$, por la convexidad de S y T, respectivamente. Por tanto, $S \times T$ es convexo.

17.6

1. (a) Estrictamente convexa. (b) Cóncava, pero no estrictamente cóncava. (c) Estrictamente cóncava.

3. Si $\mathbf{x}^0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$, se tiene $f((1 - \lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}) = ||(1 - \lambda)\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}|| \leq ||(1 - \lambda)\mathbf{x}^0|| + ||\lambda\mathbf{x}|| = (1 - \lambda)||\mathbf{x}^0|| + \lambda||\mathbf{x}|| = (1 - \lambda)f(\mathbf{x}^0) + \lambda f(\mathbf{x})$, luego f es convexa.

17.7

1. $f = u^2$, donde $u = x + 2y + 3z$. Así, f es una función convexa de una suma de funciones lineales, y por tanto, convexa.
3. Como $\lambda(t) \geq 0$, $\lambda(t)f(x(t)) - \lambda(t)f(z) \leq f'(z)\lambda(t)x(t) - zf'(z)\lambda(t)$. Integrando cada miembro con respecto a t se obtiene $\int_a^b \lambda(t)f(x(t))\,dt - f(z)\int_a^b \lambda(t)\,dt \leq f'(z)\int_a^b \lambda(t)x(t)\,dt - zf'(z)\int_a^b \lambda(t)\,dt$. $\int_a^b \lambda(t)\,dt = 1$ y $z = \int_a^b \lambda(t)x(t)\,dt$, luego $\int_a^b \lambda(t)f(x(t))\,dt - f\Big(\int_a^b \lambda(t)x(t)\,dt\Big) \leq 0$.

17.8

1. (a) (i) $f''_{11} = -2 \leq 0$, $f''_{22} = 0 \leq 0$, y $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 = 0 \geq 0$, luego f es cóncava. (ii) $f(x) = (x - y) + (-x^2)$ es suma de dos funciones cóncavas, luego es cóncava. (b) $F(u) = -e^{-u}$ es estrictamente creciente y cóncava ($F'(u) = e^{-u} > 0$ y $F''(u) = -e^{-u} < 0$). Por el Teorema 17.5, parte (c), $z = -e^{-f(x,y)}$ es cóncava.
3. $f''_{11} = -12$, $f''_{22} = -2$, y $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 = 24 - (2a + 4)^2 = -4a^2 - 16a + 8$. Como $f''_{11} < 0$, la función no es nunca convexa. Es cóncava si y sólo si $-4a^2 - 16a + 8 \geq 0$, esto es, si y sólo si $-2 - \sqrt{6} \leq a \leq -2 + \sqrt{6}$.
5. Dibújese una figura y úsese la definición (17.14) de la Sección 17.6 para demostrar que f es convexa.
7. $(100, 300)$ es un punto estacionario de π. Aún más, $\pi''_{11} = -0{,}08 \leq 0$, $\pi''_{22} = -0{,}02 \leq 0$, y $\pi''_{11}\pi''_{22} - (\pi''_{12})^2 = (-0{,}08)(-0{,}02) - (0{,}01)^2 = 0{,}015 \geq 0$, luego $(100, 300)$ es un máximo (global) de π.
9. Verificación directa de las condiciones de segundo orden.
11. La matriz hessiana $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a}{x^2}(\ln x)^{a-2}(\ln y)^b(a - 1 - \ln x) & \dfrac{ab}{xy}(\ln x)^{a-1}(\ln y)^{b-1} \\ \dfrac{ab}{xy}(\ln x)^{a-1}(\ln y)^{b-1} & \dfrac{b}{y^2}(\ln y)^{b-2}(\ln x)^a(b - 1 - \ln y) \end{pmatrix}$$

Aquí $f''_{11} < 0$ porque $0 < a < 1$. Además $|\mathbf{H}| = f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2$ que es igual a

$$\frac{ab}{x^2y^2}(\ln x)^{2a-2}(\ln y)^{2b-2} \cdot [\underbrace{1 - (a + b)}_{>0} + \underbrace{(1 - a)\ln y}_{>0} + \underbrace{(1 - b)\ln x}_{>0} + \underbrace{\ln x \ln y}_{>0}] > 0$$

luego f es estrictamente cóncava.

17.9

1. El único punto estacionario es $(0, 0, 0)$. Los menores principales dominantes del hessiano tienen valores $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, y $D_3 = 4$, luego $(0, 0, 0)$ es un mínimo local por el teorema 17.12, parte (d).
3. Cuando la hessiana no es definida en $\mathbf{x}^0$, este punto no es ni máximo local ni mínimo local, luego es un punto de silla.

17.10

1. (a) f es lineal, luego cuasicóncava. (b) $\ln f(x, y) = x + \ln y$, que es suma de funciones cóncavas. Como e^u es estrictamente creciente, f es cuasicóncava (Teorema 17.16 (b)). (c) El conjunto de puntos tales que $f(x, y) \geq -1$ es $P_{-1} = \{(x, y) : y \leq x^{-2/3}\}$, que no es convexo (véase la Figura 46), luego f no es cuasicóncava. (Es cuasiconvexa en el primer cuadrante por (17.32) (b).) (d) El polinomio $x^3 + x^2 + 1$ es creciente en el intervalo $(-\infty, -2/3]$, y decreciente en $[-2/3, 0]$. Por tanto, f es

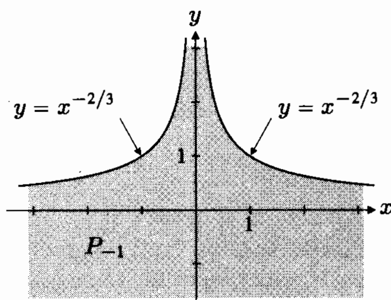


FIGURA 46

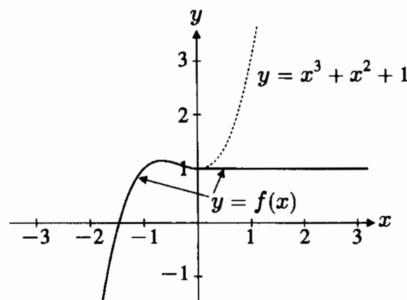
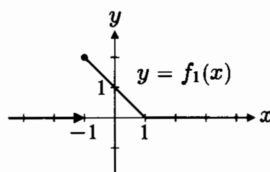
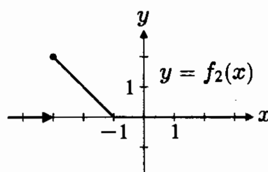


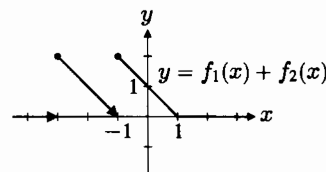
FIGURA 47



(a)



(b)



(c)

FIGURA 48

creciente en $(-\infty, -2/3]$ y decreciente en $[-2/3, \infty)$ (véase la Figura 47.) Los conjuntos de nivel deben ser intervalos, y se deduce que f es cuasicóncava.

3. Sea $f_1(x) = 1 - x$ para $|x| \leq 1$, y 0 para $|x| > 1$; $f_2(x) = -x - 1$ para $|x + 2| \leq 1$, y 0 para $|x + 2| > 1$. Entonces f_1 y f_2 son cuasicóncavas, pero $f_1 + f_2$ no lo es. Véase la Figura 48.

5. $f'(x) \neq 0$ para todo x implica que f es cuasicóncava. (De hecho, $f'(x) \neq 0$ significa que bien f es (estrictamente) creciente bien (estrictamente) decreciente. Luego véase el Problema 2.)

7. De (16.13) Sección 16.3, $\phi''(x) = D_2(x, y)/(F_2')^3$ con $D_2(x, y)$ definida en el Teorema 17.17. Por la parte (a) del Teorema, $D_2(x, y) \geq 0$, luego $\phi''(x) \geq 0$ y ϕ es convexa.

Capítulo 18

18.1

1. (a) $x = 1/2$ y $y = 3/4$ ($f_1'(x, y) = 1$, $f_2'(x, y) = 1$, $g_1'(x, y) = 2x$, $g_2'(x, y) = 1$, luego (18.3) da $1/1 = 2x/1$. Entonces $x = 1/2$ y $y = 1 - (1/2)^2 = 3/4$.) (b) $x = 4/5$ y $y = 8/5$

3. $x = 27/10$ e $y = 9/10$. ((18.3) da $5x^{-1/2}y^{1/3}/(10/3)x^{1/2}y^{-2/3} = 2/4 = 1/2$, luego $y = x/3$. Entonces $y = 9/10$, y $x = 27/10$.)

18.2

1. (a) $\mathcal{L}(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y - 1)$. Las ecuaciones $\mathcal{L}_1' = 1 - 2\lambda x = 0$, $\mathcal{L}_2' = 1 - \lambda = 0$, y $x^2 + y = 1$ tienen la solución $x = 1/2$, $y = 3/4$, y $\lambda = 1$. (b) La solución se ilustra en la Figura 49. El problema de minimización no tiene solución. (c) $x = 0{,}5$ e $y = 0{,}85$. El cambio de la función valor es $f^*(1{,}1) - f^*(1) = (0{,}5 + 0{,}85) - (0{,}5 + 0{,}75) = 0{,}1$. Como $\lambda = 1$, $\lambda \cdot dc = 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$. Así, en este caso, (18.8) se verifica con igualdad.

3. (a) $x = 50$ y $y = 50$, con $\lambda = 250$. Para ver que esto resuelve el problema, sea $x = 50 + h$ e $y = 50 + k$. Sustituyendo estos valores de x e y en la restricción da $50 + h + 50 + k = 100$, esto es, $k = -h$. Entonces

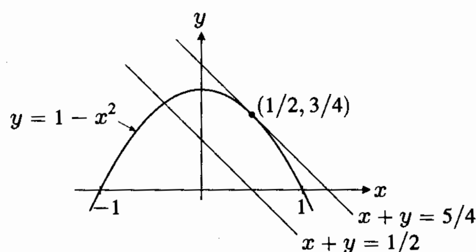


FIGURA 49

$x^2 + 3xy + y^2 = (50 + h)^2 + 3(50 + h)(50 + k) + (50 + k)^2 = 12.500 - h^2$, usando que $k = -h$ y simplificando. Pero $12.500 - h^2$ tiene un máximo para $h = 0$, esto es, para $x = 50$, e $y = 50$. (b) $x = 8/3$ e $y = 1$, con $\lambda = 4$. De la restricción, $y = 3 - 3x/4$. Como se debe tener $y \geq 0$, es $x \leq 4$. Si se pone $h(x) = 12x\sqrt{3 - 3x/4}$, entonces $h'(x) = (72 - 27x)/2\sqrt{3 - 3x/4}$, y la variación de signo de esta derivada implica que h es máxima en $x = 8/3$.

5. (a) $\mathcal{L}(x, y) = 10x^{1/2}y^{1/3} - \lambda(2x + 4y - m)$. Las dos condiciones de primer orden $\mathcal{L}_1' = 5x^{-1/2}y^{1/3} - 2\lambda = 0$ y $\mathcal{L}_2' = (10/3)x^{1/2}y^{-2/3} - 4\lambda = 0$ implican que $(10/3)x^{1/2}y^{-2/3} = 10x^{-1/2}y^{1/3}$, y $x = 3y$. Sustituyendo en la restricción $2x + 4y = m$ da $y = m/10$ y $x = 3m/10$, con $\lambda = 2{,}5(10/27m)^{1/6}$. (b) $f^*(m) = 10^{1/6}3^{1/2}m^{5/6}$ y $df^*(m)/dm = \lambda = 2{,}5 \cdot 10^{1/6}3^{-1/2}m^{-1/6}$.

7. (a) $(2, 1)$. (b) $\mathcal{L}(x, y) = x + 2y - \lambda[p(x^2 + y^2) + x^2y^2 - 4]$, Igualando las derivadas parciales de primer orden a 0 da $\mathcal{L}_1' = 1 - 2\lambda px - 2\lambda xy^2 = 0$ y $\mathcal{L}_2' = 2 - 2\lambda py - 2\lambda x^2y = 0$. Por tanto $2\lambda x(p + y^2) = 1$ y $2\lambda y(p + x^2) = 2$. Eliminando λ da la primera igualdad en $(**)$. La segunda es simplemente la restricción. (c) Derivando $(**)$ con respecto a p, con x e y como funciones de p, da (1) $2x + 2px' - y - py' + 2x'y^2 + 4xyy' - 2xx'y - x^2y' = 0$ y (2) $x^2 + 2pxx' + y^2 + 2pyy' + 2xx'y^2 + 2x^2yy' = 0$. Fijando $p = 0$, y usando que $x(0) = 2$ e $y(0) = 1$, obtenemos las ecuaciones $-2x'(0) + 4y'(0) = -3$ y $4x'(0) + 8y'(0) = -5$, con solución $x'(0) = 1/8$ y $y'(0) = -11/16$. (d) $h(p) = x(p) + 2y(p)$, luego $h'(0) = x'(0) + 2y'(0) = -5/4$.

18.3

1. El problema con sistemas de tres ecuaciones y dos incógnitas es que son inconsistentes (sin solución) con frecuencia, no que sean difíciles de resolver. Las ecuaciones $f_x'(x, y) = f_y'(x, y) = 0$ *no* son válidas en los puntos óptimos.

3. $x = -1$ e $y = 0$ resuelve el problema, con $f(-1, 0) = 1$. (De hecho, este problema tiene un pequeño truco. El único punto estacionario de la función lagrangiana es $(0, 0)$, con $\lambda = -4$, y con $f(0, 0) = 4$. El truco es que en $(-1, 0)$ ambas $g_1'(-1, 0)$ y $g_2'(-1, 0)$ son 0, luego la función lagrangiana no es necesariamente estacionaria en este punto. El problema es minimizar (el cuadrado de) la distancia de $(-2, 0)$ a un punto de la gráfica de $g(x, y) = 0$. Pero la gráfica consta de un punto aislado $(-1, 0)$ y una curva, ilustrada en la Figura 50.)

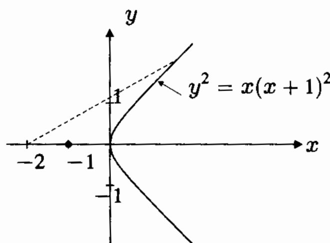


FIGURA 50

18.4

1. La función lagrangiana $\mathcal{L}(x,y) = 10x^{1/2}y^{1/3} - \lambda(2x+4y-m)$ es una función cóncava por ser suma de dos funciones cóncavas, luego se puede aplicar el Teorema 18.2.

18.5

1. (a) $\mathcal{L}(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y+z-1)$. La única solución de las condiciones necesarias es $(1/3, 1/3, 1/3)$. (b) El problema es encontrar la distancia más corta del origen a un punto del plano $x+y+z=1$. El correspondiente problema de maximización no tiene solución.

3. (a) $x = \alpha(wL+m)/p$, $y = \beta(wL+m)/q$, y $l = (\alpha+\beta)L - m(1-\alpha-\beta)/w$. La condición dada es equivalente a $l \geq 0$. (b) La solución es $l = 0$, con $x = \alpha m/(\alpha+\beta)p$ e $y = \beta m/(\alpha+\beta)q$. (En este caso, los ingresos no pagados son tan altos que es óptimo no trabajar.)

5. Como las restricciones son igualdades lineales, no se puede resistir la tentación de eliminar variables. De hecho, sumando las restricciones se obtiene $3x = 6$ luego $x = 2$. Así $y = -(1+z)$. Sustituyendo x e y en la función objetivo, ésta se reduce a $2(1+z)^2+z^2+z = 3z^2+5z+2$. Este polinomio cuadrático tiene un mínimo en $z = -5/6$. Entonces $y = -1/6$. La solución es $(x,y,z) = (2, -1/6, -5/6)$.

7. La función lagrangiana es $\mathcal{L} = x+y-\lambda(x^2+2y^2+z^2-1)-\mu(x+y+z-1)$, que es estacionaria cuando (1) $\mathcal{L}'_x = 1-2\lambda x-\mu = 0$; (2) $\mathcal{L}'_y = 1-4\lambda y-\mu = 0$; (3) $\mathcal{L}'_z = -2\lambda z-\mu = 0$. De (1) y (2), $2\lambda(x-2y) = 0$. Si $\lambda = 0$, de (2) y (3) se tiene $\mu = 1$ y $\mu = 0$. Por tanto, $x = 2y$. Sustituyendo este valor por x en las restricciones da $6y^2+z^2 = 1$, $3y+z = 1$. Así $z = 1-3y$ y $1 = 6y^2+(1-3y)^2 = 15y^2-6y+1$. Por tanto $y = 0$ ó $y = 2/5$, lo que implica que $x = 0$ ó 4/5, y que $z = 1$ ó $-1/5$. Los dos únicos candidatos a soluciones son $(x,y,z) = (0,0,1)$ con $\lambda = -1/2$, $\mu = 1$, y $(x,y,z) = (4/5, 2/5, -1/5)$ con $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/5$. Como $x+y$ es 0 en $(0,0,1)$ y 6/5 en $(4/5, 2/5, -1/5)$, son respectivamente el mínimo y el máximo. (Las restricciones representan geométricamente la curva intersección de un elipsoide (véase la Figura 15.12 en la Sección 15.2) y de un plano. La función continua $x+y$ alcanza un máximo y un mínimo en este conjunto cerrado y acotado.)

9. (a) $\mathcal{L} = (y+z-3)^2-\lambda(x^2+y+z-2)-\mu(x+y^2+2z-2)$, que es estacionaria cuando (1) $\mathcal{L}'_x = -2\lambda x-\mu = 0$; (2) $\mathcal{L}'_y = 2(y+z-3)-\lambda-2\mu y = 0$; (3) $\mathcal{L}'_z = 2(y+z-3)-\lambda-2\mu = 0$. De (2) y (3) $\lambda+2\mu y = \lambda+2\mu$, luego $\mu(y-1) = 0$. Si $\mu = 0$, de (1) y (2), $\lambda x = 0$ y $2(y+z-3) = \lambda$. Por tanto, $\lambda = 0$ implicaría que $y+z = 3$ y $x^2 = -1$ de la primera restricción. Así $\lambda x \neq 0$ y $\mu = 0 \Rightarrow x = 0$. Entonces las dos restricciones dan $y = 2-z$ e $y^2 = 2(1-z)$, luego $y^2-2y+2 = 0$, que no tiene raíces reales. Se concluye que $\mu \neq 0$ e $y = 1$. La dos restricciones implican entonces que $x^2+z = 1$ y $x+2z = 1$. Por tanto $x^2+\frac{1}{2}(1-x) = 1$, que tiene como raíces a $x = 1$ y a $x = -1/2$. Los dos únicos candidatos a soluciones son $(x,y,z) = (1,1,0)$ y $(x,y,z) = (-1/2, 1, 3/4)$. Los valores correspondientes de (λ, μ) son $(4/3, -8/3)$ y $(-5/6, -5/6)$ respectivamente. Como $(y+z-3)^2$ es 4 en $(1,1,0)$ y 25/16 en $(-1/2, 1, 3/4)$, este último es la solución. (El método que se usó en el Problema 4 se puede usar para demostrar que esto da el mínimo.) (b) La segunda solución, que es $(1,1,0)$, da $f(1,1,0) = 4$. pero $(-2,-2,0)$, por ejemplo, verifica sendas restricciones y da $f(-2,-2,0) = 25$.

11. Derivando la restricción con respecto a x_1 da $g'_1 + g'_3(\partial x_3/\partial x_1) = 0$, lo que implica que (1) $\partial x_3/\partial x_1 = -g'_1/g'_3$. Análogamente, (2) $\partial x_3/\partial x_2 = -g'_2/g'_3$. Las condiciones de primer orden para la maximización de $z = f(x_1,x_2,x_3)$, donde x_3 es una función de (x_1,x_2), son (3) $\partial z/\partial x_1 = f'_1 + f'_3(\partial x_3/\partial x_1) = 0$ y (4) $\partial z/\partial x_2 = f'_2 + f'_3(\partial x_3/\partial x_2) = 0$. Sustitúyase (1) y (2) en (3) y (4), poniendo $\lambda = f'_3/g'_3$. Esto da las ecuaciones s $f'_1 - \lambda g'_1 = 0$ y $f'_2 - \lambda g'_2 = 0$. Por la definición de λ, $f'_3 - \lambda g'_3 = 0$. Éstas son las condiciones (18.17) para $n = 3$.

18.6

1. $x = -\frac{1}{6}\sqrt{b}$, $y = -\frac{1}{3}\sqrt{b}$, $z = -\frac{3}{2}\sqrt{b}$, $\lambda = -3/\sqrt{b}$, $f^*(b) = -6\sqrt{b}$, $df^*/db = -3/\sqrt{b} = \lambda$.

3. (a) (4) $1-\frac{1}{3}\lambda = \mu x_2x_3x_4$; (5) $1-\frac{1}{3}\lambda = \mu x_1x_3x_4$; (6) $1-\frac{1}{8}\lambda = \mu x_1x_2x_4$; (7) $1-\frac{1}{8}\lambda = \mu x_1x_2x_3$, junto con (1), (2), y (3). (b) Nótese que $\mu = 0$ daría $1-\frac{1}{3}\lambda = 1-\frac{1}{8}\lambda = 0$, lo que es imposible. Como $x_1,\ldots,x_4$ son todos distintos de cero, de (4) y (5) se deduce que $x_1 = x_2$, y de (6) y (7) que $x_3 = x_4$.

Entonces (4) y (5) implican que $1 - \frac{1}{3}\lambda = \mu x_1 x_3^2$, mientras que (6) y (7) implican que $1 - \frac{1}{8}\lambda = \mu x_1^2 x_3$, y $x_1^2 x_3^2 = 144$ por (2). Por consiguiente, $x_1 x_3 = 12$ y también $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_3 = 3$, de la primera restricción. Estas dos últimas ecuaciones tienen dos soluciones, que son $(x_1, x_3) = (3, 4)$ y $(3/2, 8)$. Para maximizar $x_1+x_2+x_3+x_4 = 2(x_1+x_3)$ es necesario escoger la última. Así, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3/2, 3/2, 8, 8)$ debe resolver el problema con $\lambda = 13$ y $\mu = -5/144$. (c) El cambio es aproximadamente $\mu = -5/144$.

18.7

1. $x^* = m/2p$ y $y^* = m/2q$, con $\lambda = 5p^{-1/2}q^{-1/2}$ resuelve el problema. La función valor óptimo es $U^*(p, q, m) = 5p^{-1/2}q^{-1/2}m$, y (18.31) dice que $\partial U^*/\partial p = -\lambda x^*$, $\partial U^*/\partial q = -\lambda y^*$ y $\partial U^*/\partial m = \lambda$. El lector puede verificar fácilmente que estas ecuaciones son correctas.

3. (a) Las condiciones de primer orden se pueden expresar como

$$\frac{au}{x_1} - \frac{bu}{x_1 + b - a} = \lambda p_1, \qquad \frac{(b-a)u}{x_2} = \lambda p_2$$

donde $u = x_1^a x_2^{b-a}(x_1 + b - a)^{-b}$. Así

$$\lambda p_1 x_1 = au - \frac{bux_1}{x_1 + b - a} = \frac{(b-a)(a - x_1)u}{x_1 + b - a}, \qquad \lambda p_2 x_2 = (b-a)u$$

De la primera de estas ecuaciones, $(b-a)u/\lambda = p_1x_1(x_1 + b - a)/(a - x_1)$, y por tanto, de la segunda, $p_2x_2 = (b-a)u/\lambda = p_1x_1(x_1 + b - a)/(a - x_1)$. Sustituyendo en la restricción presupuestaria y despejando x_1 da $x_1 = am/(m + bp_1)$ y $x_2 = m(m + bp_1 - ap_1)/p_2(m + bp_1)$. Éstas son las funciones de demanda pedidas. Son ambas positivas. (b) Úsese derivación logarítmica para obtener $\partial x_1/\partial p_1 = -bx_1/(m+p_1b) < 0$, $\partial x_1/\partial p_2 = 0$, $\partial x_1/\partial m = x_1/m - x_1/(m+p_1b) > 0$, $\partial x_2/\partial p_1 = -amx_2/[m+p_1(b-a)](m+p_1b) < 0$, $\partial x_2/\partial p_2 = -x_2/p_1 < 0$, y $\partial x_2/\partial m = x_2/m + p_1ax_2/[m + p_1(b-a)](m+p_1b) > 0$. (c) Rutinario.

18.8

1. (a) $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, y (18.35) da (1) $2x - 1 - 2\lambda x = 0$;. (2) $4y - 2\lambda y = 0$. (b) $\lambda \geq 0$ $(= 0$ si $x^2 + y^2 < 1)$ (c) Candidatos: $(1/2, 0)$ con $\lambda = 0$; $(1, 0)$ con $\lambda = 1/2$; $(-1, 0)$ con $\lambda = 3/2$; y $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ con $\lambda = 2$. Máximo 9/4 en $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ y en $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$.

3. (a) La función lagrangiana es $\mathcal{L} = y - x^2 + \lambda y + \mu(y - x + 2) - \nu(y^2 - x)$, que es estacionaria cuando (1) $-2x - \mu + \nu = 0$; (2) $1 + \lambda + \mu - 2\nu y = 0$. Además (3) $\lambda \geq 0 (= 0$ si $y > 0)$; (4) $\mu \geq 0 (= 0$ si $y - x + 2 > 0)$; (5) $\nu \geq 0 (= 0$ si $y^2 < x)$. De (2), $2\nu y = 1 + \lambda + \mu > 0$, luego $y > 0$. Entonces (3) implica que $\lambda = 0$, y $2\nu y = 1 + \mu$. De (1), $x = \frac{1}{2}(\nu - \mu)$. Pero $x \geq y^2 > 0$, luego $\nu > \mu \geq 0$, y de (5), $y^2 = x$. Supongamos que $\mu > 0$. Entonces $y - x + 2 = y - y^2 + 2 = 0$ con raíces $y = -1$ e $y = 2$. Sólo $y = 2$ es un candidato. Así, $x = y^2 = 4$. Como $\lambda = 0$, las condiciones de primer orden dan $-\mu + \nu = 8$ y $\mu - 4\nu = -1$, luego $\nu = -7/3$, que contradice $\nu \geq 0$; por consiguiente, $(x, y) = (4, 2)$ no es un candidato. Se tiene por tanto que $\mu = 0$. Entonces $x = \frac{1}{2}\nu = y^2$ y $1 = 2\nu y = 4y^3$. Así $y = 4^{-1/3}$, $x = 4^{-2/3}$. Éste es el único candidato, con $\lambda = 0$, $\mu = 0$, y $\nu = 2 \cdot 4^{-2/3} = 4^{1/6}$. (b) $x = 1$ e $y = 0$ con $\lambda = 0$, $\mu = 2e - e^{-1}$, y $\nu = 0$. $(\mathcal{L} = xe^{y-x} - 2ey + \lambda x + \mu y - \nu(y - 1 - x/2)$.

5. (a) $\mathcal{L} = \ln x_1 + x_2 + x_3 - \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 1) - \lambda_2(-x_1 + 1) - \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 2)$, las condiciones de primer orden son (1) $1/x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 x_1 = 0$; (2) $1 - \lambda_1 - 2\lambda_3 x_2 = 0$; (3) $1 - \lambda_1 = 0$; (4) $\lambda_1 \geq 0$ $(= 0$ si $x_1 + x_2 + x_3 < 1)$; (5) $\lambda_2 \geq 0$ $(= 0$ si $x_1 > 1)$; (6) $\lambda_3 \geq 0$ $(= 0$ si $x_1^2 + x_2^2 < 2)$. (b) De (3), $\lambda_1 = 1$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, por (4). Además $\lambda_3 x_2 = 0$, por (2). Supongamos que $\lambda_3 > 0$. Entonces $x_2 = 0$ y, por (6), $x_1 = \sqrt{2}$, luego $\lambda_2 = 0$. Pero sustituyendo en (1) da $1/\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}\lambda_3 = 0$, lo que es imposible si $\lambda_3 > 0$. Se tiene entonces $\lambda_3 = 0$. La condición (1) implica que $x_1 = 1/(1 - \lambda_2)$. Esto daría $x_1 > 1$ si $\lambda_2 > 0$, contradiciendo (5). Por tanto $x_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. Además $x_2 + x_3 = 1 - x_1 = 0$. En resumen, las tríadas (x_1, x_2, x_3) con $x_1 = 1$, $x_2 + x_3 = 0$, y $x_2^2 \leq 2 - x_1^2 = 1$, y con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = (1, 0, 0)$, verifican

todas las condiciones necesarias y todas dan el mismo valor 0 para la función objetivo $\ln x_1 + x_2 + x_3$. Hay por tanto infinitas soluciones (usando el Teorema 18.4 de la Sección 18.10, se puede demostrar que son todas óptimas).

18.9

1. (a) $1 - x^2 - y^2 \leq 1$ para todo $x \geq 0$, $y \geq 0$, luego la solución óptima debe ser $x = y = 0$. (b) $\mathcal{L} = 1 - x^2 - y^2 - \lambda(-x) - \mu(-y)$, las condiciones de Kuhn–Tucker son (1) $\partial\mathcal{L}/\partial x = -2x + \lambda = 0$; (2) $\partial\mathcal{L}/\partial y = -2y + \mu = 0$; (3) $\lambda \geq 0$ ($= 0$ si $x > 0$); (4) $\mu \geq 0$ ($= 0$ si $y > 0$). De (1) y (2), $\lambda = 2x$ y $\mu = 2y$. Si $\lambda > 0$, (3) implica $x = 0$, lo que contradice $\lambda = 2x$. En consecuencia, $\lambda = x = 0$. Análogamente, $\mu = y = 0$.

3. Una tríada factible (x_1^0, x_2^0, k^0) resuelve el problema si y sólo si existen λ y μ tales que

$$1 - 2x_1^0 - \lambda \leq 0 \ (= 0 \text{ si } x_1^0 > 0)$$

$$3 - 2x_2^0 - \mu \leq 0 \ (= 0 \text{ si } x_2^0 > 0)$$

$$-2k^0 + \lambda + \mu \leq 0 \ (= 0 \text{ si } k^0 > 0)$$

$$\lambda \geq 0 \ (= 0 \text{ si } x_1^0 < k^0)$$

$$\mu \geq 0 \ (= 0 \text{ si } x_2^0 < k^0)$$

Si $k^0 = 0$, la factibilidad obliga a que $x_1^0 = 0$ y $x_2^0 = 0$, y las dos primeras afirmaciones implican que $\lambda \geq 1$ y $\mu \geq 3$, lo que contradice la tercera. Así, $k^0 > 0$. Si $\mu = 0$, es $x_2^0 = 3/2$ y $\lambda = 2k^0 > 0$. Luego $x_1^0 = k^0 = 1/4$, lo que contradice $x_2^0 \leq k^0$. En consecuencia $\mu > 0$, lo que implica que $x_2^0 = k^0$. Si $x_1^0 = 0 < k^0$, es $\lambda = 0$, lo que contradice la primera afirmación. Por tanto $0 < x_1^0 = \frac{1}{2}(1 - \lambda)$. Si $\lambda > 0$, entonces $x_1^0 = k^0 = x_2^0 = \frac{1}{2}(1 - \lambda) = \frac{1}{2}(3 - \mu) = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$. Pero las dos últimas afirmaciones se verican sólo si $\lambda = -1/3$ y $\mu = 5/3$, lo que contradice $\lambda \geq 0$. Así, es $\lambda = 0$ con $x_2^0 = k^0 > 0$, $\mu > 0$, $x_1^0 = \frac{1}{2}(1 - \lambda) = \frac{1}{2}$. De la tercera afirmación, se sigue que $\mu = 2k^0$ y de la segunda que $3 = 2x_2^0 + \mu = 4k^0$. La única solución posible es $(x_1^0, x_2^0, k^0) = (1/2, 3/4, 3/4)$, con $\lambda = 0$ y $\mu = 3/2$.

5. La demostración es similar a la de la propiedad 3.

18.10

1. (a) Úsese el Teorema 17.9 en la Sección 17.8. (b) Las condiciones de Kuhn-Tucker son (1) $-2(x - 1) - 2\lambda x = 0$, (2) $-2ye^{y^2} - 2\lambda y = 0$, (3) $\lambda \geq 0$ ($= 0$ si $x^2 + y^2 < a$). Por tanto $x = (1 + \lambda)^{-1}$ e $y = 0$. La restricción $x^2 + y^2 \leq a$ implica que $(1 + \lambda)^{-2} \leq a$, ó $1 + \lambda \geq a^{-1/2}$. Para $0 < a < 1$, la solución es $x = \sqrt{a}$, $y = 0$, y $\lambda = a^{-1/2} - 1$; para $a \geq 1$, es $x = 1$, $y = 0$, y $\lambda = 0$. Como $x^2 + y^2$ es convexa, ésta es óptima.

3. Considérese el problema: max $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$ sujeto a $g(x, y) = px + y \leq m$, donde $(x_0, y_0) = (\alpha m/p(\alpha + \beta), \beta m/(\alpha + \beta))$ es factible y verifica las condiciones (a) y (b) del Teorema 18.4, con $\lambda = (\alpha/p)^\alpha \beta^\beta [m/(\alpha + \beta)]^{\alpha+\beta-1}$. Aún más, $U(x, y)$ es cuasicóncava y $g(x, y)$ es lineal, luego se verifica la condición (c) del Teorema 18.5. Además, $(U_1'(x_0, y_0), U_2'(x_0, y_0)) = \alpha^\alpha \beta^\beta [m/(\alpha + \beta)]^{\alpha+\beta-1}(p^{1-\alpha}, p^\alpha) \neq (0, 0)$. Por tanto (x_0, y_0) resuelve el problema. Cuando $\alpha = \beta = 1$ y $p = 2$, el par $(x_0, y_0) = (m/4, m/2)$, con $\lambda = m/4$, resuelve el problema del Ejemplo 18.1 (ver también Ejemplo 18.3 de la Sección 18.2).

5. (a) La solución es $x = 2$. (b) La condicion (b) no se satisface. $x^0 = 1$ no es un óptimo.

Capítulo 19

19.1

1. (a) De la Figura 51, se ve que la solución es la intersección de las dos rectas $3x_1+2x_2 = 6$ y $x_1+4x_2 = 4$. Solución: máximo de 36/5 para $(x_1, x_2) = (8/5, 3/5)$. (b) De la Figura 52, se ve que la solución es la intersección de las dos rectas $u_1 + 3u_2 = 11$ y $2u_1 + 5u_2 = 20$. Solución: mínimo de 104 para $(u_1, u_2) = (5, 2)$. (c) Análogamente, se ve que la solución es la intersección de las dos rectas $-2x_1 + 3x_2 = 6$ y $x_1 + x_2 = 5$. Por tanto; máximo de 98/5 para $(x_1, x_2) = (9/5, 16/5)$. (d) Máximo de 49 para $(x_1, x_2) = (5, 1)$. (e) Máximo de $-10/3$ para $(x_1, x_2) = (2, 2/3)$

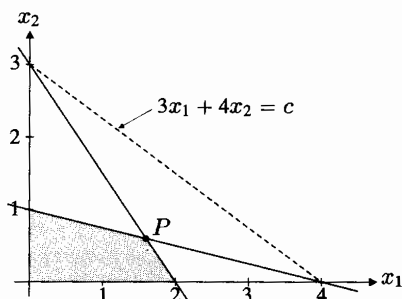


FIGURA 51

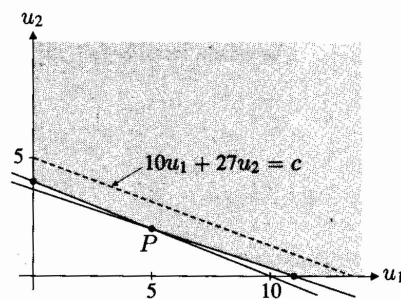


FIGURA 52

3. (a) Máximo de 18/5 para $(x_1, x_2) = (4/5, 18/5)$. (b) Máximo de 8 para $(x_1, x_2) = (8, 0)$. (c) Máximo de 24 para $(x_1, x_2) = (8, 0)$. (d) Mínimo de $-28/5$ para $(x_1, x_2) = (4/5, 18/5)$. (e) Máximo de 16 para todo (x_1, x_2) de la forma $(x_1, 4 - \frac{1}{2}x_1)$ donde $x_1 \in [4/5, 8]$. (f) Mínimo de -24 para $(x_1, x_2) = (8, 0)$ (se deduce de la respuesta a (c)).

5. La pendiente de la recta $20x_1 + tx_2 = c$ debe estar entre $-1/2$ (la pendiente de la frontera de la harina) y -1 (la pendiente de la frontera de la mantequilla). Para $t = 0$, la recta es vertical y la solución es el punto D en Figura 19.2. Para $t \neq 0$, la pendiente de la recta es $-20/t$. Por tanto, $-1 \leq -20/t \leq -1/2$, lo que implica que $t \in [20, 40]$.

19.2

1. (a) $(x_1, x_2) = (2, 1/2)$ y $u_1^* = 4/5$. (b) $(x_1, x_2) = (7/5, 9/10)$ y $u_2^* = 3/5$. (c) Multiplicando las dos restricciones $\leq$ por $4/5$ y $3/5$, respectivamente, y sumando, se obtiene $4/5(3x_1 + 2x_2) + 3/5(x_1 + 4x_2) \leq 6 \cdot (4/5) + 4 \cdot (3/5)$, que se reduce a $3x_1 + 4x_2 \leq 36/5$.

3. $\min 8u_1 + 13u_2 + 6u_3$ sujeto a $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 8 \\ 2u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 9 \end{cases}$ $u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0.$

19.3

1. (a) $x = 0$ e $y = 3$ dan un valor máximo 21. Véase la Figura 53, donde el óptimo está en P. (b) El problema

$$\min 20u_1 + 21u_2 \text{ sujeto a } \begin{cases} 4u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ 5u_1 + 7u_2 \geq 7 \end{cases} \quad u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0$$

tiene la solución $u_1 = 0$ y $u_2 = 1$, que da valor mínimo 21. Véase la Figura 54. (c) Sí.

3. (a) El beneficio de vender x_1 televisiones pequeñas y x_2 medianas es $400x_1 + 500x_2$. La primera restricción, $2x_1 + x_2 \leq 16$, nos dice que no podemos usar más horas en el departamento 1 que las que hay disponibles. La segunda restricción, $x_1 + 4x_2 \leq 16$, nos dice que no podemos usar más horas en el

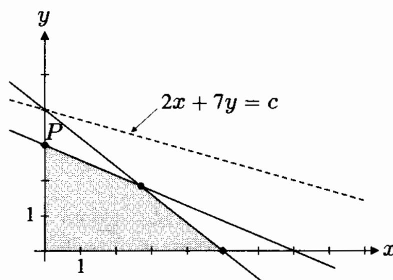


FIGURA 53

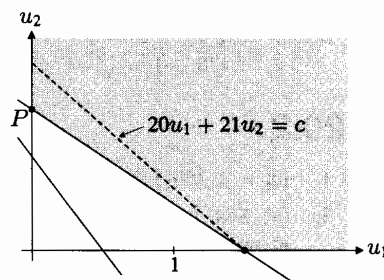


FIGURA 54

departamento 2 que las que hay disponibles. La tercera restricción, $x_1 + 2x_2 \leq 11$, nos dice que no podemos usar más horas en el departamento 3 que las que hay disponibles. (b) La solución es max = 3.800 para $x_1 = 7$ y $x_2 = 2$. (Dibuje el lector la gráfica.) (c) Permitiendo que la primera restricción sea $2x_1 + x_2 \leq 17$ se permite la nueva solución $x_1 = 23/3$, $x_2 = 5/3$, con un beneficio extra de 100. Permitiendo que la segunda restricción sea $x_1 + 4x_2 \leq 17$ no produce ninguna diferencia, porque ya existía capacidad no utilizada en el departamento 2. Permitiendo que la tercera restricción sea $x_1 + 2x_2 \leq 12$ permite la solución $x_1 = 20/3$, $x_2 = 8/3$, con un beneficio extra de 200. Luego se empezaría a aumentar capacidad por el tercer departamento.

19.4

1. De acuerdo con la fórmula (19.12), $\triangle z^* = u_1^* \triangle b_1 + u_2^* \triangle b_2 = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot (-0{,}2) = -0{,}2$.

19.5

1. $4u_1^* + 3u_2^* = 3 > 2$ y $x^* = 0$; $5u_1^* + 7u_2^* = 7$ y $y^* = 3 > 0$. También $4x^* + 5y^* = 15 < 20$ y $u_1^* = 0$; $3x^* + 7y^* = 21$ y $u_2^* = 1 > 0$. Así vemos que (19.13) y (19.14) se verifican.

3. (a) min $10.000y_1 + 8.000y_2 + 11.000y_3$ sujeta a $\begin{cases} 10y_1 + 20y_2 + 20y_3 \geq 300 \\ 20y_1 + 10y_2 + 20y_3 \geq 500 \end{cases}$ $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$. (b) Solución del dual: max = 255.000 para $x_1 = 100$ y $x_2 = 450$. Solución del original: min = 255.000 para $(y_1, y_2, y_3) = (20, 0, 5)$. (c) El coste mínimo incrementará en 2.000.

5. (a) Para $x_3 = 0$, la solución es $x_1 = x_2 = 1/3$. Para $x_3 = 3$, la solución es $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. (b) Si $0 \leq x_3 \leq 7/3$, entonces $z_{\max}(x_3) = 2x_3 + 5/3$ para $x_1 = 1/3$ y $x_2 = x_3 + 1/3$. Si $7/3 < x_3 \leq 5$, es $z_{\max}(x_3) = x_3 + 4$ para $x_1 = x_3 - 2$ y $x_2 = 5 - x_3$. Si $x_3 > 5$, entonces $z_{\max}(x_3) = 9$ para $x_1 = 3$ y $x_2 = 0$. (c) La solución al problema original es $x_1 = 3$ y $x_2 = 0$, con x_3 un número arbitrario ≥ 5.

Capítulo 20

20.1

1. (a) De acuerdo con (20.4), $x_t = 2^t[1 - 4/(1-2)] + 4/(1-2) = 5 \cdot 2^t - 4$. (b) $x_t = (1/3)^t + 1$ (c) $x_t = (-3/5)(-3/2)^t - 2/5$. (d) $x_t = -3t + 3$.

3. $x_1 = ax_0 + A_1$, $x_2 = ax_1 + A_2 = a(ax_0 + A_1) + A_1 = a^2x_0 + (aA_1 + A_2)$, y así sucesivamente. Formalmente, se necesita una prueba por inducción. Si $A_t = bc^t$, entonces $x_t = a^t x_0 + bc(a^{t-1} + a^{t-2}c + \cdots + c^{t-1})$. Luego $x_t = a^t x_0 + \dfrac{c^t - a^t}{c - a} bc$ para $a \neq c$, mientras que $x_t = a^t x_0 + ta^{t-1}b$ para $a = c$.

5. $x_1 = \sqrt{x_0 - 1} = \sqrt{5-1} = 2$, $x_2 = \sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{2-1} = 1$, y $x_3 = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$. Entonces $x_4 = \sqrt{0-1} = \sqrt{-1}$, que no es un número real.

20.2

1. $w_t = 1.250(1{,}2)^t - 250$

3. (a) Sea L_n el débito al 1 de enero del año n. Entonces $L_0 = L$. Como el pago correspondiente al principal en el año n es $L_{n-1} - L_n$ y el pago correspondiente al interés es rL_{n-1}, se tiene que $L_{n-1} - L_n = \frac{1}{2}rL_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, cuya solución es $L_n = (1 - \frac{1}{2}r)^n L$. (b) $(1 - r/2)^n L = (1/2)L$ implica que $r = 2 - 2 \cdot 2^{-1/10} \approx 0{,}133934$ (c) El pago en el año n-ésimo será $I_{n-1} - I_n + rI_{n-1} = (3/2)r(1 - \frac{1}{2}r)^{n-1}L$. El préstamo no se pagará jamás en su totalidad, aunque $L_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

20.3

1. Usando la notación definida en (3) y (5), el pago en cada periodo es

$$z = \frac{\prod_{s=1}^{T}(1 + r_s)B}{\sum_{k=1}^{T}\left(\prod_{s=k+1}^{T}(1 + r_s)\right)}$$

que se puede escribir como

$$z = \frac{B}{\dfrac{1}{1 + r_1} + \dfrac{1}{(1 + r_1)(1 + r_2)} + \cdots + \dfrac{1}{(1 + r_1)(1 + r_2)\cdots(1 + r_T)}}$$

Vemos que z aumenta cuando alguno de los r_k aumenta. Si las tasas de interés amumentan suficientemente sin que aumenten los pagos, nunca se terminará de pagar, e incluso el débito podría crecer indefinidamente. Esto ocurriría si $z_t < r_t b_t$, donde b_t denota el balance en el tiempo t.

20.4

1. (a) Si $x_t = A + 2t$, entonces $x_{t+1} = A + 2(t+1) = A + 2t + 2$ y $x_t + 2 = (A + 2t) + 2 = A + 2t + 2$, luego $x_{t+1} = x_t + 2$. (b) Si $x_t = A\,3^t + B\,4^t$, es $x_{t+2} - 7x_{t+1} + 12x_t = A\,3^{t+2} + B\,4^{t+2} - 7(A\,3^{t+1} + B\,4^{t+1}) + 12(A\,3^t + B\,4^t) = A\,3^t \cdot 3^2 + B\,4^t \cdot 4^2 - 7A\,3^t \cdot 3 - 7B\,4^t \cdot 4 + 12A\,3^t + 12B\,4^t = A\,3^t(9 - 21 + 12) + B\,4^t(16 - 28 + 12) = 0$.

3. $x_t = A\,3^t + B\,4^t$ *es* una solución. Sustituyendo $t = 0$ y $t = 1$ da $A + B = x_0$ y $3A + 4B = x_1$, con solución $A = 4x_0 - x_1$ y $B = -3x_0 + x_1$. Así $x_t = A\,3^t + B\,4^t$ es la solución general de la ecuación dada.

5. (a) La ecuación homogénea es $x_{t+1} = b^t x_t$, donde $b = e^{-2a}$. Así, $x_1 = b^0 x_0 = x_0$, $x_2 = bx_1 = bx_0$, $x_3 = b^2 x_2 = b^2 b x_0 = b^{2+1}x_0$, $x_4 = b^3 x_3 = b^3 b^{2+1} x_0 = b^{3+2+1}$, y así sucesivamente. En general, $x_t = b^{(t-1)+(t-2)+\cdots+3+2+1}x_0$. Como $(t-1) + (t-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{1}{2}(t-1)t$ (véase ecuación (B.5) de la Sección B.2), y se tiene $\tilde{x}_t = \tilde{x}_0 e^{-at(t-1)}$. (b) $u_{t+1}^* - e^{-2at}u_t^* = [e^{-at^2} - e^{-2at}e^{-a(t-1)^2}]/(1 - e^{-a}) = e^{-at^2}$. La solución general es $x_t = \tilde{x}_t + u_t^*$, para $\tilde{x}_0$ arbitrario.

20.5

1. (a) $x_t = C_1 2^t + C_2 4^t$. (b) $x_t = C_1 4^t + C_2 t 4^t$. (c) $x_t = C_1\sqrt{3^t}\cos\theta t + C_2\sqrt{3^t}\operatorname{sen}\theta t$, donde $\cos\theta = -\sqrt{3}/3$ y $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{6}/3$. (d) $x_t = C_1(2/3)^{t/2}\cos\pi t/2 + C_2(2/3)^{t/2}\operatorname{sen}\pi t/2 + 4/5$.

3. (a) $Y_t^* = b/(1-a)$ (b) $m^2 - a(1+c)m + ac = 0$. Dos raíces reales distintas, una raiz real múltiple o dos raíces complejas según sea $a(1+c)^2 - 4c > 0$, $= 0$, ó < 0.

5. Si $a \neq -2$, es $D = c/(a+2)$. Si $a = -2$, es $D = c/(a+4) = \frac{1}{2}c$.

7. (a) Estable. (b) No estable. (c) Estable. (d) No estable.

9. (a) $Y_t^* = \dfrac{a(1+g)^t}{(1+g)^2 - b(1+g) - kg}$ (cuando el denominador no es $\neq 0$). (b) $(b+k)^2 < 4k$. (c) $r = \sqrt{k}$. Oscilaciones amortiguadas cuando $k < 1$.
11. (a) $\sigma\beta < 4\alpha(1-\alpha)$. (b) $\sigma\beta(1+\alpha) < 4\alpha$ y $\alpha < 1$.

Capítulo 21

21.1

1. Si $x(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$, es $\dot{x}(t) + x(t) = -Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t + Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^t = e^t$.
3. Derívese $xe^{tx} = C$ implícitamente para obtener $\dot{x}e^{tx} + x[e^{tx}(x + t\dot{x})] = 0$. Dividiendo por e^{tx} y simplificando da $(1+tx)\dot{x} = -x^2$.
5. Si $x = Ct - C^2$, es $\dot{x} = C$, luego $\dot{x}^2 = C^2$ y $t\dot{x} - x = tC - Ct + C^2 = C^2$. Si $x = \frac{1}{4}t^2$, es $\dot{x} = \frac{1}{2}t$, luego $\dot{x}^2 = \frac{1}{4}t^2$, y $t\dot{x} - x = \frac{1}{4}t^2$. Se concluye que $x = Ct - C^2$ no es la solución general.

21.2

1. Las soluciones son $x = Ct$, para $t \neq 0$, con C una constante arbitraria. Véase la Figura 55.

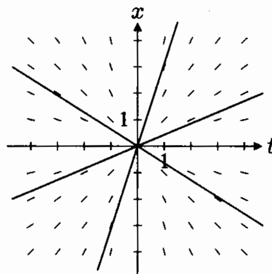


FIGURA 55

21.3

1. Sepárase: $x^2\,dx = (t+1)\,dt$. Integrando, $\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2}t^2 + t + C$, ó $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3t + 3C}$. Para $C = -7/6$, la curva integral pasa por $(1, 1)$.
3. (a) $x = Ce^{t/2}$. Para $C = 1$, la curva integral pasa por $(0, 1)$. (b) $x = Ce^{at}$. Para $C = x_0e^{-at_0}$, la curva integral pasa por (t_0, x_0).
5. $x = Ce^{-\int a(t)\,dt}$. Si $a(t) = a + bc^t$, es $\int a(t)\,dt = at + (b/\ln c)c^t$. Esto implica que $x = Ce^{-at}e^{(-b/\ln c)c^t} = C(e^{-a})^t(e^{-b/\ln c})^{c^t} = Cp^tq^{c^t}$, con $p = e^{-a}$ y $q = e^{-b/\ln c}$.
7. (a) $K = \left[\dfrac{An_0^\alpha a^b}{\alpha v + \varepsilon}(1-b+c)e^{(\alpha v+\varepsilon)t} + C\right]^{1/(1-b+c)}$ (b) $|\alpha x - \beta|^{(\beta/\alpha)}|x - a|^{-a} = Ce^{(\alpha a - \beta)t}$.

21.4

1. (a) $x = Cte^{-t}$; $C = 1$. (Sepárese: $dx/x = [(1/t) - 1]\,dt$. Integrando, $\ln|x| = \ln|t| - t + C_1$. Por tanto, $|x| = e^{\ln|t| - t + C_1} = e^{\ln|t|}e^{-t}e^{C_1} = C_2|t|e^{-t} = Cte^{-t}$, donde $C = \pm C_2 = \pm e^{C_1}$.) (b) $x = C\sqrt[3]{1+t^3}$; $C = 2$.

3. La ecuación es equivalente a $f'(t) = (-r/K)(f(t) - 0)(f(t) - K)$, y la fórmula (4) del Ejemplo 21.10 da $f(t) = K/(1 - Ce^{-rt})$.

5. (a) $\dfrac{K}{L} = \left[\dfrac{K_0^\alpha}{L_0^\alpha e^{\alpha\lambda t}} + (sA/\lambda)(1 - e^{-\alpha\lambda t})\right]^{1/\alpha} \to (sA/\lambda)^{1/\alpha}$ cuando $t \to \infty$. Además $X/L = A(K/L)^{1-\alpha} \to A(sA/\lambda)^{(1-\alpha)/\alpha}$. (b) $\dot{K} = sAb^\alpha(t+a)^{p\alpha}K^{1-\alpha}$, y así,

$$K(t) = \{K_0^\alpha + s\alpha Ab^\alpha\left[(t+a)^{p\alpha+1} - a^{p\alpha+1}\right]/(p\alpha+1)\}^{1/\alpha}$$

Por tanto, $\dfrac{K}{L} = \left[\dfrac{K_0^\alpha + s\alpha Ab^\alpha\left[(t+a)^{p\alpha+1} - a^{p\alpha+1}\right]}{(p\alpha+1)b^\alpha(t+a)^{p\alpha}}\right]^{1/\alpha} \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

21.5

1. Aplicando (21.7) con $a = -1$ y $b(t) = t$ da $x = e^{-(-t)}[C + \int e^{-t}\,t\,dt] = e^t[C + \int t\,e^{-t}\,dt]$. Integrando por partes, $\int t\,e^{-t}\,dt = -te^{-t} + \int e^{-t}\,dt = -te^{-t} - e^{-t}$, y la solución es $x = Ce^t - t - 1$.

3. (a) Como $C = aY + b$ y $I = k\dot{C} = ka\dot{Y}$, la ecuación (1) implica que $Y = C + I = aY + b + ka\dot{Y}$. Despejando $\dot{Y}$ se tiene la ecuación dada. (b) $Y(t) = [Y_0 - b/(1-a)]e^{(1-a)t/ka} + b/(1-a)$ e $I(t) = (1-a)Y(t) - b$. (c) $1/(1-a)$.

5. (a) $x = Ce^{3t} - 5/3$. Para $C = 8/3$, la curva integral pasa por $(0,1)$. (b) $x = Ce^{-2t/3} - 8$. Para $C = 9$, la curva integral pasa por $(0,1)$. (c) $x = Ce^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$. Para $C = 3/4$, la curva integral pasa por $(0,1)$.

7. (a) $x(t) = X(t)/N(t)$ aumenta con t si $\alpha\sigma \geq \rho$. Cuando $\sigma = 0{,}3$ y $\rho = 0{,}03$, es $\alpha \geq 0{,}1$ (=10%). (b) Es suficiente darse cuenta de que $(1 - e^{-\xi t})/\xi > 0$ cuando $\xi \neq 0$, después, aplíquese con $\xi = \alpha\sigma - \mu$. Se puede esperar un mayor crecimiento per cápita porque, en este modelo, la ayuda extranjera contribuye positivamente. (c) Usando la ecuación (6), nótese que

$$x(t) = \left[x(0) + \left(\frac{\sigma}{\alpha\sigma - \mu}\right)\frac{H_0}{N_0}\right]e^{-(\rho-\alpha\sigma)t} + \left(\frac{\sigma}{\mu - \alpha\sigma}\right)\frac{H_0}{N_0}e^{(\mu-\rho)t}$$

Incluso si $\alpha\sigma < \rho$, esta expresión es positiva, y creciente para t grande siempre que $\mu > \rho$. Así, la ayuda extranjera debe crecer más rápidamente que la población.

21.6

1. (a) $\dot{x} + (2/t)x = -1$. Aplíquese (21.11) con $a(t) = 2/t$ y $b = -1$. Entonces $\int a(t)\,dt = \int(2/t)\,dt = 2\ln|t| = \ln|t|^2 = \ln t^2$ y es $\exp(\int a(t)\,dt) = \exp(\ln t^2) = t^2$. Por tanto, $x = (1/t^2)[C + \int t^2(-1)\,dt] = Ct^{-2} - \frac{1}{3}t$. (b) $\int a(t)\,dt = -\int(1/t)\,dt = -\ln t$, y (21.11) da la solución $x = Ct + t^2$. (c) En este caso, $\int a(t)\,dt = -\frac{1}{2}\ln(t^2-1)$, y (21.11) da la solución $x = C\sqrt{t^2-1} + t^2 - 1$. (d) $x = Ct^2 + 2a^2/3t$.

3. Integrando por partes, $p = Ce^{1/t} + e^{1/t}\displaystyle\int t^{-3}e^{-1/t}\,dt = Ce^{1/t} + 1/t + 1$. Si $p(1) = 0$, es $C = -2/e$.

5. (a) Poniendo $z = x^{1-3} = x^{-2}$ se tiene la ecuación lineal $\dot{z} = 2tz - 2t^3$, cuya solución es $z = e^{t^2}(C - \int 2t^3e^{-t^2}\,dt)$. Integrando por partes, da $x^{-2} = Ce^{t^2} + t^2 + 1$. (b) Poniendo $z = x^{-1}$ se tiene $\dot{z} = 2(z/t) - 1$ cuya solución implica que $x = 1/t(1 + Ct)$. (c) $x = (Ce^{2t} - e^t)^2$.

7. Si $x = u + 1/z$, es $\dot{x} = \dot{u} - \dot{z}/z^2$ y la cuación de Riccati se transforma en la ecuación lineal $\dot{z} + [Q(t) + 2u(t)R(t)]z = -R(t)$ si $u = u(t)$ es una solución especial. Para la ecuación $t\dot{x} = x - (x-t)^2$ y la solución especial $u = t$, la sustitución $x = t + 1/z$ da la ecuación lineal $t\dot{z} + z = 1$ cuya solución es $tz = C + t$. Así, $x = t + t/(t + C)$ es la solución general.

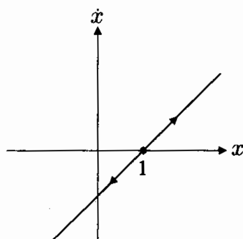


FIGURA 56

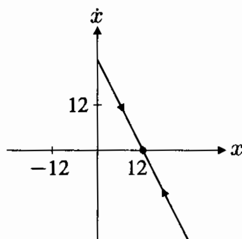


FIGURA 57

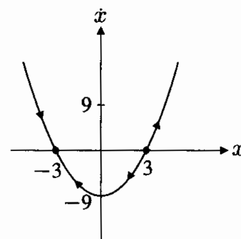


FIGURA 58

21.7

1. (a) $x = 1$ es inestable. Véase la Figura 56. (b) $x = 12$ es estable. Véase la Figura 57. (c) $x = -3$ es estable; $x = 3$ es inestable. Véase la Figura 58.
3. Nótese cómo $F(K, L) = AK^{1-\alpha}L^{\alpha}$ implica $f(k) = Ak^{1-\alpha}$. Entonces $sf(k) = \lambda k$ en $k^* = (sA/\lambda)^{1/\alpha}$, que es el valor del límite de K/L en el problema mencionado.
5. (a) $\partial k^*/\partial s = f(k^*)/[\lambda - sf'(k^*)] > 0$ y $\partial k^*/\partial \lambda = -k^*/[\lambda - sf'(k^*)] < 0$ cuando $\lambda > sf'(k^*)$. En el estado de equilibrio, el capital por obrero aumenta cuando la tasa de ahorro aumenta, y decrece cuando la tasa de crecimiento de mano de obra decrece. (b) De las ecuaciones (1) a (4), $c = (X - \dot{K})/L = (1 - s)X/L = (1 - s)f(k)$. Como $sf(k^*) = \lambda k^*$, luego si $k = k^*$ se tiene $c = f(k^*) - \lambda k^*$. La condición de primer orden necesaria para maximizar esta expresión con respecto a k^* es que $f'(k^*) = \lambda$. Pero $F(K, L) = Lf(k)$ y $F'_K = Lf'(k)dk/dK = f'(k)$ porque $k = K/L$ con L fijo. Así $\partial F/\partial K = \lambda$. (c) $0 = \dot{k}/k = \dot{K}/K - \dot{L}/L = \dot{K}/K - \lambda$ en el estado estacionario.

21.8

1. (a) $x = \frac{1}{6}t^3 + At + B$. (b) $x = -\operatorname{sen} t + At + B$. (c) $x = e^t + \frac{1}{12}t^4 + At + B$.
3. (a) La solución general es $x = Ae^{2t} + Be^{-3t}$. (b) $x = Ae^{2t} + Be^{-3t} - t - 1/6$.
5. Sustituyendo $x = (t + k)^{-1}$ da $k = a$ y $k = b$. La solución general es $x = A(t + a)^{-1} + B(t + b)^{-1}$.

21.9

1. (a) $x = C_1e^{\sqrt{3}t} + C_2e^{-\sqrt{3}t}$; inestable. (b) $x = e^{-2t}(C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t)$; estable. (c) $x = C_1 + C_2e^{-8t/3}$; estable. (d) $x = e^{-t/2}(C_1 + C_2t)$; estable. (e) $x = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} - 4/3$; inestable. (f) $x = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + (1/42)e^{5t}$; estable.
3. (a) $x = -(6 + t)e^{-t} + t^2 - 4t + 6$. (b) $x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + (\pi/2 + 1/4)\cos 2t + t + 1/4$.
5. $u^* = kt + L_0 + [\beta + \alpha(1 - \beta)]k/\delta^*$ es una solución particular. Hay oscilaciones si se verifica la siguiente condición: $(\gamma^2/4)(\beta + \alpha(1 - \beta))^2 + \gamma\delta^* < 0$.
7. Úsese el Problema 3 de la Sección C.1: Poniendo $C = A \cos B$ y $D = -A \operatorname{sen} B$ se obtiene $A\cos(\beta t + B) = A\cos\beta t \cos B - A \operatorname{sen}\beta t \operatorname{sen} B = C\cos\beta t + D\operatorname{sen}\beta t$.
9. $\ddot{p} + \lambda^2 p = a(d_0 - s_0)$. Solución: $p = C_1 \cos\lambda t + C_2 \operatorname{sen}\lambda t + (d_0 - s_0)/(s_1 - d_1)$, donde $\lambda = [a(s_1 - d_1)]^{1/2}$.

Apéndice A

Se dan las respuestas a todos los problemas del Apéndice A

A.1

1. (a) 216. (b) 4/9. (c) -1. (d) 0,09. (e) $(2{,}0)^4 = 16$. (f) $2^6 = 64$. (g) $(2 \cdot 3 \cdot 4)^2 = (24)^2 = 576$. (h) $6^6 = 46.656$.

2. (a) 15^3. (b) $(-1/3)^3$. (c) 10^{-1}. (d) 10^{-7}. (e) t^6. (f) $(a-b)^3$. (g) a^2b^4. (h) $(-a)^3$.
3. (a) a^6. (b) a^8. (c) x^3. (d) b^{-3}. (e) x^6y^9. (f) x^2. (g) z^{-2}. (h) $3^{-6} = 1/729$.
4. (a) $2^6 = 64$. (b) $64/27$. (c) $8/3$. (d) x^9. (e) y^{12}. (f) $8x^3y^3$. (g) $10^{-2} = 1/100$. (h) k^4. (i) $(x+1)^2$.
5. (a) 0. (b) Indefinido. (c) 0. (d) 0. (e) 1. (f) Indefinido. (g) 1. (h) 1
6. (a) $x = 5$. (b) $x = 0$. (c) $x = 3$. (d) $x = 4$. (e) $x = 8$. (f) $x = 0$.
7. (a) Falso. $3^5 = 243$, $5^3 = 125$. (b) Falso. $(5^2)^3 = 5^6$, mientras que $5^{2^3} = 5^8$. (c) Verdadero. $(a^p)^q = (a^q)^p$. (d) Verdadero. $0^3 \cdot 4^0 = 0 \cdot 1 = 0$. (e) Falso. 0^{-2} no está definido. (f) Falso. $(5+7)^2 = 12^2 = 144$, $5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$. (g) Falso. El valor correcto del cociente es $(2x+4)/2 = x+2$. (h) Verdadero. Ambos son iguales a $2x - 2y$. (i) Verdadero.
8. (a) Falso. $a^0 = 1$. (b) Verdadero. $c^{-n} = 1/c^n$ para todo $c \neq 0$. (c) Verdadero. $a^m \cdot a^m = a^{m+m} = a^{2m}$. (d) Falso, a menos que $m = 0$. $a^mb^m = (ab)^m$. (e) Falso, a menos que $m = 1$. Por ejemplo, $(a+b)^2$ es igual a $a^2 + 2ab + b^2$. (f) Falso (a menos que $a^mb^n = 1$). a^2b^3 no es igual a $(ab)^{2+3} = (ab)^6 = a^6b^6$.
9. (a) $x^3y^3 = (xy)^3 = 3^3 = 27$. (b) $(ab)^4 = (-2)^4 = 16$. (c) $(a^{20})^0 = 1$, para todo $a \neq 0$. (d) $2n$ es $0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, luego $(-1)^{2n} = [(-1)^2]^n = 1^n = 1$. (e) $x^3y^3 = (x^{-1}y^{-1})^{-3} = 3^{-3} = 1/27$. (f) $(x^{-3})^6(x^2)^2 = x^{-18}x^4 = x^{-14} = (x^7)^{-2} = 2^{-2} = 1/4$. (g) $(z/xy)^6 = (xy/z)^{-6} = [(xy/z)^{-2}]^3 = 3^3 = 27$. (h) $(abc)^4 = (a^{-1}b^{-1}c^{-1})^{-4} = (1/4)^{-4} = 4^4 = 256$.
10. (a) $16x^4$. (b) 4. (c) $6xyz$. (d) $a^{27}b^9$. (e) a^3. (f) x^{-15}. (g) a^4. (h) 5^{-q}.
11. (a) 19,5. (b) 144. (c) 11.
12. 15%.
13. (a) Dado un tipo de interés constante del 11% anual, en 8 años, una inversión inicial de 50 francos valdrá aproximadamente $50 \cdot (1{,}11)^8 \approx 115{,}23$ francos. (b) A tipo de interés constante anual del 12%, en 20 años, una inversión de 10.000 rand valdrá $10.000 \cdot (1{,}12)^{20} \approx 96.462{,}93$ rand. (c) $5.000 \cdot (1{,}07)^{-10} \approx 2.541{,}75$ coronas es lo que se tendría que haber depositado hace 10 años para tener 5.000 coronas hoy, con tipo de interés constante del 7% anual.
14. $2^{10} = 1.024$. y $10^3 = 1.000$. Así $2^{30} = (2^{10})^3$ es mayor que $(10^3)^3 = 10^9$. Usando la calculadora, $2^{30} = (1.024)^3 = 1.073.741.824$.

A.2

1. (a) 3. (b) 40. (c) 10. (d) 5. (e) 1/6. (f) 0,7. (g) 1/10. (h) 1/5.
2. (a) 81. (b) 4. (c) 623. (d) 15. (e) -1. (f) 3.
3. (a) $\frac{6}{7}\sqrt{7}$. (b) 4. (c) $\frac{1}{8}\sqrt{6}$. (d) 1. (e) $\frac{1}{6}\sqrt{6}$. (f) $2\sqrt{2y}/y$. (g) $\sqrt{2x}/2$. (h) $x + \sqrt{x}$.
4. (a) =, por (A.6). Además ambas expresiones son iguales a 20. (b) $\neq$. De hecho, $\sqrt{25+16} = \sqrt{41} \neq 9 = \sqrt{25} + \sqrt{16}$. (c) $\neq$. De hecho, $(a^{1/2} + b^{1/2})^2 = a + 2a^{1/2}b^{1/2} + b = a + b$ sólo cuando $ab = 0$. (d) =. $(\sqrt{a+b})^{-1} = [(a+b)^{1/2}]^{-1} = (a+b)^{-1/2}$.

A.3

1. (a) 1. (b) 6. (c) -18. (d) -18. (e) $3x + 12$. (f) $45x - 27y$. (g) 3. (h) 0. (i) -1.
2. (a) $3a^2 - 5b$. (b) $-2x^2 + 3x + 4y$. (c) t. (d) $2r^3 - 6r^2s + 3rs^2 + 2s^3$.
3. (a) $-3n^2 + 6n - 9$. (b) $x^5 + x^2$. (c) $4n^2 - 11n + 6$. (d) $-18a^3b^3 + 30a^3b^2$ (e) $a^3b - ab^3$. (f) $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3$.
4. (a) $a^2 - a$. (b) $x^2 + 4x - 21$. (c) $-3 + 3\sqrt{2}$. (d) $3 - 2\sqrt{2}$. (e) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. (f) $1 - b^4$. (g) $1 - x^4$. (h) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.
5. (a) $2x$. (b) $a^2 - 4ab + 4b^2$. (c) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$. (d) $-x^2y - 3x - 2$. (e) $x^2 + (a+b)x + ab$. (f) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$.

6. (a) $2t^3 - 5t^2 + 4t - 1$. (b) 4. (c) $x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$. (d) $4xy + 4xz$.
7. (a) $9x^2 + 12xy + 4y^2$. (b) $5 + 2\sqrt{6}$. (c) $9u^2 - 48uv + 64v^2$. (d) $u^2 - 25v^2$.
8. 500 (Nótese que $(252)^2 - (248)^2 = (252 + 248)(252 - 248) = 500 \cdot 4 = 2.000$.)
9. (a) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$. (b) 1/2. (c) $a^2 - 2ab + b^2 + 2a - 2b + 1$. (d) $a - 2\sqrt{ab} + b$. (e) 1. (f) $n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$.
10. (a) $acx^2 + (ad + bc)x + bd$. (b) $4 - t^2$. (c) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. (d) $a^{10} - b^{10}$. (e) $2\sqrt{15} + 1$. (f) $u^4 - 2u^2v^2 + v^4$
11. En la primera figura, el cuadrado grande tiene lados de longitud $a + b$, luego su área es $(a + b)^2$. Las cuatro partes rectangulares suman un área de $a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Las dos formas de calcular el área deben dar el mismo resultado, luego $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. La interpretación de la segunda figura es similar.
12. $(a^{10} - b^{10})/(a - b) = a^9 + a^8b + a^7b^2 + a^6b^3 + a^5b^4 + a^4b^5 + a^3b^6 + a^2b^7 + ab^8 + b^9$.

A.4

1. (a) $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$. (b) $2 \cdot 2(x + 2y - 6z)$ (c) $2x(x - 3y)$ (d) $2a \cdot a \cdot b \cdot b(3a + 2b)$. (e) $7x(x - 7y)$. (f) $5x \cdot y \cdot y(1 - 3x)(1 + 3x)$ (g) $(4 + b)(4 - b)$. (h) $3(x + 2)(x - 2)$.
2. (a) $(x - 2)(x - 2)$. (b) $2 \cdot 2ts(t - 2s)$. (c) $2 \cdot 2(2a + b)(2a + b)$. (d) $5xx(x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$.
3. (a) $K \cdot K(K - L)$. (b) $KL(L^2 + 1)$. (c) $(L + K)(L - K)$. (d) $(K - L)(K - L)$. (e) $KL(K - 2L)(K - 2L)$. (f) $K^{-\rho}(1 - K^{-\rho})$.
4. (a) $(x+2)(x+3)$. (b) $(x+5)(x-3)$. (c) $(p-1)(p-2)$. (d) $2(q-3)(q+11)$. (e) $3(x+1)(x-5)$. (f) $-(p - 4)(p + 5)$.
5. (a) $(5+a)(x+2y)$. (b) $(a+b)(c-d)$. (c) $(a+2)(x+y)$. (d) $(2x-y)(x+5z)$. (e) $(p-q)(p+q+1)$. (f) $(u - v)(u - v)(u + v)$.
6. (a) $p(1 + rt)$. (b) $\pi r(r + 2h)$. (c) $\frac{1}{4}mn(r - 1)$. (d) $PR(R - Q)$ (e) $(1 + r)(1 + r)(2 + r)$. (f) $\frac{1}{8}gh \cdot h(2h + g)(2h - g)$.
7. (a) $(a^n - 5)(a^n + 5)$. (b) $(a + b + c)(a + b - c)$. (c) $(2a + 2b + c)c$. (d) $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$. (e) $(3 - c)(3 + c)(9 + c^2)$. (f) $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

A.5

1. (a) 2/7. (b) 13/12. (c) 5/24. (d) 2/25. (e) 9/5. (f) 1/2. (g) 1/2. (h) 11/27.
2. (a) $3x/2$. (b) $3a/5$. (c) 1/5. (d) $\dfrac{-5x + 11}{12}$. (e) $-1/6b$. (f) $1/b$.
3. (a) $\dfrac{4}{x^2 - 4}$. (b) $\dfrac{21}{2(2x + 1)}$. (c) $\dfrac{a}{a - 3b}$. (d) $\dfrac{5a - 2}{4ab(a^2 - 4)}$. (e) $\dfrac{-3t^2}{t + 2}$. (f) $4(1 - a)$.
4. (a) 1/2. (b) 6. (c) 5/7. (d) 9/2.
5. (a) $\frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})$ (b) $4 - \sqrt{15}$. (c) $-x(\sqrt{3} + 2)$. (d) $\dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - y}$. (e) $\sqrt{x + h} + \sqrt{x}$. (f) $\dfrac{1}{x}(2\sqrt{x + 1} - x - 2)$.
6. (a) $\dfrac{2 - 3x^2}{x(x + 1)}$. (b) $\dfrac{-2t}{4t^2 - 1}$. (c) $\dfrac{7x^2 + 1}{x^2 - 4}$. (d) $x + y$ (e) $\dfrac{-2x - h}{x^2(x + h)^2}$. (f) $\dfrac{2x}{x - 1}$.
7. $\dfrac{-8x}{x^2 + 2xy - 3y^2}$.
8. (a) $\dfrac{-n}{n - 1}$. (b) $\dfrac{1}{(x - 1)^2}$.

9. (a) 400. (b) 1. (c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$.

10. (a) $\frac{1}{5}a^2b$. (b) $x - y$. (c) $\frac{2a-3b}{2a+3b}$. (d) $\frac{x(x+2)}{2-x}$.

A.6

1. (a) $x = 5$. (b) $x = 3$. (c) $x = 6$. (d) Todo x es solución. (e) $x = -12$. (f) $x = 5/3$. (g) $x = -5$. (*Indicación:* $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$.) (h) $x = -1$.
2. (a) $x = 3$. (b) $x = -7$. (c) $x = -28/11$. (d) $x = 5/11$. (e) $x = 1$. (f) $x = 121$.
3. (a) $x = 0$. (b) $x = -6$. (c) $x = 5$.
4. (a) $2x + 5 = x - 3$. Solución: $x = -8$. (b) $x + (x+1) + (x+2) = 10 + 2x$. Solución: $x = 7$, luego los números son 7, 8, y 9. (c) Si x es el sueldo normal por hora de Ann, es $38x + (48 - 38)2x = 812$. Solución: $x = 14\$$. (d) $15.000 \cdot 10\% + x \cdot 12\% = 2.100$. Solución: $x = 5.000$. (e) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x + 1.000 = x$. Solución: $x = 12.000$.
5. (a) $y = 17/23$. (b) $x = -4$. (c) $z = 4$. (d) $p = 15/16$.
6. 10 minutos. (Si x es el número de litros por minuto de la primera tubería, el número de horas por minuto de las otras dos son $2x/3$ y $x/3$ respectivamente. El tiempo que se necesita para llenar la piscina usando las tres tuberías está dado por $20x/(x + 2x/3 + x/3)$, que es 10.)

A.7

1. (a), (b), (d), (f), y (h) son verdaderos; (c), (e), y (g) son falsos.
2. (a) $x < -9$. (b) Se verifica para todo x. (c) $x \leq 25/2$. (d) $x \leq 19/7$. (e) $t > -1/4$. (f) $x \leq -5$ ó $x > -4$.
3. (a) $-2 < x < 1$. (b) $x < -4$ or $x > 3$. (c) $-5 \leq a \leq 5$. (d) $-7 < x < -2$. (e) $n \geq 160$ ó $n < 0$. (f) $0 \leq g \leq 2$. (g) $p \geq -1$ y $p \neq 2$. (h) $-4 < n < -10/3$. (i) $-1 < x < 0$ ó $0 < x < 1$. (*Indicación:* $x^4 - x^2 = x^2(x+1)(x-1)$.)
4. (a) $x > 1$ ó $x < -4$. (b) $x > -4$ y $x \neq 1$. (c) $x \leq 1$ ó $2 \leq x \leq 3$. (d) $x < 1$ y $x \neq 1/5$. (e) $1/5 < x < 1$. (f) $x < 0$. (g) $-3 < x < -2$ ó $x > 0$. (h) $-5 \leq x \leq 1$ (*Indicación:* $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$.) (i) $-6 \leq x \leq 0$ ó $x \geq 3$. (*Indicación:* $-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 6x = -\frac{1}{3}x(x+6)(x-3)$.)
5. (a) $-41/6 < x \leq 2/3$. (b) $x < -1/5$. (c) $-1 < x < 0$.
6. (a) Sí. (b) No, sea $x = 1/2$, por ejemplo. (c) No para $x \leq 0$. (d) Sí, porque la desigualdad es equivalente a $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, ó $(x-y)^2 \geq 0$, y esta desigualdad se verifica para todo x e y.
7. (a) $120\$ + 0{,}167x$. (b) Menor número de llamadas: 300. Mayor número de llamadas: 400.
8. (a) Entre 39,2°F y 42,8°F. (b) Entre 2,2°C y 4,4°C, aproximadamente.

A.8

1. (a) $x = 0$ y $x = 15$. (b) $p = \pm 4$. (c) $q = 3$ y $q = -4$. (d) No existen soluciones. (e) $x = 0$ y $x = 3$. (f) $x = 2$.
2. (a) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$ para $x = 2$ y $x = 3$. (b) $y^2 - y - 12 = (y-4)(y+3) = 0$ para $y = 4$ e $y = -3$. (c) No existen soluciones, y no se puede factorizar. (d) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}[x - (1 + \sqrt{3})][x - (1 - \sqrt{3})] = 0$ para $x = 1 \pm \sqrt{3}$. (e) $m^2 - 5m - 3 = [m - \frac{1}{2}(5 + \sqrt{37})][m - \frac{1}{2}(5 - \sqrt{37})] = 0$ for $m = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{37})$. (f) $0{,}1p^2 + p - 2{,}4 = 0{,}1(p-2)(p+12) = 0$ para $p = 2$ y $p = -12$.
3. (a) $r = -13$, $r = 2$. (b) $p = -16$, $p = 1$. (c) $K = 100$, $K = 200$. (d) $r = -\sqrt{3}$, $r = \sqrt{2}$. (e) $x = -0{,}5$, $x = 0{,}8$. (f) $p = -1/6$, $p = 1/4$.
4. (a) $x = 1$, $x = 2$. (b) $t = \frac{1}{10}(1 \pm \sqrt{61})$. (c) $x = \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{13})$. (d) $x = \frac{1}{3}(-7 \pm \sqrt{5})$. (e) $x = -300$, $x = 100$. (f) $x = \frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{13})$.

5. (a) Los lados del rectángulo miden 5 y 15 cm. (Si notamos por x e y la longitud de los lados, entonces $2x + 2y = 40$ ó $x + y = 20$, y $xy = 75$. Así, x e y son las raíces de la ecuación $r^2 - 20r + 75 = 0$, porque la suma de las raíces es 20 y el producto es 75.) (b) $x^2 + (x+1)^2 = 13 \Leftrightarrow x = -3,\ x = 2$. Por tanto, los dos números naturales deben ser 2 y 3. (c) $x^2 + (x+14)^2 = (34)^2$. El lado más corto es x y mide 16 cm. El lado más largo mide 30 cm. (d) 50 km/h. (Si la velocidad habitual de conducción es x km/h y el tiempo que se tarda normalmente es de t horas, entonces $xt = 80$ y $(x+10)(t - 16/60) = 80$. De la primera ecuación, $t = 80/x$. Sustituyendo en la segunda ecuación, y reordenando, se tiene $x^2 + 10x - 3.000 = 0$, cuya solución positiva es $x = 50$.)

6. (a) $x = -2,\ x = 0,\ x = 2$ ($x(x^2-4) = 0$ ó $x(x+2)(x-2) = 0$). (b) $x = -2,\ x = -1,\ x = 1,\ x = 2$. (Sea $x^2 = u$.) (c) $x = -1/3,\ x = 1/5$. (Sea $z^{-1} = u$.)

7. $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$, que es $(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$, y se concluye.

A.9

1. (a) $x = 8,\ y = 3$. (b) $x = 1/2,\ y = 1/3$. (c) $x = 1{,}1,\ y = -0.3$.

2. (a) $K = 2{,}8,\ L = 5{,}75$. (b) $p = 2,\ q = 3$. (c) $r = 2{,}1,\ s = 0{,}1$.

4. (a) 39 y 13. (b) 120$ la mesa y 60$ la silla. (c) 30 de calidad A y 20 de calidad B. (d) 8.000$ al 7,2% y 2.000$ al 5% de interés.

Apéndice B

B.1

1. (a) 55. (b) 585. (c) 36. (d) 22. (e) 20. (f) 73/12.

3. (a) $\sum_{k=1}^{n} 4k$. (b) $\sum_{k=1}^{n} k^3$. (c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$. (d) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. (e) $\sum_{n=1}^{6} 3^n x^n$. (f) $\sum_{j=3}^{p} a_i^j b_{i+j}$. (g) $\sum_{k=0}^{p} a_{i+k}^{k+3} b_{i+k+3}$. (h) $\sum_{k=0}^{3} (81.297 + 198k)$.

5. (a) $\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{5} x_i - \sum_{i=1}^{5} \bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i - 5\bar{x}$. (b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}$.

7. (a), (c), (d), y (e) son ciertas; (b) y (f) son falsas en general.

B.2

1. $\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 3k + 2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3[\frac{1}{2}n(n+1)] + 2n = \frac{1}{3}n(n^2 + 6n + 11)$.

3. (a) En ambas sumas, todos los términos cancelan de dos en dos, excepto $-a_1$, el último término entre los primeros paréntesis, y a_9 (o, generalmente, a_n), el primer término entre los últimos paréntesis. (b) (i) $1 - (1/51) = 50/51$. (ii) $3^{13} - 3$. (iii) $ar(r^n - 1)$.

5. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{x}\left(\frac{kx}{n}\right)^2 = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{x}{n}\frac{1}{6}(n-1)n[2(n-1)+1] = \frac{1}{6}x(2n^2 - 3n + 1)$.

B.3

1. (a) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} i\cdot 3^j = \sum_{i=1}^{3}(i\cdot 3+i\cdot 9+i\cdot 27+i\cdot 81) = \sum_{i=1}^{3}120i = 720$. (b) $\displaystyle\sum_{s=0}^{2}\sum_{r=2}^{4}\left(\frac{rs}{r+s}\right)^2 = \sum_{s=0}^{2}\left[\left(\frac{2s}{2+s}\right)^2+\left(\frac{3s}{3+s}\right)^2+\left(\frac{4s}{4+s}\right)^2\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{4}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{6}\right)^2 = 5+\frac{3.113}{3.600}$. (c) $\displaystyle\frac{1}{2}m(m+1)k\frac{k^n-1}{k-1}$.
3. (a) El número total de unidades del bien i. (b) El número total de bienes correspondientes a la persona j. (c) El número total de bienes del grupo completo de personas.

B.4

1. (a) $2^{-21} = 1/2^{21}$. (b) $(360)^3 = 46.656.000$. (c) 0. (d) $1/(1+r_1)(1+r_2)$.
3. (a)

$$\prod_{i=1}^{n} ka_i = (ka_1)(ka_2)\cdots(ka_n) = k^n\prod_{i=1}^{n} a_i,$$

luego la igualdad sólo se verifica para $n = 1$. (b) Verdadera:

$$\prod_{i=1}^{n} y_i^3 = y_1^3y_2^3\cdots y_n^3 = (y_1y_2\cdots y_n)^3 = \Big(\prod_{i=1}^{n} y_i\Big)^3.$$

(c) Verdadera:

$$\prod_{i=1}^{n} x_iy_i = (x_1y_1)(x_2y_2)\cdots(x_ny_n) = (x_1x_2\cdots x_n)(y_1y_2\cdots y_n) = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} y_i\Big).$$

(d) Verdadera:

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\prod_{j=1}^{i} a_{ij}\Big) = \Big(\prod_{j=1}^{1} a_{1j}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{2} a_{2j}\Big)\cdots\Big(\prod_{j=1}^{n} a_{nj}\Big)$$
$$= (a_{11})(a_{21}a_{22})\cdots(a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}) = (a_{11}a_{21}\cdots a_{n1})(a_{22}a_{32}\cdots a_{n2})\cdots a_{nn}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} a_{i1}\prod_{i=2}^{n} a_{i2}\cdots\prod_{i=n}^{n} a_{in} = \prod_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=j}^{n} a_{ij}\Big).$$

B.5

1. Para $n = 1$, ambos lados de la igualdad valen 1. Supongamos que $(*)$ es cierto para $n = k$. Entonces, $1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. Pero esto es $(*)$ para $n = k+1$. Por tanto, por el principio de inducción, $(*)$ es verdadera para todo n.
3. (a) Para $n = 1$, ambos lados de la igualdad valen 1/2. Supongamos que (a) es verdadera para $n = k$. Entonces $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$, que es (a) para $n = k+1$. Así, (a) es verdadera para todo n. (b) Para $n = 1$, ambos lados de la igualdad valen 3. Supongamos que (b) es verdadera para $n = k$. Entonces $3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^k+3^{k+1} = \frac{1}{2}(3^{k+1}-3)+3^{k+1} = \frac{1}{2}(3^{k+2}-3)$, que es (b) para $n = k+1$. Se deduce por el principio de inducción que (b) es verdadera para todo n.

5. Para $n = 1$, ambos lados de la igualdad valen a. Supongamos que la fórmula es válida para $n = m$. Entonces $a + ak + \cdots + ak^{m-1} + ak^m = a\dfrac{1-k^m}{1-k} + ak^m = a\dfrac{1-k^{m+1}}{1-k}$, que es la fórmula dada para $n = k + 1$. Por inducción, la fórmula es verdadera para todo n.

Apéndice C

C.1

1. Véase la Figura 59. $OB = BP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, por el teorema de Pitágoras. Por tanto, $\operatorname{sen} 45° = BP/OP = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos 45°$, mientras que $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{sen} 45°/\cos 45° = 1$.

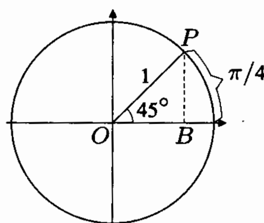


FIGURA 59

3. $\cos(x + y) = \cos[x - (-y)] = \cos x \cos(-y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

5. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos \pi + \cos x \operatorname{sen} \pi}{\cos x \cos \pi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \pi} = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$. También $\operatorname{sen}\left(x + \pi/2\right) = \operatorname{sen} x \cos \frac{1}{2}\pi + \cos x \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = (\operatorname{sen} x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x$

7. (a) $\sqrt{2}\operatorname{sen}(x + \pi/4) - \cos x = \sqrt{2}(\operatorname{sen} x \cos \pi/4 + \cos x \operatorname{sen} \pi/4) - \cos x = \sqrt{2}(\operatorname{sen} x \cdot 1/\sqrt{2} + \cos x \cdot 1/\sqrt{2}) - \cos x = \operatorname{sen} x$. (b) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ $(\operatorname{sen}[\pi - (\alpha+\beta)] = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos[2\pi - (\alpha+\beta)] = \cos(\alpha+\beta)$.) (c) $-\cos a/\operatorname{sen} a$.

9.
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) &= (\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y)(\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y)\\ &= \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 y\\ &= \operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 y) - (1 - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^2 y\\ &= \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y\end{aligned}$$

11. (a) Como $|f(x)| = |(1/2)^x \operatorname{sen} x| \leq (1/2)^x$ para todo x, y $(1/2)^x \to 0$ cuando $x \to \infty$, las oscilaciones son cada vez menores. (b) Como $2^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, las oscilaciones son cada vez mayores.

13. Como $(AB)^2 = (b - a\cos x)^2 + (0 - a \operatorname{sen} x)^2 = c^2$, se tiene la identidad $b^2 - 2ab\cos x + a^2\cos^2 x + a^2 \operatorname{sen}^2 x = c^2$. Al ser $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se deduce (C.10) de forma inmediata.

C.2

1. (a) $y' = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$. (b) $y' = \cos x - x \operatorname{sen} x$. (c) $y' = \dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$. (d) $y' = (-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x)/\operatorname{sen}^2 x = -1/\operatorname{sen}^2 x$.

3. (a) $\cos x - \operatorname{sen} x$. (b) $5x^4 \operatorname{sen} x + x^5 \cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{x} \operatorname{sen} x$. (c)

$$\frac{1}{(x^2+1)^2}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3x\sqrt{x}}{2}\right)\cos x - \sqrt{x}\,(1+x^2)\operatorname{sen} x\right].$$

5. (a) 2. (b) m/n. (c) 1/2. (d) 0 (No se puede aplicar la regla de l'Hôpital.)
7. $p'(t) = -\lambda C_1 \operatorname{sen} \lambda t + \lambda C_2 \cos \lambda t$. y $p''(t) = -\lambda^2 C_1 \cos \lambda t - \lambda^2 C_2 \operatorname{sen} \lambda t$, luego $p''(t) + \lambda^2 p(t) = C_0\lambda^2$. Así, $K = C_0\lambda^2$.
9. $f'(x) = 6\cos 2x - 16 \operatorname{sen} 4x$.
11. (a) $-\ln|\cos x| + C$. (b) $e^{\operatorname{sen} x} + C$. (c) $-\frac{1}{6}\cos^6 x + C$.
13. (a) $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. (b) $\dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$. (c) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.
15. Sean Q y R los puntos más cercanos en la línea de la playa PP' a A y a B, respectivamente. Sea $a = AQ$, $b = BR$, $QR = l$, y $QC = x$. El tiempo necesario para llegar hasta el nadador es

$$T(x) = \frac{AC}{v_1} + \frac{BC}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{v_2}, \quad x \in [0, l]$$

La condición de primer orden para alcanzar un mínimo da

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{l-x}{v_2\sqrt{b^2+(l-x)^2}}$$

que es equivalente a $\operatorname{sen}\alpha_1/v_1 = \operatorname{sen}\alpha_2/v_2$. Esta condición también es suficiente para que exista un mínimo porque se tiene que $T''(x) > 0$ en $[0, l]$.

C.3

1. (a) $z + w = 5 - 2i$. (b) $zw = 21 - 9i$. (c) $z/w = (-3 - 7i)/6$. (d) $|z| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.
3. (a) $\frac{1}{2}(1 + 5i)$. (b) $-3 - 4i$. (c) $(1/26)(31 + 27i)$ (d) i.

Bibliografía

Bartle, R. G. *The Elements of Real Analysis.* 2^a ed. New York: John Wiley & Sons, 1976.

Dixit, A. K. *Optimization in Economic Theory.* 2^a ed. Londres: Oxford University Press, 1990.

Hadley, G. *Linear Algebra.* Reading, Massachussets: Addison-Wesley, 1973.

Luenberger, D. G. *Introduction to linear and Nonlinear Programming.* Reading, Massachussets: Addison-Wesley, 1973.

Índice analítico

D

E

T

U

V

ESTE LIBRO SE TERMINO DE IMPRIMIR EL
DIA 20 DE AGOSTO DE 1996, FESTIVIDAD
DE SAN BERNARDO, EN LOS TALLERES
DE IMPRENTA FARESO, S. A.